QUALCHE ESERCIZIO SUL PRINCIPIO DI INDUZIONE MATEMATICA

DOTT. G. DI MEGLIO

Introduzione

Ricordiamo che il:

Principio d'Induzione Matematica (PIM)
Sia $K \subseteq \mathbb{N}$.
Se:

(1) $1 \in K$ *e*

(2) per ogni $n \in K$ *risulta* $n + 1 \in K$,

allora $K = \mathbb{N}$.

è una delle proprietà/assiomi che individuano l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$. Come mostrato a lezione, il PIM può essere usato in vari modi per dimostrare teoremi riguardanti i numeri naturali: gli eserczi proposti di seguito servono a prendere un po' di dimestichezza con tale strumento.

1. Esercizi

`Esercizio 1:` Dimostrare che la disuguaglianza:

$$3^n \geq n^2 \tag{1}$$

vale per ogni $n \in \mathbb{N}$.

`Esercizio 2:` Mostrare che le uguaglianze:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}\, n\, (n+1) \tag{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}\, n\, (n+1)\, (2n+1) \tag{3}$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{1}{2}\, n\, (n+1)\right)^2 \tag{4}$$

valgono per ogni $n \in \mathbb{N}$.

`Esercizio 3 (Somma di una progressione geometrica):` Provare che, comunque si fissi il numero $q \neq 1$, risulta:

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} \tag{5}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Date: 8 ottobre 2014.

`Esercizio 4 (Disuguaglianza di Bernoulli):` Mostrare che, per ogni numero $n \in \mathbb{N}$, comunque si scelgano n numeri reali $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq -1$ aventi lo stesso segno[1] vale la disuguaglianza:

$$(1 + x_1)\ (1 + x_2)\ \cdots\ (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n\ . \tag{6}$$

Dalla (6) ricavare la classica *disuguaglianza di Bernoulli*:

$$(1 + x)^n \geq 1 + n\ x\ , \tag{7}$$

ove $x \geq -1$.

`Esercizio 5:` Analogamente, mostrare che, per ogni numero naturale n, comunque si scelgano n numeri reali $0 \leq x_1, x_2, \ldots, x_n \leq 1$ vale la disuguaglianza:

$$(1 - x_1)\ (1 - x_2)\ \cdots\ (1 - x_n) \leq \frac{1}{1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n}\ . \tag{8}$$

Dalla (8) ricavare la *disuguaglianza di tipo Bernoulli*:

$$(1 - x)^n \leq \frac{1}{1 + n\ x}\ , \tag{9}$$

in cui $0 \leq x \leq 1$.
Provare, inoltre, che per $0 < x < 1$ nella (9) vale sempre la disuguaglianza stretta.

2. Problemi

`Problema 1:` Trovare una formula che fornisca il valore del prodotto:

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\ \left(1 - \frac{1}{9}\right)\ \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \tag{10}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ e dimostrarne la validità per induzione.

`Problema 2:` Siano α, β, d e q numeri reali fissati.
Consideriamo le applicazioni $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definite in maniera ricorsiva[2] come segue:

$$\begin{cases} a(1) = \alpha \\ a(n+1) = a(n) + d & , \text{per } n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{11}$$

$$\text{e} \qquad \begin{cases} b(1) = \beta \\ b(n+1) = q\ b(n) & , \text{per } n \in \mathbb{N} \end{cases}\ . \tag{12}$$

Individuare le leggi di assegnazione *esplicite* di a e b e dimostrarne la validità usando il Principio d'Induzione.

`Problema 3:` Sia $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ la funzione definita in maniera ricorsiva come segue:

$$\begin{cases} a(1) = \frac{1}{2} \\ a(n+1) = \frac{1}{2 - a(n)} & , \text{per } n \in \mathbb{N} \end{cases}\ . \tag{13}$$

---

[1] Cioé o tutti ≥ 0 oppure tutti ≤ 0

[2] Si dice che una funzione f avente dominio $\mathbb{N}$ è *definita in maniera ricorsiva* quando, al posto di specificare la legge di assegnazione $n \mapsto f(n)$, vengono assegnati il valore $f(1)$ ed una regola per calcolare il valore di $f(n+1)$ a partire da quello di $f(n)$.
È immediato intuire che, una volta assegnati $f(1)$ e la regola che consente di calcolare $f(n+1)$ partendo da $f(n)$, rimangono determinati *tutti* i valori assunti dalla funzione: infatti, da $f(1)$ è possibile calcolare $f(2) = f(1+1)$; conoscendo $f(2)$ è possibile calcolare $f(3) = f(2+1)$; partendo da $f(3)$ è possibile calcolare $f(4) = f(3+1)$; etc... Il lettore attento noterà che la possibilità di dare una definizione in maniera ricorsiva si basa sulla validità del Principio d'Induzione.

