Voto

Cognome/Nome & No. Matricola

FONDAMENTI DI SISTEMI DINAMICI

(prof. Vincenzo LIPPIELLO — A.A. 2015–2016)

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni - II anno

PROVA DEL 15 FEBBRAIO 2016

Rispondere in maniera chiara e sintetica ai seguenti quesiti, indicando Cognome e Nome su ogni foglio manoscritto. La traccia, debitamente compilata, va consegnata insieme al compito svolto. Non è consentito consultare appunti o altro materiale. È assolutamente vietata ogni forma di collaborazione, pena l'annullamento della prova.

Si consideri un algoritmo informatico che ad ogni passo di elaborazione aggiorna il valore di tre registri di memoria numerici M1, M2 ed M3 secondo le seguenti istruzioni:

1) Il nuovo valore del registro M1 sarà pari al doppio del precedente valore contenuto nel registro M2 più un valore numerico N fornito da un altro algoritmo qui non presentato;
2) Il nuovo valore del registro M2 sarà pari al doppio del precedente valore contenuto nel registro M1 cambiato di segno;
3) Il nuovo valore del registro M3 sarà pari a due volte il precedente valore contenuto nel registro M1, cambiato si segno, più la metà della differenza dei precedenti valori contenuti nei registri M3 meno M2.

Si supponga infinità la risoluzione e la capacità di tali registri. Si denotino con $x_1(k)$, $x_2(k)$ e $x_3(k)$ i valori contenuti al passo di elaborazione k nei registri di memoria M1, M2 ed M3, rispettivamente. Si consideri infine come uscita dell'algoritmo la differenza tra il doppio del valore contenuto nel registro M1 meno il valore contenuto nel registro M3.

a) Si fornisca un modello in forma di stato del sistema. **[5 punti]**
b) Elencare i modi propri del sistema. **[15 punti]**
c) Si calcoli il movimento libero nell'uscita con condizioni iniziali $x_1(0) = x_2(0) = 0$ e $x_3(0) = 2$ operando esclusivamente nel dominio del tempo. Calcolare il corrispondente andamento asintotico per $k \to \infty$. **[5 punti]**
d) Calcolare la risposta impulsiva nello stato del sistema operando nel dominio della variabile complessa. **[5 punti]**

FONDAMENTI DI SISTEMI DINAMICI

(prof. Vincenzo LIPPIELLO — A.A. 2015–2016)

Università degli Studi di Napoli Federico II
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni - II anno

SVOLGIMENTO DELLA PROVA DEL 15 FEBBRAIO 2016

a) Il modello in forma di stato del sistema oggetto di studio può essere ricavato semplicemente seguendo le indicazioni della traccia. Denotando con $u(k)$ l'unico ingresso al sistema (indicato come N nella traccia), le equazioni della dinamica del sistema risultano essere le seguenti:

$$x_1(k+1) = 2x_2(k) + u(k) \tag{1a}$$
$$x_2(k+1) = -2x_1(k) \tag{1b}$$
$$x_3(k+1) = -2x_1(k) - \frac{1}{2}x_2(k) + \frac{1}{2}x_3(k). \tag{1c}$$

Denotando con $y(k)$ l'uscita del sistema, questa risulta essere definita come segue:

$$y(k) = 2x_1(k) - x_3(k). \tag{2}$$

Posto $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^\top$, il sistema riscritto in forma matriciale risulta quindi essere il seguente:

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}u(k) \tag{3a}$$
$$y(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(k), \tag{3b}$$

dove

$$\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ \hline -2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right], \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{4a}$$

b) Si cominci con lo scrivere il polinomio caratteristico della matrice $\boldsymbol{A}$ (si noti che tale matrice è diagonale a blocchi):

$$p(\lambda) = \det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)\left(\lambda^2 + 4\right). \tag{5}$$

Gli autovalori di $\boldsymbol{A}$ sono dunque $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = 2j$ e $\lambda_3 = \lambda_2^* = -2j$. La matrice $\boldsymbol{A}$ ha tutti autovalori distinti ed è quindi diagonalizzabile. Avendo però autovalori complessi e coniugati, la forma diagonale di $\boldsymbol{A}$ non è reale. Si opererà dunque per costruire una forma reale a blocchi di $\boldsymbol{A}$.

Calcoliamo un possibile autovettore $\boldsymbol{v}_1$ associato al primo autovalore λ_1:

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_1\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{1,1} \\ v_{1,2} \\ v_{1,3} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Scegliamo $\alpha = 1$ e quindi $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$.

Si procederà in maniera analoga per il calcolo di un autovettore associato a λ_2:

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_2\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -2j & 2 & 0 \\ -2 & -2j & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-2j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{2,1} \\ v_{2,2} \\ v_{2,3} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \\ \beta \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Scegliamo $\alpha = \beta = 1$ e quindi $\boldsymbol{v}_2' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ e $\boldsymbol{v}_2'' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$.

