Voto

Cognome/Nome & No. Matricola

FONDAMENTI DI SISTEMI DINAMICI

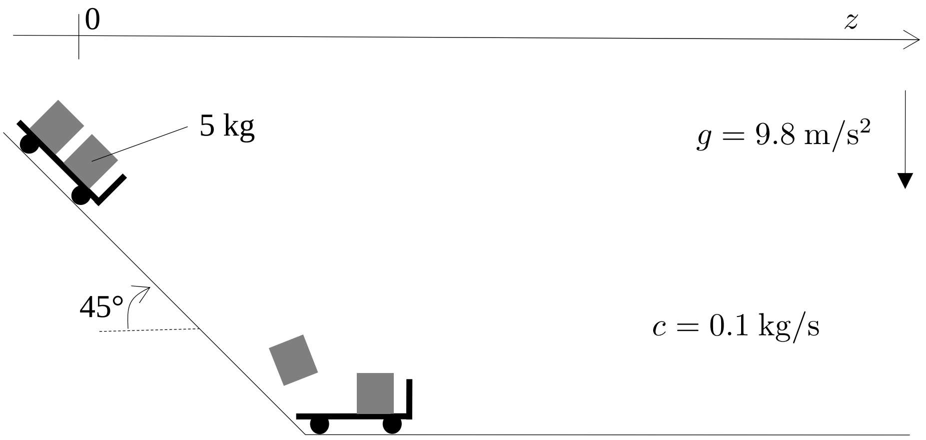
(Ing. Vincenzo LIPPIELLO — A.A. 2015–2016)

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni - II anno

PROVA DEL 11 GENNAIO 2016

Rispondere in maniera chiara e sintetica ai seguenti quesiti, indicando Cognome e Nome su ogni foglio manoscritto. La traccia, debitamente compilata, va consegnata insieme al compito svolto. Non è consentito consultare appunti o altro materiale. È assolutamente vietata ogni forma di collaborazione, pena l'annullamento della prova.

Si consideri il sistema illustrato in figura:



Il sistema è costituito da un carrello sul quale sono stati caricati due blocchi del peso di 5 kg ciascuno. Il carrello è inizialmente fermo sulla sommità di un piano inclinato con una pendenza di 45°. Si supponga che i freni del carrello vengano rilasciati all'istante $t = 0$. Per effetto della accelerazione di gravità g il carrello inizierà a muoversi fino a raggiungere la fine del piano inclinato, ovvero l'inizio di un tratto pianeggiante, in un tempo pari a $t = 3s$. Si supponga che il carrello sia soggetto ad una forza di attrito viscoso il cui coefficiente è pari a $c = 0.1$ kg/s. Si supponga inoltre che al passaggio tra il piano inclinato e il tratto pianeggiante il carrello perda uno dei blocchi su di esso caricati ma che preservi la velocità lungo la direzione di spostamento indicata come z. Si indichi con $x(t) = [z(t) \quad \dot{z}(t)]^T$ lo stato e con $y(t) = z(t)$ l'uscita.

a) Si fornisca un modello ISU sul sistema in tutte le sue fasi di moto. **[5 punti]**

b) Studiare i modi propri del sistema al variare del parametro $c \in [0, +\infty[$. **[3 punti]**

c) Calcolare il movimento nello stato del sistema durante la fase di moto sul piano inclinato. **[10 punti]**

d) Calcolare il movimento nell'uscita del sistema durante la fase di moto sul piano orizzontale operando esclusivamente nel dominio del tempo. **[10 punti]**

e) Calcolare la posizione finale raggiunta dal carrello e graficare l'andamento di $z(t)$. **[2 punti]**

SVOLGIMENTO
(Prova del 11/01/2016)

a) Il sistema in oggetto è assimilabile ad un sistema massa-smorzatore lungo la direzione di moto assegnata z. Detta m la massa del carrello, c il coefficiente di attrito viscoso e f è la forza agente sul carrello, l'equazione Newtoniana di moto del sistema è la seguente:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} = f.$$

Durante la fase di moto sul piano inclinato, suddetta forza è pari alla componente della forza peso lungo la direzione di moto assegnata $f = mg\sin(45°)\cos(45°) = \frac{1}{2}mg$, mentre è nulla durante la fase di moto sul piano orizzontale a causa delle reazioni vincolari.