Dimostrare che le proprietà:

$$a(n) < 1 \tag{14}$$

$$a(n) \geq \frac{1}{2} \tag{15}$$

$$a(n+1) > a(n) \tag{16}$$

valgono per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Inoltre, determinare una formula *esplicita* che fornisca la legge di assegnazione di a e dimostrarne la validità per induzione.

`Problema 4:` Dimostrare la seguente affermazione:

> Principio del Buon Ordinamento: Ogni sottoinsieme non vuoto contenuto in $\mathbb{N}$ è dotato di minimo; in altri termini, se $T \subseteq \mathbb{N}$ è $\neq \varnothing$, allora esiste un $t' \in T$ tale che:
>
> $$\forall t \in T, \quad t' \leq t\ .$$

`Problema 5 (di G. Polya):` Il seguente ragionamento induttivo:

> Vogliamo dimostrare che se esiste un gatto nero, allora tutti i gatti sono neri.
> Cominciamo col mostrare che, per ogni numero naturale n, vale la seguente proprietà:
>
> $$\mathcal{P}(n) = \text{“gli insiemi di } n \text{ gatti che contengono almeno un gatto nero sono costituiti da tutti gatti neri”}\ .$$
>
> Facciamo induzione su n.
>
> - Per $n = 1$, $\mathcal{P}(1)$ è evidentemente vera. Ciò costituisce la *base dell'induzione.*
>
> - Per verificare il *passo induttivo* dobbiamo mostrare che se è vera $\mathcal{P}(n)$ (*ipotesi induttiva*) allora è vera anche $\mathcal{P}(n+1)$ (*tesi induttiva*), ossia che se tutti gli insiemi di n gatti che contengono almeno un gatto nero sono costituiti da tutti gatti neri, allora anche gli insiemi di $n+1$ gatti che contengono almeno un gatto nero sono costituiti da tutti gatti neri.
>   Sia G un insieme di $n+1$ gatti, diciamoli $g_1, g_2, \ldots, g_n, g_{n+1}$, contenente almeno un gatto nero; senza ledere la generalità, possiamo supporre che g_1 sia un gatto nero. I due sottoinsiemi $G - \{g_2\}$ e $G - \{g_3\}$ sono insiemi di n gatti e contengono g_1 che è nero: ne consegue, per *ipotesi induttiva*, che gli insiemi $G - \{g_2\}$ e $G - \{g_3\}$ sono costituiti da tutti gatti neri; ciò implica che i gatti g_2, g_3, ..., g_{n+1} sono neri e, poiché g_1 pure è nero, tutti i gatti contenuti in G sono effettivamente neri.
>
> Acquisito ciò, concludiamo che vale quanto affermato all'inizio: infatti, l'esistenza di almeno un gatto nero è certa (se ne trovano parecchi in giro!) e ciò consente di applicare la $\mathcal{P}(n)$ iterativamente per ogni n e concludere che tutti i gatti sono neri.

è evidentemente sbagliato, poiché giunge ad una conclusione che ognuno può smentire (semplicemente esibendo un gatto tigrato). Dov'è l'errore?

3. Soluzioni agli Esercizi

Soluzione dell'`Esercizio 1`. Sia K l'insieme dei numeri naturali per cui la (1) è valida, cioè:

$$K = \{n \in \mathbb{N} : \; 3^n > n^2\} \; ;$$

risolvere l'esercizio vuol dire mostrare che $K = \mathbb{N}$.
Usiamo il PIM. Per prima cosa notiamo che $3^1 = 3 > 1 = 1^2$, cosicché $1 \in K$; d'altro canto si ha pure $3^2 = 9 > 4 = 2^2$, ergo è anche $2 \in K$. Ciò costitusce una buona *base per l'induzione.*
Per il *passo induttivo* ci basta mostrare che se $n \in K$, ossia se è soddisfatta l'*ipotesi induttiva* $3^n > n^2$, allora è anche $n+1 \in K$, cioé è vera la *tesi induttiva* $3^{n+1} > (n+1)^2$; inoltre, dato che sappiamo già che $2 \in K$ per ispezione diretta, possiamo limitarci a mostrare che il passo induttivo è valido per $n \geq 2$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} 3^{n+1} &= \underbrace{3^n}_{>n^2} \cdot 3 \\ &\geq 3\; n^2 \end{aligned}$$

e, conseguentemente, per acquisire la tesi induttiva basta mostrare che per $n \geq 2$ vale la disuguaglianza:

$$3\; n^2 > (n+1)^2 \; :$$

infatti, valendo tale disuguaglianza, avremmo $3^{n+1} \geq 3n^2 \geq (n+1)^2$ da cui discende la tesi (per la proprietà transitiva della relazione $\geq$). Una semplice manipolazione algebrica (*completamento del quadrato*) mostra che:

$$\begin{aligned} 3\; n^2 - (n+1)^2 &= 2\; n^2 - 2\; n - 1 \\ &= 2\; \left(n^2 - n\right) - 1 \\ &= 2\; \Big(\underbrace{n^2 - n + \frac{1}{4}}_{=(n-1/2)^2} - \frac{1}{4}\Big) - 1 \\ &= 2\; \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} \; ; \end{aligned}$$

ma si ha:

$$\begin{aligned} n \geq 2 \quad &\Rightarrow \quad n - \frac{1}{2} \geq 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ &\Rightarrow \quad \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{9}{4} \\ &\Rightarrow \quad 2\; \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 2\; \frac{9}{4} = \frac{9}{2} \\ &\Rightarrow \quad 2\; \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{2} \geq \frac{9}{2} - \frac{3}{2} = 3 \end{aligned}$$

e dunque se $n \geq 2$ si ha:

$$3\; n^2 - (n+1)^2 \geq 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad 3\; n^2 > (n+1)^2 \; ,$$

come volevamo. □

Soluzione dell'`Esercizio 2`. *Proviamo la* (2). Sia K l'insieme degli $n \in \mathbb{N}$ che soddisfano la (2), cioé:

$$K = \left\{ n \in \mathbb{N} : \; 1 + \cdots + n = \frac{1}{2}\; n\; (n+1) \right\} \; .$$

Dimostrare che la (2) è valida per ogni $n \in \mathbb{N}$ equivale a far vedere che $K = \mathbb{N}$; a tal uopo, usiamo il PIM.
Evidentemente $1 \in K$ e ciò costituisce una buona *base per l'induzione.*
Per dimostrare il *passo induttivo* mostriamo che dall'ipotesi $n \in K$, ossia dal verificarsi che $1+\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1)$, segue che $n+1 \in K$, ovvero che $1+\cdots+(n+1) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} 1+\cdots+(n+1) &= \underbrace{1+\cdots+n}_{=1/2\ n\ (n+1)} + (n+1) \\ &= \frac{1}{2}\ n\ (n+1) + (n+1) \\ &= (n+1)\ \left(\frac{n}{2}+1\right) \\ &= (n+1)\ \frac{n+2}{2} \\ &= \frac{1}{2}\ (n+1)\ (n+2) \end{aligned}$$

che è quanto chiedevamo. Quindi $K = \mathbb{N}$ e la (4) è dimostrata.

Proviamo la (3). Come prima, poniamo:

$$K = \left\{ n \in \mathbb{N} :\ 1^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{6}\ n\ (n+1)\ (2n+1) \right\}$$

e notiamo che provare la validità di (3) per ogni $n \in \mathbb{N}$ equivale a dimostrare che $K = \mathbb{N}$, cosa che faremo usando il PIM.
Evidentemente $1 \in K$ e ciò costituisce una buona *base per l'induzione.*
Per il *passo induttivo*, mostriamo che da $n \in K$, ossia dall'uguaglianza $1^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, segue che anche $n+1 \in K$, cioé che $1^2+\cdots+(n+2)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} 1^2+\cdots+(n+1)^2 &= \underbrace{1^2+\cdots+n^2}_{=\frac{1}{6}\ n\ (n+1)\ (2n+1)} + (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}\ n\ (n+1)\ (2n+1) + (n+1)^2 \\ &= (n+1)\ \left[\frac{n\ (2n+1)}{6} + (n+1)\right] \\ &= (n+1)\ \frac{n\ (2n+1)+6(n+1)}{6} \\ &= (n+1)\ \frac{2n^2+7n+6}{6} \\ &= (n+1)\ \frac{2n^2+4n+3n+6}{6} \\ &= (n+1)\ \frac{2n(n+2)+3(n+2)}{6} \\ &= (n+1)\ \frac{(n+2)(2n+3)}{6} \end{aligned}$$

come volevamo. Perciò $K = \mathbb{N}$ e la (4) è dimostrata.

Proviamo la (4). Come sopra, posto:

$$K = \left\{ n \in \mathbb{N} :\ 1^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{1}{2}\ n\ (n+1)\right)^2 \right\},$$

osserviamo ch dimostrare valida la (4) per ogni naturale n è del tutto equivalente a provare che $K = \mathbb{N}$, cosa che possiamo fare usando il PIM.
Evidentemente $1 \in K$ e questo costituisce una buona *base per l'induzione.*
Per il *passo induttivo*, proviamo che dall'*ipotesi induttiva* $1^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{1}{2} n(n+1)\right)^2$, ossia da $n \in K$, segue necessariamente la *tesi induttiva* $1^3 + \cdots + (n+1)^3 = \left(\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\right)^2$, ovvero che $n+1 \in K$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} 1^3 + \cdots + (n+1)^3 &= \underbrace{1^3 + \cdots + n^3}_{=\left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2} + (n+1)^3 \\ &= \left(\frac{1}{2}\, n\, (n+1)\right)^2 + (n+1)^3 \\ &= \frac{1}{4}\, n^2\, (n+1)^2 + (n+1)^3 \\ &= (n+1)^2 \left[\frac{n^2}{4} + (n+1)\right] \\ &= (n+1)^2\, \frac{n^2 + 4n + 4}{4} \\ &= (n+1)^2\, \frac{(n+2)^2}{4}\ , \end{aligned}$$

