

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2

Corso di laurea in Matematica

8 Gennaio 2016

Nome (in stampatello):

Numero di Matricola:

1) (8 punti) Discutere la convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^x \left(\tan \frac{x^n}{n} - \operatorname{sen} \frac{x^n}{n} \right)$$

al variare di x in $[-1, 1]$.

2) (7 punti) Provare che la forma differenziale

$$\omega = \frac{2xy^3}{1+x^2y^2} dx + \left(\log(1+x^2y^2) + \frac{2x^2y^2}{1+x^2y^2} \right) dy$$

è esatta, determinare l'insieme delle sue primitive e calcolare $\int_{\gamma} \omega$, dove γ è l'arco di cardiode di equazione polare $\rho(\vartheta) = 1 + \cos \vartheta$ contenuto nel semipiano $\{y > 0\}$, percorso in senso orario.

3) (8 punti) Determinare massimo e minimo assoluto per la funzione

$$f(x, y) = x^4y - 2x^2y + \arctan y$$

sull'insieme $R = \{(x, y) : x \in [-1, 1], y \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]\}$. Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativi di f in tutto il piano.

4) (9 punti) Sia E l'intersezione del cilindro $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ con la palla di centro l'origine e raggio 2. Si calcoli

$$\int_{\partial E} F \cdot \nu \, d\sigma,$$

dove ν è la normale esterna al bordo di E e $F = (xz^2, y^2z^2, xy)$.

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2

Corso di laurea in Matematica

25 Gennaio 2016

Nome (in stampatello):

Numero di Matricola:

1) (9 punti) Al variare del parametro $\alpha > 0$ studiare continuità e differenziabilità della funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha y^2}{x^2 + y^6} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

2) (9 punti) Studiare la natura dei punti critici della funzione

$$f(x, y) = (2x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 1) + 1$$

e determinare il massimo e il minimo assoluto di f sul generico cerchio di centro l'origine e di raggio $r > 1$. Calcolare l'estremo inferiore e superiore di f sul piano.

3) (8 punti) Data la forma differenziale

$$\frac{x(x^2 - y^2 + a)}{(y^2 - x^2)^2} dx + \frac{y(y^2 - x^2 + 1)}{(y^2 - x^2)^2} dy,$$

determinare a in modo che la forma differenziale sia esatta e calcolarne la primitiva che in $(0, 1)$ vale 0.

4) (9 punti) Sia D la regione del piano compresa fra l'asse delle x e la cicloide di equazione

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Determinare il volume del dominio $T \subset \mathbb{R}^3$ ottenuto ruotando D di un giro completo intorno all'asse x e l'area della superficie ∂T .

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2

Corso di laurea in Matematica

15 Febbraio 2016

Nome e cognome (in stampatello):

Numero di Matricola:

1) (9 punti) Al variare del parametro $\alpha > 0$ studiare continuità e differenziabilità della funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y) = \begin{cases} \arctan \frac{|x^3 y|^\alpha}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

2) (9 punti) Data la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = (1 - 2y)e^{x^2 - y^2}$,

(i) mostrare che il suo codominio è $(-\infty, +\infty)$,

(ii) determinarne gli eventuali massimi e minimi relativi nel piano,

(iii) mostrare che f ha massimo e minimo assoluti nella striscia $\{(x, y) : |x| \leq 1\}$ e determinarli.

3) (8 punti) Siano Γ la circonferenza di centro $(0, 1)$ e raggio 1 e

$$\gamma = \{(x, y) \in \Gamma : x \geq 0, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Calcolare l'area della superficie ottenuta ruotando γ di un giro completo intorno alla bisettrice del primo quadrante.

4) (8 punti) Sia C il solido ottenuto intersecando il cilindro circolare retto $\{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ con i piani $z = 0$ e $z = 2$ e sia P la palla di centro $(0, 0, 2)$ e raggio

1. Calcolare

$$\iiint_{C \setminus P} (x^2 + y^2 + (z - 2)^2) dx dy dz.$$

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2

Corso di laurea in Matematica

9 Maggio 2016

Nome e cognome (in stampatello):

Numero di Matricola:

1) (9 punti) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 2^{nx-n},$$

al variare di x in \mathbb{R} , e calcolarne la somma.

