Voto	Cognome/Nome & No. Matricola

FONDAMENTI DI SISTEMI DINAMICI

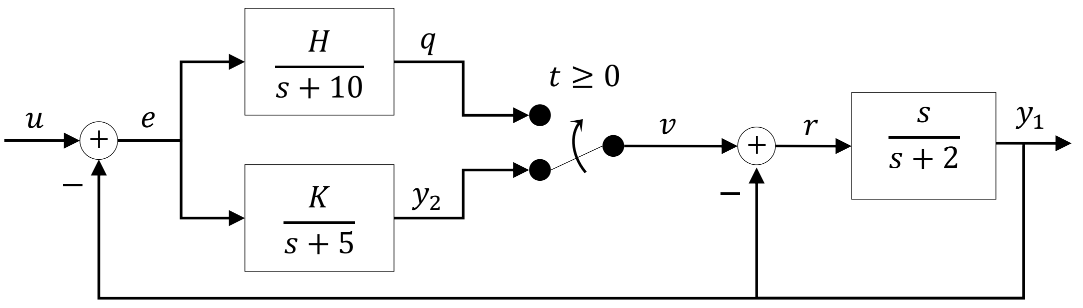
(prof. Vincenzo LIPPIELLO — A.A. 2015–2016)

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni - II anno

PROVA DEL 14 MARZO 2016

Rispondere in maniera chiara e sintetica ai seguenti quesiti, indicando Cognome e Nome su ogni foglio manoscritto.
La traccia, debitamente compilata, va consegnata insieme al compito svolto. Non è consentito consultare appunti o altro materiale. È assolutamente vietata ogni forma di collaborazione, pena l'annullamento della prova.

Sia dato il sistema di figura



Si risponda ai seguenti quesiti:

a) Calcolare delle rappresentazioni i-s-u del sistema per $t < 0$ e per $t \geq 0$. **[5 punti]**

b) Con riferimento al sistema per $t \geq 0$, verificare se esiste uno stato iniziale a cui corrisponde una risposta libera identicamente nulla al variare dei parametri H e K. **[10 punti]**

c) Fissati dei valori di H e K per cui il sistema risulta asintoticamente stabile, calcolare la risposta sia nello stato che nell'uscita al segnale $u = cos(5t)$. **[10 punti]**

d) Con riferimento alla funzione di trasferimento relativa all'uscita y_1, tracciare i diagrammi di Bode del sistema fissato al punto c) sia per $t < 0$ che per $t \geq 0$. **[5 punti]**

FONDAMENTI DI SISTEMI DINAMICI

(prof. Vincenzo LIPPIELLO — A.A. 2015–2016)

Università degli Studi di Napoli Federico II
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni - II anno

SVOLGIMENTO DELLA PROVA DEL 14 MARZO 2016

a) Iniziamo a calcolare rappresentazioni ISU dei singoli sistemi componenti il sistema complessivo assegnato. Con riferimento al sistema $S_1 : e \to q$, risulta

$$S_1 : \frac{Q(s)}{E(s)} = \frac{H}{s+10} \Rightarrow (s+10)Q(s) = HE(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \dot{q}(t) + 10q(t) = He(t), \tag{1}$$

posto $x_1(t) = q(t)$, è possibile scrivere il sistema S_1 in forma di stato come segue:

$$S_1 : \begin{cases} \dot{x}_1 &= -10x_1 + He \\ q &= x_1 \end{cases} . \tag{2}$$

Procedendo in modo analogo per il sottosistema $S_2 : e \to y_2$:

$$S_2 : \frac{Y_2(s)}{E(s)} = \frac{K}{s+5} \Rightarrow (s+5)Y_2(s) = KE(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \dot{y_2}(t) + 5y_2(t) = Ke(t), \tag{3}$$

posto $x_2(t) = y_2(t)$ si scrivere direttamente il sistema S_2 in forma di stato:

$$S_2 : \begin{cases} \dot{x}_2 &= -5x_1 + Ke \\ y_2 &= x_2 \end{cases} . \tag{4}$$

