Voto

Cognome/Nome & No. Matricola

FONDAMENTI DI SISTEMI DINAMICI

(prof. Vincenzo LIPPIELLO — A.A. 2015–2016)

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni - II anno

PROVA DEL 09 MAGGIO 2016

Rispondere in maniera chiara e sintetica ai seguenti quesiti, indicando Cognome e Nome su ogni foglio manoscritto. La traccia, debitamente compilata, va consegnata insieme al compito svolto. Non è consentito consultare appunti o altro materiale. È assolutamente vietata ogni forma di collaborazione, pena l'annullamento della prova.

Si consideri il sistema:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

dove

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -6 & 6 \\ 3 & -5 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Studiare la stabilità del sistema[1]. **[5 punti]**

b) Determinare i modi del sistema. **[10 punti]**

c) Procedere al calcolo della risposta in evoluzione libera nello stato del sistema con condizioni iniziali $x_0 = x(0) = [3 \quad 1 \quad 0]^T$. **[10 punti]**

d) Determinare l'insieme delle condizioni iniziali x_0 tali che $\lim_{t\to\infty} \|x_l(t)\| = 0$. **[5 punti]**

[1] Si consiglia di calcolare il polinomio caratteristico utilizzando la prima riga della matrice $(\lambda I - A)$ per lo sviluppo del determinante e di preservare quindi i fattori che ne derivano al fine di verificare la presenza di semplificazioni.

FONDAMENTI DI SISTEMI DINAMICI

(prof. Vincenzo LIPPIELLO — A.A. 2015–2016)

Università degli Studi di Napoli Federico II
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni - II anno

SVOLGIMENTO DELLA PROVA DEL 09 MAGGIO 2016

a) Calcoliamo dapprima il polinomio caratteristico del sistema:

$$
\begin{aligned}
p(\lambda) = |\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| &= \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 3 & -3 \\ -\frac{3}{2} & \lambda + \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \lambda - \frac{1}{2} \end{vmatrix} \\
&= (\lambda - 2)\begin{vmatrix} \lambda + \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \lambda - \frac{1}{2} \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \lambda - \frac{1}{2} \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & \lambda + \frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{vmatrix} \\
&= (\lambda - 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) - 3(-\frac{3}{2}\lambda - \frac{3}{2}) - 3(\frac{3}{2}\lambda + \frac{3}{2}) \\
&= (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Gli autovalori del sistema saranno quindi $\lambda_1 = 2$ ($\mu_1 = 1 \rightarrow \nu_1 = 1$) e $\lambda_2 = -1$ ($\mu_2 = 2$). Dato che il sistema possiede un autovalore reale positivo ($\lambda_1 > 0$) si può concludere che il sistema è **instabile**.

b) Per procedere al calcolo dei modi del sistema, verifichiamo dapprima se la matrice della dinamica è diagonalizzabile. Avendo già verificato la molteplicità algebrica dei due autovalori e quella geometrica del primo, non ci resta che valutare quella del secondo autovalore:

$$
\nu_2 = \dim(\ker(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})) = 3 - \operatorname{rank}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 3 - 1 = 2 \rightarrow \nu_2 = 2. \tag{2}
$$

Dato che $\mu_1 = \nu_1$ e $\mu_2 = \nu_2$ si deduce che la matrice $\boldsymbol{A}$ è **diagonalizzabile**. Dunque esiste una matrice $\boldsymbol{T}$ di cambio di coordinate tale che

$$
\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{3}
$$

Essendo

$$
\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\Lambda} t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}, \tag{4}
$$

i modi del sistema sono: e^{2t}, e^{-t}.

c) Si proceda ora al calcolo della risposta in evoluzione libera nello stato del sistema con condizione iniziale $\boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix}3 & 1 & 0\end{bmatrix}^\top$.

$$\boldsymbol{x}_l(t) = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\Lambda}t}\boldsymbol{T}\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\Lambda}t}\boldsymbol{z}_0, \tag{5}$$

dove si è posto $\boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}_0$ nell'ultimo passaggio. Calcoliamo la matrice $\boldsymbol{T}^{-1} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2' & \boldsymbol{v}_2''\end{bmatrix}$, dove $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2'$ e $\boldsymbol{v}_2''$ sono gli autovettori corrispondenti agli autovalori calcolati del sistema. Dopo semplici passaggi algebrici otteniamo i seguenti autovettori:

$$\boldsymbol{v}_l = \alpha \begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2' = \alpha \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2'' = \alpha \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}, \quad \text{con } \alpha \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

L'inversa della matrice di cambio di coordinate si compone quindi come segue:

$$\boldsymbol{T}^{-1} = \begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{bmatrix}. \tag{7}$$

Risolviamo ora il sistema $\boldsymbol{T}\boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{x}_0$ che ci consente di non calcolare l'inversa della matrice $\boldsymbol{T}^{-1}$. Dopo semplici passaggi algebrici otteniamo $\boldsymbol{z}_0 = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix}^\top$.

Dunque, la risposta libera sarà

$$\boldsymbol{x}_l(t) = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{e}^{\boldsymbol{\Lambda}t}\boldsymbol{z}_0 = e^{2t}\boldsymbol{v}_1 - e^{-t}\boldsymbol{v}_2'' = \begin{bmatrix}2e^{2t} + e^{-t}\\ e^{2t}\\ e^{2t} - e^{-t}\end{bmatrix}. \tag{8}$$

d) Si riprenda l'espressione calcolata in precedenza per la risposta libera nello stato

$$\boldsymbol{x}_l(t) = e^{2t}\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + e^{-t}\left(\alpha_2\boldsymbol{v}_2' + \alpha_3\boldsymbol{v}_2''\right), \tag{9}$$

dove $\boldsymbol{z}_0 = \begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{bmatrix}^\top$. Si osserva che $e^{2t} \to \infty$ e $e^{-t} \to 0$ per $t \to \infty$. Dunque affinché $\|\boldsymbol{x}(t)\| \to 0$ per $t \to \infty$ deve essere $\alpha_1 = 0$, ovvero la condizione iniziale $\boldsymbol{x}_0$ non deve avere componente lungo l'autospazio relativo all'autovalore instabile λ_1. Le condizioni iniziali che soddisfano tale requisito sono date da:

$$\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{T}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{bmatrix} = \alpha_2\boldsymbol{v}_2' + \alpha_3\boldsymbol{v}_2'', \tag{10}$$

al variare di α_2, $\alpha_3 \in \mathbb{R}$. Sono quindi tutte le condizioni iniziali appartenenti al sottospazio lineare generato da $\boldsymbol{v}_2'$ e $\boldsymbol{v}_2''$.