2) (10 punti) Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = (x^2 + y^2 - 1)e^{-x^2 - y^2} + (x^4 + y^4 + 1)\mathbb{I}_{C_1}(x, y),$$

$$\text{dove } \mathbb{I}_{C_1}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{se } x^2 + y^2 > 1, \end{cases}$$

- (i) determinarne gli eventuali massimi e minimi relativi nel piano,
- (ii) mostrare che f ha massimo e minimo assoluti sul piano e determinarli.

3) (7 punti) Sia $D = \{(x, y) : x \geq 0, (x^2 + y^2)^2 \leq x^2 - y^2\}$. Si calcoli il baricentro di D .

4) (10 punti) Siano e_1, e_2, e_3 gli elementi della base canonica di \mathbb{R}^3 e sia $Q = [-1, 1]^3$. Posto per ogni $\nu \in \mathbb{R}^3$

$$f(\nu) = \iiint_Q |(x, y, z) \cdot \nu|^2 dx dy dz,$$

- (i) si calcoli $f(e_1)$;
- (ii) si provi che $f(e_1) = f(e_2) = f(e_3)$;
- (iii) si osservi che

$$\iiint_Q xy dx dy dz = \iiint_Q xz dx dy dz = \iiint_Q yz dx dy dz = 0$$

(iv) si deduca dai passi (ii) e (iii) che per ogni $\nu \in \mathbb{R}^3$ si ha $f(\nu) = |\nu|^2 f(e_1)$.

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2

Corso di laurea in Matematica

7 Giugno 2016

Nome e cognome (in stampatello):

Numero di Matricola:

1) (10 punti) Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y \operatorname{sen}^2 x - x \tan^2 y}{(x^2 + y^2)^\alpha} & \text{per } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{per } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (i) dire per quali valori di $\alpha > 0$ è continua nell'origine;
- (ii) mostrare che se $\alpha \in (0, 1)$ la funzione è differenziabile nell'origine;
- (iii) fissato $\alpha = 1$, calcolare $\frac{\partial f}{\partial \nu}(0, 0)$, dove $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ è un vettore unitario;
- (iv) dedurre dalla formula ottenuta al punto (iii) che se $\alpha = 1$ allora f non è differenziabile nell'origine.

2) (9 punti) Data la funzione $f(x, y) = 4x^4 + y^4 - 4x^2y^2 - 2x^2 + y^2 + 1$, determinarne gli eventuali punti di massimo e minimo assoluti e il codominio.

3) (9 punti) Data la forma differenziale

$$\frac{4x^2 + 4xy + ay^2 + 1}{8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3} dx + \left(\frac{4x^2 + 4xy + y^2 + 1}{2(8x^3 + 12x^2y + 6xy^2 + y^3)} + y \right) dy,$$

determinare a in modo che la forma differenziale sia esatta e calcolarne la primitiva che in $(0, -1)$ vale 0.

4) (8 punti) Dato il campo vettoriale $F(x, y, z) = \left(\operatorname{sen} z - xy, \frac{y^2}{2} - e^z, x^2 + y^2 \right)$, determinare il flusso di F attraverso la porzione della superficie $x^2 + y^2 = z$ contenuta nel semispazio $z \leq 9$.

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2

Corso di laurea in Matematica

4 Luglio 2016

Nome e cognome (in stampatello):

Numero di Matricola:

1) (8 punti) Discutere la convergenza puntuale, assoluta, uniforme e totale della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \cos \frac{x^2}{\sqrt[4]{n}}\right).$$

2) (9 punti) Data la funzione

$$f(x, y) = x^2y + y \log(1 - x^2),$$

- (i) determinare e rappresentare il suo dominio;
- (ii) determinarne gli eventuali massimi e minimi relativi nel suo dominio;
- (iii) mostrare che il suo codominio è $(-\infty, +\infty)$;
- (iv) determinare massimo e minimo assoluto di f su $Q = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]^2$.