Si consideri infine il sottosistema in retroazione $S_3 : v \to y_1$ (si noti che $r(t) = v(t) - y_1(t)$):

$$S_3 : \frac{Y_1(s)}{V(s)} = \frac{\frac{s}{s+2}}{1 + \frac{s}{s+2}} = \frac{s}{2(s+1)} \Rightarrow 2(s+1)Y_1(s) = sV(s) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 2\dot{y_1}(t) + 2y_1(t) = \dot{v}(t), \tag{5}$$

posto $x_3(t) = 2y_1(t) - v(t)$ si potrà scrivere il sistema S_3 in forma di stato come segue:

$$S_3 : \begin{cases} \dot{x}_3 &= -x_3 - v \\ y_1 &= \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}v \end{cases} . \tag{6}$$

Si prenda in esame da prima il caso $t < 0$, ovvero $v(t) = y_2(t) = x_2(t)$. Utilizzando le relazioni topologiche del sistema fornito (ovvero $e(t) = u(t) - y_1(t)$), si potrà scrivere il sistema complessivo in forma di stato:

$$S_a : \begin{cases} \dot{x}_1 &=& -10x_1 + He = -10x_1 + H(u - y_1) = -10x_1 - \frac{H}{2}x_2 - \frac{H}{2}x_3 + Hu \\ \dot{x}_2 &=& -5x_2 + Ke = -5x_2 + K(u - y_1) = -\left(5 + \frac{K}{2}\right)x_2 - \frac{K}{2}x_3 + Ku \\ \dot{x}_3 &=& -x_3 - v = -x_2 - x_3 \\ y_1 &=& \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}v = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ y_2 &=& x_2 \end{cases}, \quad (7)$$

e posto $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^\top$, $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}^\top$, in forma matriciale come segue:

$$S_a : \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} &=& \boldsymbol{A}_a\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}_a u \\ \boldsymbol{y} &=& \boldsymbol{C}_a\boldsymbol{x} \end{cases}, \quad (8)$$

dove

$$\boldsymbol{A}_a = \begin{bmatrix} -10 & -\frac{H}{2} & -\frac{H}{2} \\ 0 & -5 - \frac{K}{2} & -\frac{K}{2} \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_a = \begin{bmatrix} H \\ K \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_a = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Si noti anche l'assenza della matrice che esprime il legame diretto ingresso-uscita ($\boldsymbol{D}_a = \boldsymbol{0}$), sintomo del fatto che il sistema per $t < 0$ è strettamente proprio.

Si prenda in esame ora il caso $t \geq 0$, ovvero $v(t) = q(t) = x_1(t)$. Procedendo in modo analogo a quanto fatto in precedenza si otterrà:

$$S_b : \begin{cases} \dot{x}_1 &=& -\left(10 + \frac{H}{2}\right)x_1 - \frac{H}{2}x_3 + Hu \\ \dot{x}_2 &=& -\frac{K}{2}x_1 - 5x_2 - \frac{K}{2}x_3 + Ku \\ \dot{x}_3 &=& -x_3 - v = -x_1 - x_3 \\ y_1 &=& \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}v = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 \\ y_2 &=& x_2 \end{cases}. \quad (10)$$

Sarà quindi possibile esprimere il sistem in forma matriciale

$$S_b : \begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} &=& \boldsymbol{A}_b\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}_b u \\ \boldsymbol{y} &=& \boldsymbol{C}_b\boldsymbol{x} \end{cases}, \quad (11)$$

dove

$$\boldsymbol{A}_b = \begin{bmatrix} -10 - \frac{H}{2} & 0 & -\frac{H}{2} \\ -\frac{K}{2} & -5 & -\frac{K}{2} \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_b = \begin{bmatrix} H \\ K \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C}_b = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

b) Con riferimento al sistema S_b, si ricordi l'espressione della risposta libera nel dominio della variabile complessa:

$$\boldsymbol{Y}_{b,l}(s) = \boldsymbol{C}_b\boldsymbol{\Phi}_b(s)\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{C}_b(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_b)^{-1}\boldsymbol{x}_0 = \frac{\boldsymbol{C}_b\mathrm{Agg}^\top(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_b)\boldsymbol{x}_0}{p_b(s)}, \quad (13)$$

dove $p_b(s)$ è il polinomio caratteristico della matrice $\boldsymbol{A}_b$ che per il momento non è necessario calcolare. Ponendo la (13) uguale a zero si potranno calcolare i valori di $\boldsymbol{x}_0$ che annullano la risposta libera al variare dei parametri H e K:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}s(s+5) & 0 & \frac{1}{2}(s^2+15s+50) \\ -\frac{K}{2}s & s^2+\left(11+\frac{H}{2}\right)s+10 & -\frac{K}{2}(s+10) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \\ x_{3,0} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \tag{14}$$