Componiamo dunque l'inversa della matrice trasformazione di stato diagonalizzante per il sistema:

$$\boldsymbol{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2' & \boldsymbol{v}_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Poniamo $\lambda_2 = \sigma_2 + j\omega_2$, con $\sigma_2 = 0$ e $\omega_2 = 2$, risulta:

$$\boldsymbol{A}_D = \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}^{-1} = \left[\begin{array}{c|cc} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \sigma_2 & \omega_2 \\ 0 & -\omega_2 & \sigma_2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Dunque, scrivendo ancora $\lambda_2 = \rho_2 e^{\theta_2}$, con $\rho_2 = 2$ e $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$, si ha:

$$\boldsymbol{A}_D^k = \left[\begin{array}{c|cc} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ \hline 0 & \rho_2^k \cos(k\theta_2) & \rho_2^k \sin(k\theta_2) \\ 0 & -\rho_2^k \sin(k\theta_2) & \rho_2^k \cos(k\theta_2) \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) & 2^k \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & -2^k \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) & 2^k \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix}. \tag{10}$$

I modi propri del sistema sono tutte le funzioni di k che compaiono della matrice di transizione $\boldsymbol{A}_D^k$, quindi

$$\left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad 2^k \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right), \quad 2^k \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right). \tag{11}$$

c) Dalla teoria sappiamo che il movimento libero nell'uscita del sistema è pari a

$$y_l(k) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}_D^k\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}_0, \tag{12}$$

dove lo stato iniziale è stato assegnato pari a $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^\top$. Per evitare il calcolo della matrice $\boldsymbol{T}$, ricaviamo direttamente il prodotto $\boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}_0$ ricordando che le componenti di $\boldsymbol{z}_0$

sono nient'altro che le proiezioni del vettore $\boldsymbol{x}_0$ sulla base del nuovo spazio di stato, ovvero sugli autovettori precedentemente calcolati:

$$\boldsymbol{x}_0 = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2' + \alpha_3 \boldsymbol{v}_2''. \tag{13}$$

Il sistema lineare in 3 equazioni e 3 incognite risultate:

$$\alpha_2 = 0 \tag{14a}$$
$$\alpha_3 = 0 \tag{14b}$$
$$\alpha_1 + \alpha_3 = 2, \tag{14c}$$

ha soluzione $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Dunque

$$\boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Sostituendo tale valore in (15) si può calcolare la risposta cercata:

$$\begin{aligned} y_l(k) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}_D^k \boldsymbol{z}_0 \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) & 2^k \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & -2^k \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) & 2^k \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= -2\left(\frac{1}{2}\right)^k. \end{aligned} \tag{16}$$

Pur essendo il sistema instabile, l'andamento asintotico del movimento libero nell'uscita risulta convergente a zero:

$$\lim_{k\to\infty} y_l(k) = 0. \tag{17}$$

Tale risultato è dovuto alla particolare condizione iniziale scelta che non va ad eccitare i modi divergenti del sistema.

d) Dalla teoria sappiamo che la risposta impulsiva nello stato espressa nel dominio della variabile complessa è pari a

$$\boldsymbol{X}_f(z) = \boldsymbol{H}(z) = (z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} = \frac{1}{z}\boldsymbol{\Phi}(z)\boldsymbol{B} = \frac{1}{z^2+4}\begin{bmatrix} z \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Notiamo che il *polinomio minimo* è di ordine ridotto rispetto al polinomio caratteristico, ed in particolare manca il polo relativo al primo autovalore della matrice $\boldsymbol{A}$. Questo risultato ci induce a pensare che il sistema non è completamente raggiungibile. Si può infatti verificare che la matrice di raggiungibilità ha rango 2 che è minore dell'ordine del sistema.

Ricordiamo l'espressione della trasformata del seno moltiplicato per un esponenziale:

$$\mathcal{Z}\left[\rho^k \sin(\theta k)\delta_{-1}(k)\right] = \frac{z\rho\sin(\theta)}{z^2 - 2\rho\cos(\theta)z + \rho^2} \tag{19}$$

Dal confronto con il primo elemento della (18) si evince che $\rho = 2$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$. Sostituendo tali valori nella (19) si ha:

$$\mathcal{Z}\left[2^k \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)\delta_{-1}(k)\right] = \frac{2z}{z^2+4}. \tag{20}$$

Dunque antitrasformando il primo elemento della (18) otterremo:

$$\begin{aligned} x_{1,f}(k) &= \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{2}\frac{2z}{z^2+4}\right] \\ &= \frac{1}{2}2^k \sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)\delta_{-1}(k) \\ &= 2^{k-1}\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)\delta_{-1}(k). \end{aligned} \tag{21}$$

Si consideri ora l'antitrasformata dei restanti due elementi della risposta impulsiva:

$$\begin{aligned} x_{2,f}(k) &= x_{3,f}(k) \\ &= \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{-2}{z^2+4}\right] \\ &= \mathcal{Z}^{-1}\left[z\frac{-2}{z(z^2+4)}\right] \\ &= \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{2}\left(-\frac{1}{z} + \frac{z}{z^2+4}\right)\right] \\ &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}2^k\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)\right)\delta_{-1}(k) \\ &= \frac{1}{2}\left(-1 + 2^{k-1}\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)\right)\delta_{-1}(k). \end{aligned} \tag{22}$$