che è quanto volevamo. Pertanto $K = \mathbb{N}$ e la (4) è dimostrata. □

Soluzione dell'`Esercizio 3`. La (5) è vera per $n = 1$, poiché in tal caso essa si riduce all'identità:

$$1 = \frac{\cancel{1 - q^1}}{\cancel{1 - q}} = 1\ ;$$

ciò costituisce una buona *base per l'induzione.*
Per il *passo induttivo*, mostriamo che dall'*ipotesi induttiva* $1 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$ segue necessariamente la *tesi induttiva* $1 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} 1 + \cdots + q^n &= \underbrace{1 + \cdots + q^{n-1}}_{=\frac{1-q^n}{1-q}} + q^n \\ &= \frac{1 - q^n}{1 - q} + q^n \\ &= \frac{1 - \cancel{q^n} + \cancel{q^n} - q^{n+1}}{1 - q} \\ &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \end{aligned}$$

come volevamo. Pertanto la validità della (5) rimane provata per induzione. □

Soluzione dell'`Esercizio 4`. *Dimostriamo la* (6). Dobbiamo far vedere che l'insieme:

$$K = \Big\{ n \in \mathbb{N} :\ \forall x_1, \cdots, x_n \geq -1 \text{ aventi ugual segno,} \\ (1 + x_1) \cdots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + \cdots + x_n \Big\}$$

coincide con $\mathbb{N}$; perciò usiamo il PIM.
Evidentemente $1 \in K$: infatti, per $n = 1$, comunque si fissi $x_1 \geq -1$ si ottiene la disuguaglianza:

$$1 + x_1 \geq 1 + x_1\ ,$$

la quale è vera. Ciò è una buona *base per l'induzione*.
Il *passo induttivo* chiede di dimostrare che da $n \in K$, ossia da:

$$\forall x_1, \cdots, x_n \geq -1 \text{ d'ugual segno, } (1+x_1)\cdots(1+x_n) \geq 1 + x_1 + \cdots + x_n \ ,$$

segue necessariamente $n+1 \in K$, cioé:

$$\forall x_1, \cdots, x_{n+1} \geq -1 \text{ d'ugual segno, } (1+x_1)\cdots(1+x_{n+1}) \geq 1 + x_1 + \cdots + x_{n+1} \ .$$

Fissiamo ad arbitrio $n+1$ numeri $x_1, \cdots, x_{n+1} \geq -1$ d'ugual segno: essendo gli $x_1, \cdots, x_{n+1}$ o tutti ≥ 0 o tutti ≤ 0, il prodotto $x_{n+1}\ (x_1 + \cdots + x_n)$ è ≥ 0, quindi usando l'*ipotesi induttiva* troviamo:

$$\begin{aligned}
(1+x_1)\cdots(1+x_{n+1}) &= \underbrace{(1+x_1)\cdots(1+x_n)}_{\geq 1+x_1+\cdots+x_n}\ (1+x_{n+1}) \\
&\geq (1+x_1+\cdots+x_n)\ (1+x_{n+1}) \\
&= 1+x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}\ (1+x_1+\cdots+x_n) \\
&= 1+x_1+\cdots+x_n+x_{n+1} \\
&\quad + \underbrace{x_{n+1}\ (x_1+\cdots+x_n)}_{\geq 0} \\
&\geq 1+x_1+\cdots+x_n+x_{n+1} \ ;
\end{aligned}$$

per la transititvità di $\geq$ la *tesi induttiva* segue, e con essa la validità della (6).

Dimostriamo la (7). Fissato $n \in \mathbb{N}$, nella (6) possiamo fissare $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = x \geq -1$ ed ottenere:

$$(1+x)^n = \underbrace{(1+x)\cdots(1+x)}_{n \text{ fattori}} \geq 1 + \underbrace{x+\cdots+x}_{n \text{ addendi}} = 1 + n\ x$$

che è la disuguaglianza desiderata.[3] □

Soluzione dell'`Esercizio` 5. *Dimostriamo la* (8). Occorre e basta far vedere che l'insieme:

$$K = \left\{ n \in \mathbb{N} : \ \forall 0 \leq x_1, \ldots, x_n \leq 1,\ (1-x_1)\cdots(1-x_n) \leq \frac{1}{1+x_1+\cdots x_n} \right\}$$