Detta $x(t) = [z(t) \quad \dot{z}(t)]^T$ lo stato, $y(t) = z(t)$ l'uscita e $u(t)$ la forza in ingresso, un modello ISU del sistema è il seguente:

$$\begin{aligned} \dot{x_1}(t) &= x_2(t) \\ \dot{x_2}(t) &= -\frac{c}{m}x_2(t) + \frac{1}{m}u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}$$

In forma di stato

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{c}{m} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \quad 0]x(t) \end{aligned}$$

dove $c = 0.1$, $m = 10$, $u(t) = 49\ \delta_{-1}(t)$ e $x(0) = [0 \quad 0]^T$ durante la fase di moto lungo il piano inclinato ($0 \leq t \leq 3$), mentre $m = 5$, $u(t) = 0$ e stato iniziale $x(3)$ da determinare (certamente non nullo) durante la fase di moto lungo il piano orizzontale ($t \geq 3$).

b) I modi propri (o modi naturali) del sistema sono tutte le differenti funzioni del tempo che troviamo nella risposta in evoluzione libera del sistema, ovvero nella decomposizione spettrale della matrice di transizione del sistema.

Dall'analisi del polinomio caratteristico del sistema $p(\lambda) = \lambda(\lambda + \frac{c}{m})$ si evidenzia la presenza di due radici reali e distinte nel caso $c > 0$, rispettivamente $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -\frac{c}{m}$, mentre si avranno due radici coincidenti $\lambda = 0$ e nel caso $c = 0$ (assenza di attrito). Nel primo caso il sistema sarà dotato di due modi propri distinti $e^{\lambda_1 t} = 1$ e $e^{\lambda_2 t} = e^{-\frac{c}{m}t}$, essendo infatti la matrice della dinamica diagonalizzabile. L'analisi del secondo caso ($c = 0$) richiede un ulteriore approfondimento. La molteplicità algebrica dell'autovalore $\lambda = 0$ è pari a $\mu = 2$. Verifichiamo la corrispondente molteplicità geometrica:

$$\upsilon = \dim(\ker(A - \lambda I)) = 2 - \text{rango}(\text{A} - \lambda I) = 2 - \text{rango}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1 < \mu$$

La matrice della dinamica nel caso $c = 0$ non è quindi diagonalizzabile ma solo Jordanizzabile. Dalla teoria sappiamo che esiste una matrice non singolare T_J (che non è necessario calcolare) tale per cui

$$A_J = T_J A T_J^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

da cui si ricava

$$e^{A_J t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ricordandosi che $e^{At} = T_J^{-1} e^{A_J t} T_J$, i modi naturali saranno quindi le funzioni distinte del tempo presenti nella matrice $e^{A_J t}$, ovvero $e^{\lambda t} = 1$, $te^{\lambda t} = t$.

c) Durante la fase di moto lungo il piano inclinato il sistema in esame è il seguente:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.01 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \quad 0] x(t) \\ x(0) &= [0 \quad 0]^T \end{aligned}$$

con $u(t) = 49\ \delta_{-1}(t)$, valido per $0 \le t \le 3$.

Il movimento dello stato del sistema sarà puramente forzato, essendo nulla la condizione iniziale, con forzamento costante pari alla frazione della forza peso agente lungo al direzione di moto assegnata. Si può procedere al calcolo del movimento dello stato operando nel dominio di Laplace. Si proceda prima al calcolo della matrice delle risposte impulsive nello stato:

$$H(s) = (sI - A)^{-1} B = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s + 0.01 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} s + 0.01 & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}}{s(s + 0.01)} = \frac{0.1 \begin{bmatrix} 1 \\ s \end{bmatrix}}{s(s + 0.01)}$$

Quindi la risposta (forzata) nello stato sarà pari a

$$X(s) = H(s)U(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{0.1}{s(s + 0.01)} \\ \dfrac{0.1}{(s + 0.01)} \end{bmatrix} \frac{49}{s} = \begin{bmatrix} \dfrac{4.9}{s^2(s + 0.01)} \\ \dfrac{4.9}{s(s + 0.01)} \end{bmatrix}$$

Procedendo mediante l'anti-trasformata di Laplace, si otterrà il movimento desiderato nello stato nel dominio del tempo

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 490 \left(t - 100 \left(1 - e^{-\frac{t}{100}} \right) \right) \\ x_2(t) &= 490 \left(1 - e^{-\frac{t}{100}} \right) \end{aligned}$$

valido per $0 \le t \le 3$. Si ricordi che $y(t) = x_1(t)$.

d) Durante la fase di moto sul piano orizzontale il sistema in esame è il seguente:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.02 \end{bmatrix} x(t) \\ y(t) &= [1 \quad 0] x(t) \\ x(t_0) &= [21.8 \quad 14.5]^T \end{aligned}$$

valido per $t \ge t_0 = 3s$, dove lo stato iniziale è stato calcolato utilizzando l'espressione del movimento nello stato calcolato al punto precedente e la proprietà di continuità dello stato, così come specificato anche nella traccia. Si osservi che dopo 3s il carrello ha percorso 21.8 m ed ha raggiunto una velocità pari a 14.5 m/s.