3) (9 punti) Data la curva $\gamma(t) = (3t^2 - 1, t^3 + t)$, $t \in [-1, 1]$, calcolare il baricentro della regione di piano racchiusa dalla curva e dal segmento che ne congiunge gli estremi.

(Facoltativo: + 4 punti) Mostrare che la porzione di γ contenuta nel semipiano $\{x \leq 0\}$ coincide con il grafico di una funzione strettamente convessa $x = g(y)$ con minimo in $y = 0$.

4) (9 punti) Sia $E = P \setminus C$, dove P è la semipalla di centro l'origine e raggio 1 contenuta nel semispazio $\{z \geq 0\}$ e C è il cono $\{z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

- (i) Calcolare il volume e il baricentro di E .
- (ii) Dato il piano $z = h$, scrivere l'equazione cui deve soddisfare h affinché tale piano divida E in due parti di ugual volume.

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2

Corso di laurea in Matematica

6 Settembre 2016

Nome e cognome (in stampatello):

Numero di Matricola:

1) (9 punti) Discutere la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(x^n \sqrt{n}) \right).$$

2) (7 punti) Determinare il massimo e il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = xy e^{-\sqrt{y^2 - x^2}}$$

nel dominio $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, |x| \leq y\}$.

3) (8 punti) Determinare la famiglia \mathcal{E} di tutte le funzioni $a(x, y) \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tali che la forma differenziale

$$\omega = a(x, y) dx + \left(2xy + (1 + y)e^{x^2 + y} \right) dy$$

risulti essere esatta. Fissato un qualsiasi coefficiente $a \in \mathcal{E}$ calcolare il corrispondente insieme delle primitive di ω .

4) (9 punti) Sia Σ la superficie di equazioni parametriche $\{(uv, u + v, u - v) : u^2 + v^2 \leq 4\}$.

Si determini:

(i) il piano tangente α alla superficie Σ nel punto $(-1, 0, 2)$;

(ii) il baricentro del solido delimitato dalla superficie cilindrica

$\left\{ (x, y, z) : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \right\}$ e dai piani $z = 0$ e α (determinato al punto precedente).

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2

Corso di laurea in Matematica

8 Novembre 2016

Nome e cognome (in stampatello):

Numero di Matricola:

1) (9 punti) Discutere la continuità e la differenziabilità della seguente funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq -1 \text{ oppure se } (x, y) = (0, 0), \\ \frac{x^3 y(1+x) \log(1+x)}{x^4 + y^4} & \text{altrove.} \end{cases}$$

2) (8 punti) Determinare il massimo e il minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = x^2 e^{-y} + y^2 e^{-x}$$

nel quadrato $[-2, 2] \times [-2, 2]$.

3) (8 punti) Data la forma differenziale

$$\frac{xy}{(1+x^2)^2} dx + \frac{x^2 - z^2}{2(1+x^2+z^2+x^2z^2)} dy - \frac{yz}{(1+z^2)^2} dz,$$

calcolarne la primitiva che in $(3, 5, 1)$ vale 0.

4) (8 punti) Dato $a > 0$, sia D la regione del piano compresa fra gli assi cartesiani e la curva

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}, x \geq 0, y \geq 0 \right\}.$$

Determinare il volume del dominio $T \subset \mathbb{R}^3$ ottenuto ruotando D di un giro completo intorno all'asse y e l'area della superficie ∂T .

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2

Corso di laurea in Matematica

24 Gennaio 2017

Nome e cognome (in stampatello):

Numero di Matricola:

1) (9 punti) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-(x^2+x)n}.$$

Detta f la somma di tale serie, provare che

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0.$$

2) (8 punti) Calcolare il minimo e il massimo assoluto della funzione $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ sulla superficie sferica di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

3) (8 punti) Calcolare l'integrale della forma differenziale

$$\frac{y}{1+xy} dx + \left(\frac{x}{1+xy} + \frac{x}{y} \right) dy$$

sulla curva $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in [0, 1]$, orientata nel verso delle x crescenti.
(Sugg.: Si osservi che la forma differenziale

$$\frac{y}{1+xy} dx + \frac{x}{1+xy} dy$$

è esatta)

4) (8 punti) Calcolare

$$\iint_D \log\left(\frac{y^2}{x}\right) dx dy,$$

dove $D = \{(x, y) : x \leq y^2 \leq 2x, 1 \leq xy \leq 2\}$.