coincide con $\mathbb{N}$: pertanto useremo il Principio d'Induzione.
Per verificare che $1 \in K$ dobbiamo mostrare che vale la seguente proposizione:

$$\forall 0 \leq x_1 \leq 1,\ 1 - x_1 < \frac{1}{1+x_1} \ .$$

A tal uopo, fissiamo ad arbitrio un numero x_1 in modo che soddisfi $0 \leq x_1 \leq 1$: dalle disuguaglianze appena scritte segue che $0 \leq x_1^2 \leq 1$ e dunque che $-1 \leq -x_1^2 \leq 0$, per cui:

$$0 \leq 1 - x_1^2 \leq 1 \ ;$$

dalla fattorizzazione $1 - x_1^2 = (1-x_1)(1+x_1)$, dalla positività del numero $1 + x_1$ e dalla compatibilità della relazione d'ordine con il prodotto segue che:

$$(1-x_1)(1+x_1) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad 1 - x_1 \leq \frac{1}{1+x_1} \ ,$$

come volevamo. Stante l'arbitrarietà nella scelta di x_1, possiamo ben dire che il numero $n = 1$ gode della proprietà che esprime l'appartenenza a K, perciò $1 \in K$: ciò costituisce una buona *base per l'induzione*.

[3] Il lettore volenteroso potrebbe fornire una dimostrazione della disuguaglianza di Bernoulli basata anch'essa sul PIM che non sfrutti la (6).

Per mostrare il *passo induttivo* dobbiamo provare che il verificarsi per n della proprietà:

$$\forall 0 \leq x_1, \dots, x_n \leq 1,\ (1-x_1)\cdots(1-x_n) \leq \frac{1}{1+x_1+\cdots+x_n}$$

(*ipotesi induttiva*) implica il verificarsi per $n+1$ della proprietà:

$$\forall 0 \leq x_1, \dots, x_{n+1} \leq 1,\ (1-x_1)\cdots(1-x_{n+1}) \leq \frac{1}{1+x_1+\cdots+x_{n+1}}$$

(*tesi induttiva*). Fissati ad arbitrio $n+1$ numeri $x_1, \dots, x_{n+1}$ soddisfacenti le disuguaglianze $0 \leq x_1, \dots, x_{n+1} \leq 1$ abbiamo:

$$\begin{aligned} (1-x_1)\cdots(1-x_{n+1}) &= \underbrace{(1-x_1)\cdots(1-x_n)}_{\leq \frac{1}{1+x_1+\cdots+x_n}}(1-x_{n+1}) \\ &\leq \frac{1-x_{n+1}}{1+x_1+\cdots+x_n}\ , \end{aligned}$$

e ciò importa che basta provare la maggiorazione:

$$\frac{1-x_{n+1}}{1+x_1+\cdots+x_n} \leq \frac{1}{1+x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}}$$

per concludere (difatti, se la precedente fosse valida, avremmo $1-x_1)\cdots(1-x_{n+1}) \leq \frac{1-x_{n+1}}{1+x_1+\cdots+x_n} \leq \frac{1}{1+x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}}$, da cui la tesi induttiva per la proprietà transitiva della disugualianza). Ma, tenendo presente che $0 \leq x_1, \dots, x_{n+1} \leq 1$, abbiamo:

$$\begin{aligned} 1 \geq \frac{1}{1+x_1+\cdots+x_{n+1}} \quad &\Rightarrow \quad x_{n+1} \geq \frac{x_{n+1}}{1+x_1+\cdots+x_{n+1}} \\ &\Rightarrow \quad -x_{n+1} \leq -\frac{x_{n+1}}{1+x_1+\cdots+x_{n+1}} \\ &\Rightarrow \quad 1-x_{n+1} \leq 1-\frac{x_{n+1}}{1+x_1+\cdots+x_{n+1}} \\ &\Rightarrow \quad 1-x_{n+1} \leq \frac{1+x_1+\cdots+x_n+\cancel{x_{n+1}}-\cancel{x_{n+1}}}{1+x_1+\cdots+x_{n+1}} \\ &\Rightarrow \quad 1-x_{n+1} \leq \frac{1+x_1+\cdots+x_n}{1+x_1+\cdots+x_{n+1}} \\ &\Rightarrow \quad \frac{1-x_{n+1}}{1+x_1+\cdots+x_n} \leq \frac{1}{1+x_1+\cdots+x_{n+1}} \end{aligned}$$

come volevamo. Pertanto il Principio d'Induzione implica che $K = \mathbb{N}$, ossia che la (8) vale per ogni numero natuale n.