Uguagliando al vettore nullo il numeratore della (14) si darà origine ad un sistema di due equazioni omogenee di secondo grado in tre incognite (le componenti di $\boldsymbol{x}_0$). Per l'identità dei polinomi, tutti i coefficienti dei due polinomi devono risultare identicamente nulli. Risulta immediato constatare che l'unica soluzione ammissibile sarà $\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0}$, indipendentemente dai valori di H e K.

Un approccio alternativo potrebbe essere il calcolo della matrice di osservabilità del sistema S_b e quindi del suo rango. Si invita il discente a verificare che il rango di tale matrice è pari a 3 ed è indipendente dai parametri H e K. Si conclude quindi che il sistema è completamente osservabile e di conseguenza solo la condizione iniziale nulla potrebbe generare una libera identicamente nulla.

c) Verifichiamo i valori dei parametri H e K per i quali il sistema risulta essere asintoticamente stabile, sia per $t < 0$ che per $t \geq 0$.

Procediamo al calcolo del polinomio caratteristico nel primo caso:

$$p_a(s) = |s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_a| = (s+10)\left(s^2 + \left(6 + \frac{K}{2}\right)s + 5\right) \tag{15}$$

Applicando il criterio di Cartesio alla (15), si conclude che la stabilità del sistema S_a sarà garantita per $K > -12$ e $\forall H$.

Procedendo in modo del tutto analogo per il caso $t \geq 0$, calcoliamo dapprima il polinomio caratteristico:

$$p_b(s) = |s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_a| = (s+5)\left(s^2 + \left(11 + \frac{H}{2}\right)s + 10\right) \tag{16}$$

Applicando il criterio di Cartesio alla (16), si deduce che la stabilità del sistema S_b sarà garantita per $H > -22$ e $\forall K$.

Scegliamo $K = 9$ e $H = -8$. I polinomi caratteristici si potranno quindi riscrivere in forma fattorizzata come segue:

$$p_a(s) = (s+10)^2(s+0.5) \tag{17a}$$

$$p_b(s) = (s+5)^2(s+2). \tag{17b}$$

Procediamo quindi con il calcolo della risposta nello stato per il sistema S_a all'ingresso $u(t) = \cos(5t)$. Essendo il sistema asintoticamente stabile, possiamo applicare il teorema fondamentale della risposta armonica. Per poter continuare è quindi necessario calcolare la funzione di trasferimento nello stato del sistema S_a:

$$\boldsymbol{H}_a(s) = \boldsymbol{\Phi}_a(s)\boldsymbol{B}_a = (s\boldsymbol{I} - A_a)^{-1}\boldsymbol{B}_a = \frac{\begin{bmatrix} H(s^2+6s+5) \\ K(s^2+11s+10) \\ -K(s+10) \end{bmatrix}}{p_a(s)}, \tag{18}$$

e quindi la corrispondente risposta periodica nello stato per $t \leq 0$ sarà

$$\boldsymbol{x}(t) = |\boldsymbol{H}_a(j5)| \cos\left(5t + \arg\left(\boldsymbol{H}_a(j5)\right)\right) = \begin{bmatrix} 0.46\cos(5t + 2.9) \\ 0.82\cos(5t - 0.56) \\ 0.16\cos(5t + 1.2) \end{bmatrix}. \tag{19}$$

La corrispondente risposta nell'uscita, valida per $t < 0$, si può calcolare mediante la trasformazione di uscita

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}_a \boldsymbol{x}_a(t) = \begin{bmatrix} 0.41\cos(5t - 0.56) + 0.080\cos(5t + 1.2) \\ 0.82\cos(5t + 0.56) \end{bmatrix}, \tag{20}$$

mentre lo stato assumera per $t = 0$ il seguente valore:

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} -0.45 \\ 0.69 \\ 0.057 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Per $t \geq 0$ il sistema S_b avrà sia una componente libera che forzata

$$\boldsymbol{X}_b(s) = \boldsymbol{X}_{b,l}(s) + \boldsymbol{X}_{b,f}(s) = \boldsymbol{\Phi}_b(s)\boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{\Phi}_b(s)\boldsymbol{B}_b U(s), \tag{22}$$

dove $U(s) = \mathcal{L}\left[\cos(5t)\right] = \frac{s}{s^2+25}$. Antitrasformando la (22) si otterrà la risposta nello stato del sistema per $t \geq 0$. Moltiplicando quest'ultima per $\boldsymbol{C}_b$ si otterrà infine la risposta nell'uscita. Si lascia al discente lo sviluppo dei relativi passaggi matematici.

d) Le Figure 1 e 2 illustrano i diagrammi di Bode relativi all'uscita y_1 per il sistema per $t < 0$ e per $t \geq 0$, rispettivamente.

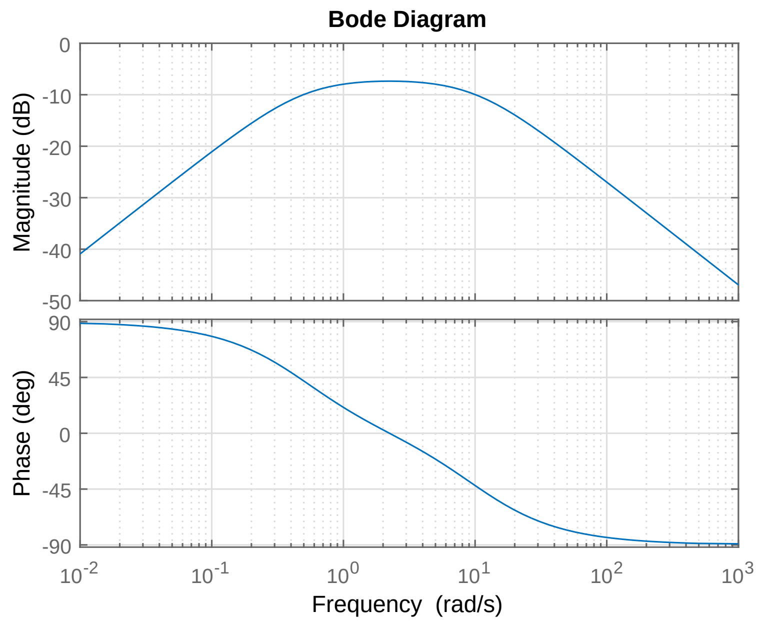


Figure 1: Diagramma di Bode del sistema S_a (ovvero per $t < 0$) con riferimento al canale di uscita y_1.

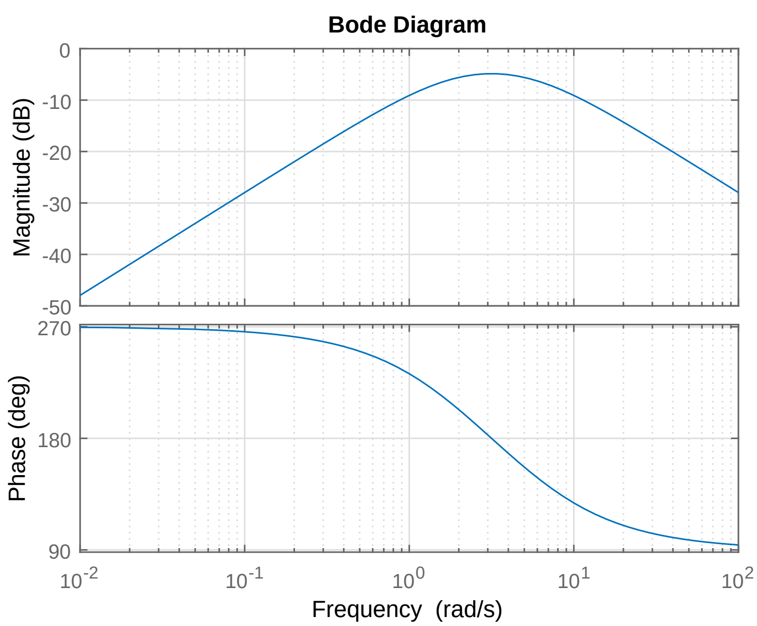


Figure 2: Diagramma di Bode del sistema S_b (ovvero per $t \geq 0$) con riferimento al canale di uscita y_1.