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2

Corso di laurea in Matematica

20 Febbraio 2017

Nome e cognome (in stampatello):

Numero di Matricola:

1) (9 punti) Al variare del parametro $\alpha > 0$ studiare continuità e differenziabilità della funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - e^{y^5}}{(x^2 + y^4)^\alpha} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

2) (9 punti) Sia

$$f(x, y) = (x^2 + 9y^2 - 9)(x^2 - y^2 - 9),$$

determinare il segno di f e la natura dei suoi punti critici.

Sia $b > \frac{3}{2}$, si considerino gli insiemi

$$\mathcal{I} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \leq 9\} \quad \text{e} \quad \mathcal{I}_b = \mathcal{I} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq b\},$$

calcolare il minimo e il massimo assoluto di f su \mathcal{I}_b e l'estremo inferiore e superiore di f su \mathcal{I} .

3) (8 punti) Sia $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \geq 0, (x^2 + y^2)^3 \leq 8x^2y^2\}$ e T il dominio di \mathbb{R}^3 ottenuto ruotando D di un angolo piatto intorno all'asse y . Determinare il volume del dominio T e la tangente alla curva ∂D nel punto $(-1, 1)$.

4) (7 punti) Siano $\beta > 0$, $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y) = xy^4 \arctan(xy) + \frac{1}{(x^2 + y^2)^\beta}.$$

Calcolare al variare di β

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{C_n} f(x, y) \, dx dy,$$

dove $C_n := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

(3 punti) Posto $E_n = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \setminus \{(x, y) : 4n^2x^2 + n^2y^2 \leq 1, n^2x^2 + 4n^2y^2 \leq 1\}$, si osservi che si ha $C_n \subset E_n \subset C_{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Se ne deduca che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{E_n} f(x, y) \, dx dy = L.$$

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2

Corso di laurea in Matematica

8 Maggio 2017

Nome e cognome (in stampatello):

Numero di Matricola:

1) (9 punti) Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\sqrt{n}}{x^n + n^2},$$

al variare di $x \in [0, +\infty)$.

Detta f la somma di tale serie, provare che f è strettamente crescente in un intorno destro di 0.

2) (10 punti) Data la funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + 4y^2)^\alpha} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

(i) determinare tutti i valori del parametro reale α per cui f ammette massimi e minimi assoluti sull'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\}$;

(ii) nel caso $\alpha = \frac{1}{2}$ determinare gli eventuali massimi e minimi assoluti di f su E ;

(iii) risolvere uno a scelta dei seguenti due punti:

(a) determinare $\inf_{\mathbb{R}^2} f$ e $\sup_{\mathbb{R}^2} f$, nel caso $\alpha = \frac{1}{2}$,

(b) determinare $\inf_E f$ e $\sup_E f$, al variare del parametro α .

3) (9 punti) Dati $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, si consideri la forma differenziale

$$\omega = \frac{ax + by}{x^2 + y^2} dx + \frac{cx + dy}{x^2 + y^2} dy,$$

(i) dopo aver determinato le relazioni che devono verificare a, b, c e d per essere ω chiusa, calcolare $\int_\gamma \omega$ (per la corrispondente forma differenziale ω), dove γ è la circonferenza unitaria di centro l'origine;

(ii) determinare le relazioni che devono verificare a, b, c e d in modo che la forma differenziale ω sia esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e calcolarne la primitiva che in $(0, 1)$ vale 0 (Sugg.: dedurre dal punto (i) le relazioni "necessarie" su a, b, c e d).