Dimostriamo la (9). Facendo nella (8) $x_1 = \cdots = x_n = x$, con $0 \leq x \leq 1$, troviamo che la disuguaglianza:

$$(1-x)^n = \underbrace{(1-x)\cdots(1-x)}_{n \text{ volte}} \leq \frac{1}{1+\underbrace{x+\cdots+x}_{n \text{ addendi}}} = \frac{1}{1-n\,x}$$

vale per ogni indice n, come era chiesto.
Infine, il fatto che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, in (9) valga la disuguaglianza stretta $<$ non appena si scelga $0 < x < 1$ può essere dimostrato usando il PIM. $\square$

4. Soluzioni ai Problemi

Soluzione del `Problema 1`. Per comodità, chiamiamo $P(n)$ il prodotto in (10), i.e. poniamo:

$$P(n) = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) .$$

Facendo un po' di conto, troviamo:

$$\begin{aligned} P(1) &= \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} \\ P(2) &= \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{2}{3} \\ P(3) &= \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{5}{8} \\ P(4) &= \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \left(1 - \frac{1}{16}\right) \left(1 - \frac{1}{25}\right) = \frac{3}{5} \end{aligned}$$

e la sequenza di valori:

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto \frac{3}{4} \\ 2 &\mapsto \frac{2}{3} \\ 3 &\mapsto \frac{5}{8} \\ 4 &\mapsto \frac{3}{5} \end{aligned}$$

non sembrerebbe mostrare alcuna regolarità[4]... Tuttavia, riscrivendo i termini di posto pari con frazioni non ridotte ai minimi termini:

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto \frac{3}{4} \\ 2 &\mapsto \frac{4}{6} \\ 3 &\mapsto \frac{5}{8} \\ 4 &\mapsto \frac{6}{10} \end{aligned}$$

ci accorgiamo di una certa regolarità nell'andamento di numeratori e denominatori: invero, i numeratori 3, 4, 5 e 6 si ricavano dagli indici 1, 2, 3 e 4 sommando 2 (e.g., $6 = 4 + 2$), mentre i denominatori 4, 6, 8 e 10 si ricavano dagli indici 1, 2, 3 e 4 sommandovi 1 e moltiplicando per 2 (e.g., $10 = 2 \cdot (4 + 1)$). Pertanto la formula:

$$P(n) = \frac{n+2}{2\,(n+1)} \tag{17}$$

vale per $n = 1, 2, 3, 4$ e possiamo **congetturare** che essa sia, in effetti, valida per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Mostriamo che la nostra congettura è vera: per fare ciò occorre e basta dimostrare che l'insieme:

$$K = \left\{ n \in \mathbb{N} : \; P(n) = \frac{n+2}{2\,(n+1)} \right\} ,$$

[4] Infatti, i numeratori ed i denominatori prima diminuiscono, poi aumentano, poi diminuiscono di nuovo...

costituito da tutti i numeri naturali per cui vale la (17), coincide con $\mathbb{N}$.
Per quanto calcolato all'inizio, abbiamo $1, 2, 3, 4 \in K$ e ciò serve da ottima *base per l'induzione*.
Per il *passo induttivo*, dobbiamo mostrare che l'essere $P(n) = \frac{n+2}{2\ (n+1)}$ (ossia $n \in K$) implica l'essere $P(n+1) = \frac{n+3}{2\ (n+2)}$ (cioé $n+1 \in K$). Abbiamo:

$$\begin{aligned}
P(n+1) &= \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)\ \left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right) \\
&= \underbrace{P(n)}_{=\frac{n+2}{2(n+1)}}\ \left(1 - \frac{1}{(n+2)^2}\right) \\
&= \frac{\cancel{n+2}}{2\ (n+1)}\ \frac{(n+2)^2 - 1}{(n+2)^{\cancel{2}}} \\
&= \frac{1}{2\ (n+1)}\ \frac{\big((n+2) - 1\big)\ \big((n+2) + 1\big)}{n+2} \\
&= \frac{1}{2\ \cancel{(n+1)}}\ \frac{\cancel{(n+1)}\ (n+3)}{n+2} \\
&= \frac{n+3}{2\ (n+2)}
\end{aligned}$$

come volevamo. Perciò $K = \mathbb{N}$ e la (17) vale come formula per esprimere ogni prodotto $P(n)$. $\square$

