

Soluzione delle equazioni algebriche di terzo grado

Metodo di François Viète/Cardano

Vincenzo LIPPIELLO

Sia data l'equazione di terzo grado

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \quad (1)$$

Essa si riconduce, applicando la seguente sostituzione (proposta da François Viète)

$$x = y - \frac{b}{3a}, \quad (2)$$

alla forma

$$y^3 + py + q = 0, \quad (3)$$

dove

$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} \quad (4)$$

e

$$q = \frac{d}{a} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{2b^3}{27a^3}, \quad (5)$$

Si ottiene così un'equazione nella forma (3) le cui soluzioni sono fornite dal metodo di Cardano:

$$y = u + v, \quad (6)$$

dove u e v sono le radici:

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \quad (7)$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \quad (8)$$

La formula per calcolare le soluzioni dell'equazione di terzo grado è quindi

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \quad (9)$$

Per il teorema fondamentale dell'algebra un'equazione di terzo grado deve avere 3 soluzioni, bisogna quindi valutare anche i risultati complessi delle radici. In particolare sarà necessario calcolare la quantità sotto le radici quadrate,

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}, \quad (10)$$

e verificare se è positiva o negativa.

Se $\Delta \geq 0$, si calcolano i due numeri **reali** u e v uguali a

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}}, \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}}, \quad (11)$$

le soluzioni dell'equazione saranno

$$y_1 = u + v \quad (12)$$

$$y_2 = u \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + v \cdot \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (13)$$

$$y_3 = u \cdot \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + v \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \quad (14)$$

Se $\Delta < 0$ bisognerà convertire il numero complesso

$$-\frac{q}{2} + i\sqrt{-\Delta} \quad (15)$$

nella forma trigonometrica $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ e le tre soluzioni dell'equazione saranno

$$y_1 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \cos\frac{\theta}{3} \quad (16)$$

$$y_2 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \cos\frac{\theta + 2\pi}{3} \quad (17)$$

$$y_3 = 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cdot \cos\frac{\theta + 4\pi}{3}. \quad (18)$$

Applicando infine la trasformazione (2) si troveranno le soluzioni della (1).