4) (8 punti) Sia S la porzione della superficie sferica di centro l'origine e raggio 1 compresa fra i piani $z = 0$ e $z = \frac{1}{2}$. Calcolare

$$\int_S x^2 z \, d\sigma.$$

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2

Corso di laurea in Matematica

8 Giugno 2017

Nome e cognome (in stampatello):

Numero di Matricola:

1) (9 punti) Al variare del parametro reale $\alpha \geq 0$ studiare continuità e differenziabilità della funzione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin^2(xy)}{(x^6 + y^2)^\alpha} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

2) (8 punti) Calcolare gli eventuali punti di minimo e massimo relativi e assoluti in tutto il piano della funzione $f(x, y) = x^2 e^{-3\sqrt[3]{x^2+y^2}}$.

3) (8 punti) Sia S la superficie grafico della funzione $f(x, y) = x^2 y^2$ definita nel cerchio di centro l'origine e raggio 1. Sia γ il bordo di tale superficie orientato in senso orario rispetto ad un osservatore posto nell'origine degli assi e con la testa rivolta verso il semiasse positivo delle z . Calcolare

$$\int_{\gamma} \frac{y}{x^2 + y^2 + 1} dx - \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} dy + \frac{z}{x^2 + y^2 + 1} dz.$$

4) (9 punti) Sia $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 1, z \geq 0\}$. Calcolare:

(i) il baricentro di E ;

(ii) $\iiint_E (9x^2 + 4(y - 3z)^2) dx dy dz$.

(Sugg.: Si può effettuare il cambio di variabili in coordinate ellittiche-polari nello spazio)

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2

Corso di laurea in Matematica

20 Luglio 2017

Nome e cognome (in stampatello):

Numero di Matricola:

1) (9 punti) Determinare la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log x)^{2n}}{n(n+1)}$$

e calcolarne la somma.

2) (9 punti) Sia $f(x, y) = xy^2 e^{-(2x^2+y^2)}$, determinare:

(i) la natura dei punti critici di f ;

(ii) l'estremo inferiore e superiore di f sul piano

(Suggerimento: si possono considerare, ad esempio, i quadrati $Q_r = [0, r]^2$, $r > 1$ contenuti nel primo quadrante).

3) (9 punti) Per $\varepsilon > 0$ l'ellisse di equazione

$$\frac{x^2}{(1+\varepsilon)^2} + y^2 = 1$$

contiene al suo interno il cerchio unitario e quindi ha lunghezza $L_\varepsilon > 2\pi$. Si calcoli

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{L_\varepsilon - 2\pi}{\varepsilon^2}$$

(Suggerimento: si sviluppi L_ε in serie di Taylor rispetto a ε).

4) (8 punti) Verificare che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} \frac{e^y}{4+x^2} dx dy = +\infty,$$

dove $D_n := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq n, 0 \leq x \leq e^{-|y|}\}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$

(Suggerimento: si può calcolare il limite per confronto, ad esempio, dopo aver

provato che $\iint_{D_n \cap \{y \geq 0\}} \frac{e^y}{4+x^2} dx dy \geq \frac{n}{5}$, $\forall n \in \mathbb{N}$).

PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA 2

Corso di laurea in Matematica

13 Settembre 2017

Nome e cognome (in stampatello):

Numero di Matricola:

1) (9 punti) Studiare in $[-1, +\infty)$ la convergenza puntuale e uniforme della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{(x+1)^n}{e^{nx}}.$$

Denotato con A l'insieme in cui tale serie converge puntualmente e con $S(x)$ la sua somma, provare che

$$S(x) \leq \frac{x+1}{e^x - x - 1}, \quad \forall x \in A.$$

2) (8 punti) Determinare massimo e minimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = (y - x^3 - x^2)^3$$

sul dominio $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x + 2y \geq 0\}$.

(Facoltativo: +2 punti) Cosa si può dire sulla natura dei punti critici della funzione f nel piano?

3) (7 punti) Calcolare

$$\int_{\gamma} (z - y) dx + (x + z) dy - (x + y) dz,$$

dove γ è la porzione di curva contenuta nel primo ottante ottenuta dall'intersezione dell'ellissoide di equazione $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$ e del piano $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, orientata dalla scelta del punto $(0, 0, 2)$ come primo estremo.

4) (8 punti) Calcolare

$$\iint_D (x^2 - y^2) dx dy,$$

dove $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 4, x - y \leq 0\}$.