Soluzione del `Problema` 2*.* Facendo un po' di calcoli, dalla (11) segue che:

$$\begin{aligned}
a(1) &= \alpha \\
a(2) &= \alpha + d \\
a(3) &= \alpha + 2\ d \\
a(4) &= \alpha + 3\ d\ ;
\end{aligned}$$

nei secondi membri notiamo una certa regolarità: infatti, i primi addendi non cambiano (rimanendo sempre uguali ad α), mentre nei secondi addendi i coefficienti 0, 1, 2 e 3 di d si ricavano dagli indici 1, 2, 3 e 4 sottraendo 1 (e.g., $3 = 4 - 1$).
Pertanto la formula:

$$a(n) = \alpha + (n-1)\ d \tag{18}$$

è certamente valida per $n = 1, 2, 3, 4$ e possiamo ragionevolmente **congetturare** che essa valga per ogni $n \in \mathbb{N}$.
Per provare la nostra congettura occorre e basta provare che l'insieme:

$$K = \{n \in \mathbb{N} :\ a(n) = \alpha + (n-1)\ d\}$$

coincide con tutto $\mathbb{N}$: perciò ragioniamo per induzione.
Chiaramente, il fatto che la (18) valga per $n = 1, 2, 3, 4$ ci dice che $1, 2, 3, 4 \in K$: ciò costituisce una buona *base per l'induzione*.
Dobbiamo ora mostrare il *passo induttivo* e cioé che dall'ipotesi $a(n) = \alpha + (n-1)d$ (equivalente a $n \in K$) segue necessariamente $a(n+1) = \alpha + n\ d$ (ossia $n+1 \in K$).

Usando la ricorrenza (11) abbiamo:

$$\begin{aligned} a(n+1) &= \underbrace{a(n)}_{=\alpha+(n-1)d} +d \\ &= \alpha + (n-1)\, d + d \\ &= \alpha + n\, d \end{aligned}$$

come volevamo. Pertanto $K = \mathbb{N}$ e la formula *esplicita* (18) vale per ogni n.

Analogamente, con un po' d'algebra, dalla (12) segue che:

$$\begin{aligned} b(1) &= \beta \\ b(2) &= \beta\, q \\ b(3) &= \beta\, q^2 \\ b(4) &= \beta\, q^3\ ; \end{aligned}$$

nei secondi membri notiamo una certa regolarità: infatti, mentre i primi fattori rimangono sempre gli stessi (ed uguali a β), gli esponenti delle potenze di q che figurano come secondi fattori, cioé q^0, q^1, q^2 e q^3, si ottengono a partire dagli indici 1, 2, 3 e 4 sottraendo 1.
Conseguentemente la formula:

$$b(n) = \beta\, q^{n-1} \tag{19}$$

vale per $n = 1, 2, 3, 4$ e possiamo ragionevolmente **congetturare** che essa valga in generale per ogni n.
La dimostrazione per induzione della (19) è lasciata al lettore. □

Soluzione del `Problema` 3. Innanzitutto, calcoliamo i primi valori assunti dalla funzione a definita dalla ricorrenza (13):

$$\begin{aligned} a(1) &= \frac{1}{2} \\ a(2) &= \frac{2}{3} \\ a(3) &= \frac{3}{4} \\ a(4) &= \frac{4}{5}\ ; \end{aligned}$$

dai conti appena fatti segue che le proprietà espresse dalle (14), (15) e (16) sono certamente verificate per $n = 1, 2, 3, 4$; ciò fornisce un'ottima *base per l'induzione* per la dimostrazione di tutte e tre tali proprietà.
Rimangono, quindi, da provare i *passi induttivi*...

Cominciamo a provare che dall'*ipotesi induttiva* $a(n) < 1$ segue la *tesi induttiva* $a(n+1) < 1$. Dato che $a(n) < 1$ implica $2 - a(n) > 1$, abbiamo:

$$\begin{aligned} a(n+1) &= \frac{1}{\underbrace{2-a(n)}_{>1}} \\ &< \frac{1}{1} \\ &= 1 red \end{aligned}$$

da cui l'asserto. Pertanto, il Principio d'Induzione garantisce che la (14) vale per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Passiamo adesso a provare che l'*ipotesi induttiva* $a(n) \geq \frac{1}{2}$ implica la *tesi induttiva* $a(n+1) \geq \frac{1}{2}$. Dato che $a(n) \geq \frac{1}{2}$ implica che $2 - a(n) \leq 2 - frac12 = \frac{3}{2}$, troviamo:

$$\begin{aligned} a(n+1) &= \frac{1}{\underbrace{2 - a(n)}_{\leq \frac{3}{2}}} \\ &\geq \frac{1}{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{3} \\ &\geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

da cui la tesi. Perciò, invocando il Principio d'Induzione concludiamo che la (15) è valida per tutti i naturali n.

Infine, proviamo che dall'*ipotesi induttiva* $a(n+1) > a(n)$ segue la *tesi induttiva* $a(n+2) > a(n+1)$. Poiché da $a(n+1) > a(n)$ segue $2 - a(n+1) < 2 - a(n)$ e dalla (15) segue $2 - a(n), 2 - a(n+1) > 0$, abbiamo:

$$\begin{aligned} a(n+2) &= \frac{1}{\underbrace{2 - a(n+1)}_{< 2 - a(n)}} \\ &> \frac{1}{2 - a(n)} \\ &= a(n+1) \end{aligned}$$

come volevamo. Quindi il PIM assicura la validità della (16) per ogni indice n.