Non essendo presente alcun forzamento, il sistema si trova in evoluzione libera. Il movimento nell'uscita potrà quindi essere determinato mediante la matrice di transizione del sistema $\Phi(t) = e^{At}$. Dal punto b) sappiamo che il sistema è dotato di due autovalori reali e distinti, rispettivamente $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -0.02$. Procediamo quindi alla diagonalizzazione della matrice della dinamica mediante il calco degli autovettori:

$(A - \lambda_1 I) v_1 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -0.02 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow v_{12} = 0, \forall v_{11}$, scegliamo $v_1 = [1 \quad 0]^T$

$(A-\lambda_2 I)v_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0.02 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 0.02v_{21} + v_{22} = 0$, scegliamo $v_2 = [-50 \quad 1]^T$

Possiamo quindi comporre l'inversa della matrice di trasformazione $T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -50 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow T = \begin{bmatrix} 1 & 50 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ed in conclusione, detta Λ la matrice degli autovalori, si può calcolare la matrice di transizione come segue:

$$\Phi(t) = e^{At} = T^{-1}e^{\Lambda t}T = \begin{bmatrix} 1 & -50 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-0.02t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 50 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 50(1-e^{-0.02t}) \\ 0 & e^{-0.02t} \end{bmatrix}$$

Il movimento in evoluzione libera nell'uscita sarà quindi pari a

$$\mathrm{y}(t) = \Psi(t-t_0)x(t_0) = C\Phi(t-t_0)x(t_0) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 50(1-e^{-0.02(t-t_0)}) \\ 0 & e^{-0.02(t-t_0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 21.8 \\ 14.5 \end{bmatrix}$$
$$= 746.8 - 725e^{-0.02(t-t_0)}$$

valido per $t \geq t_0 = 3s$.

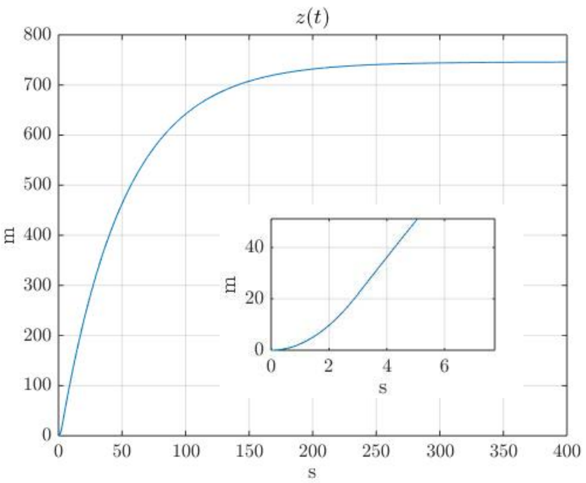
In conclusione, quindi, il movimento del carrello è espresso dalla seguente equazione:

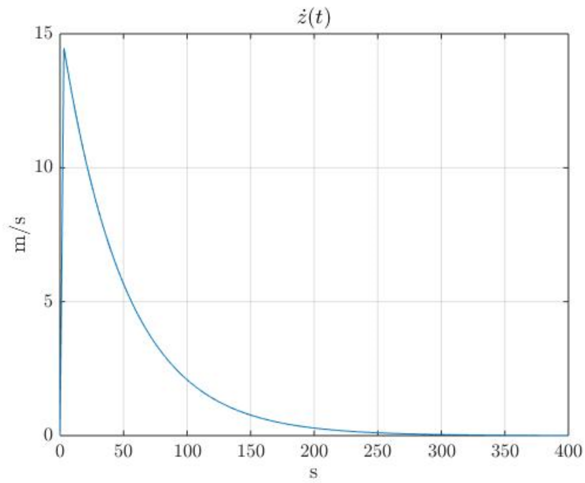
$$\mathrm{z}(t) = \begin{cases} 490\left(t - 100\left(1 - e^{-\frac{t}{100}}\right)\right), & 0 \leq t < 3 \\ 746.8 - 725e^{-0.02(t-3)}, & t \geq 3 \end{cases}$$

e) Sfruttando la sua regolarità asintotica, la posizione finale del carrello può essere valutata come il limite per $t \to \infty$ della precedente espressione di $\mathrm{z}(t)$:

$$\mathrm{z}(\infty) = 746.8 \text{ m}$$

Nella figura seguente, a sinistra, è illustrato il movimento nell'uscita del sistema cosi come risultante al punto precedente da cui si può apprezzare l'assestamento al valore di regime ($\mathrm{z}(\infty) = 746.8$ m) dopo un tempo pari a circa 4.6 volte (considerando un assestamento all'1%) la costante di tempo del modo naturale presente nella seconda fase ($\tau = 50s$), ovvero per $t > t_0 + 4.6\tau = 330s$.





La figura precedente, a destro, illustra l'andamento della velocità del carrello. Si può notare come la velocità massima (14.5 m/s) sia raggiunta esattamente al cambio di pendenza, ovvero per $t = 3s$.