Infine, dai calcoli effettuati all'inizio della *Soluzione* segue che la formula *esplicita*:

$$a(n) = \frac{n}{n+1} \tag{20}$$

vale per $n = 1, 2, 3, 4$; pertanto possiamo ragionevolmente **congetturare** che essa valga del tutto in generale.
Per provare tale congettura, procediamo per induzione.
Essendo la *base dell'induzione* già abbondantemente acquisita, passiamo direttamente al *passo induttivo*, cioé mostriamo che dall'*ipotesi induttiva* $a(n) = \frac{n}{n+1}$ segue la *tesi induttiva* $a(n+1) = \frac{n+1}{n+2}$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} a(n+1) &= \frac{1}{2 - \underbrace{a(n)}_{= \frac{n}{n+1}}} \\ &= \frac{1}{2 - \frac{n}{n+1}} \\ &= \frac{n+1}{2(n+1) - n} \\ &= \frac{n+1}{n+2} \end{aligned}$$

come volevamo; perciò il Principio d'Induzione assicura che il *guess* $a(n) = \frac{n}{n+1}$ vale per ogni numero $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Soluzione del `Problema` 4. Ragioniamo *per assurdo*, supponendo che il Principio del Buon Ordinamento non sia vero, cioé che esista un sottoinsieme non vuoto $T \subseteq \mathbb{N}$ non dotato di minimo.
In tal caso $1 \notin T$, perché altrimenti 1 sarebbe certamente il minimo di T[5]; ciò implica che:

$$\forall t \in T,\ 1 < t$$

perciò l'insieme dei minoranti "stretti" di T:

$$K = \{n \in \mathbb{N} :\ \forall t \in T,\ n < t\}$$

è non vuoto ed, in particolare, $1 \in K$.
Sia ora $n \in K$ e mostriamo che $n+1 \in K$. Se, *per assurdo*, non fosse $n+1 \in K$, esisterebbe un $\tau \in T$ tale che $n+1 \not< \tau$ e ciò, per il Principio di Tricotomia, implicherebbe $\tau \leq n+1$; poiché T non è dotato di minimo, esisterebbe certamente un numero $\vartheta \in T$ più piccolo di τ, sicché risulta:

$$\vartheta < \tau \leq n+1 \quad \Rightarrow \quad \vartheta < n+1\,;$$

d'altro canto, dato che $n \in K$ per *ipotesi induttiva*, si ha $n < \vartheta$ e dunque il numero ϑ soddisferebbe la catena di disuguaglianze:

$$n < \vartheta < n+1\,;$$

ma ciò è assurdo, poiché è ben noto che tra i due numeri naturali consecutivi n ed $n+1$ non è compreso alcun altro numero naturale! Conseguentemente dall'*ipotesi induttiva* $n \in K$ segue necessariamente $n+1 \in K$ e, dato che $1 \in K$, il Principio d'Induzione ci consente di affermare che $K = \mathbb{N}$.
Ma ciò è assurdo: infatti, essendo T non vuoto, possiamo scegliere almeno un elemento $\Theta \in T$; dato che $K = \mathbb{N}$ si avrebbe $\Theta \in K$ e dunque $\Theta < \Theta$, contro il Principio di Tricotomia!
Ne consegue che, non appena T è un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$, non può in alcun modo presentarsi l'eventualità che esso sia privo di minimo, e ciò implica la validità del Principio del Buon Ordinamento. $\square$

Soluzione del `Problema` 5. Il ragionamento è minato dal seguente errore: il *passo induttivo* nella dimostrazione della proposizione $\mathcal{P}(n)$ non funziona per $n = 1$. Infatti, la tecnica usata per la dimostrazione non si applica ad insiemi del tipo $G = \{g_1, g_2\}$, cioé ad insiemi formati da due soli gatti. $\square$

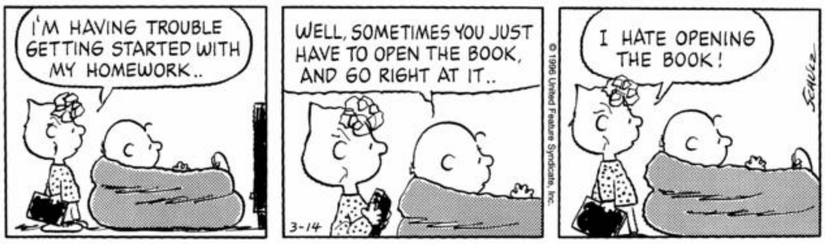

Figura 1. Sally Brown: un esempio da non imitare...

[5] Si ricordi che 1 è il numero naturale più piccolo!

Guglielmo Di Meglio, PhD
Università degli Studi di Napoli "Federico II"
Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli"
Complesso Universitario Monte Sant'Angelo
via Cintia, 80126,
Napoli – ITALY