Voto

Cognome/Nome & No. Matricola

FONDAMENTI DI SISTEMI DINAMICI

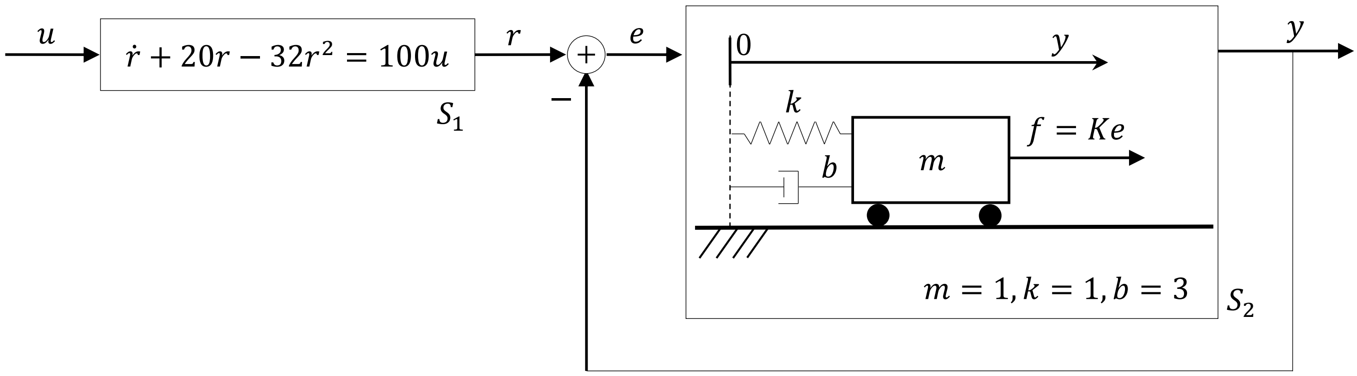
(prof. Vincenzo LIPPIELLO — A.A. 2015–2016)

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni - II anno

PROVA DEL 4 LUGLIO 2016

Rispondere in maniera chiara e sintetica ai seguenti quesiti, indicando Cognome e Nome su ogni foglio manoscritto. La traccia, debitamente compilata, va consegnata insieme al compito svolto. Non è consentito consultare appunti o altro materiale. È assolutamente vietata ogni forma di collaborazione, pena l'annullamento della prova.

Dato il sistema rappresentato in figura, calcolare:



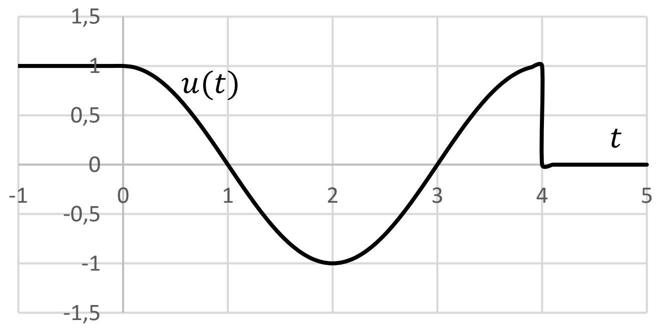
a) Una rappresentazione i-s-u del sistema **[5 punti]**

b) I punti di equilibrio per $u(t) = \bar{u}$ costante ed il modello linearizzato per $u = 0$ **[5 punti]**

Con riferimento al modello linearizzato per $u = 0$, calcolare:

c) La funzione di trasferimento ed i valori di K per cui il sistema è asintoticamente stabile **[5 punti]**

d) Fissato K, calcolare la risposta al segnale di ingresso riportato in figura **[10 punti]**



e) Tracciare i diagrammi di Bode (modulo e fase) e misurare la corrispondente banda passante **[5 punti]**

FONDAMENTI DI SISTEMI DINAMICI

(prof. Vincenzo LIPPIELLO — A.A. 2015–2016)

Università degli Studi di Napoli Federico II
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni - II anno

SVOLGIMENTO DELLA PROVA DEL 04 LUGLIO 2016

a) Applichiamo la legge fondamentale della dinamica la sistema S_2:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = f = Ke. \tag{1}$$

Trasformiamo quindi la precedente equazione nel dominio di Laplace:

$$(ms^2 + bs + k)Y(s) = KE(s). \tag{2}$$

Ricaviamo quindi la corrispondente funzione di traferimento:

$$W_2(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{K}{ms^2 + bs + k} = \frac{K}{s^2 + 3s + 1}. \tag{3}$$

Determiniamo ora la funzione di trasferimento del sistema retroazionato che vede il sottosistema S_2 sulla catena di andata e retroazione unitaria:

$$W_r(s) = \frac{W_2(s)}{1 + W_2(s)} = \frac{K}{s^2 + 3s + K + 1} \tag{4}$$

Pertanto una rappresentazione i-u di tale sistema è la seguente

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + (K+1)y = Kr \tag{5}$$

Determiniamo ora una rappresentazione i-s-u del sistema non lineare S_1. Posto $r = x_1$, si ha

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -20x_1 + 32x_1^2 + 100u \\ r &= x_1 \end{cases} \tag{6}$$

Analogamente, una rappresentazione i-s-u del sistema retroazionato, posto $y = x_2$ e $x_3 = \dot{x}_2 = \dot{y}$, è data da

$$\begin{cases} \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -(K+1)x_2 - 3x_3 + Kr \\ y &= x_2 \end{cases} \tag{7}$$

Quindi una rappresentazione i-s-u del sistema complessivo è

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= -20x_1 + 32x_1^2 + 100u \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= Kx_1 - (K+1)x_2 - 3x_3 \\ y &= x_2 \end{cases} \tag{8}$$

b) I punti di equilibrio per $u(t) = \bar{u}$ devono soddisfare le equazioni

$$\begin{cases} 0 &= 32x_1^2 - 20x_1 + 100\bar{u} \\ 0 &= x_3 \\ 0 &= Kx_1 - (K+1)x_2 - 3x_3 \end{cases} \tag{9}$$

da cui

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{5}{16}\left(1 \pm \sqrt{1 - 32\bar{u}}\right) \\ x_2 &= \tfrac{K}{K+1}x_1 \\ x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

il sistema presenta quindi due punti di equilibrio distinti. In particolare per $u = 0$ e scegliendo il segno "meno" si ha il punto di equilibrio $\boldsymbol{x}_{eq} = \boldsymbol{0}$. Scegliamo tale punto di equilibrio per la linearizzazione nell'intorno di $u = 0$. Il modello linearizzato è dato da

$$\begin{cases} \delta\dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\delta\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\delta u \\ \delta y &= \boldsymbol{C}\delta\boldsymbol{x} + D\delta u \end{cases} \tag{11}$$

dove

$$\boldsymbol{A} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\substack{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \\ u=0}} = \left.\begin{pmatrix} -20+64x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ K & -(K+1) & -3 \end{pmatrix}\right|_{\substack{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \\ u=0}} = \begin{pmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ K & -(K+1) & -3 \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{B} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial u}\right|_{\substack{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \\ u=0}} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$\boldsymbol{C} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\substack{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \\ u=0}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$D = \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{\substack{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0} \\ u=0}} = 0 \tag{15}$$

Quindi osservando che $u = \bar{u} + \delta u = \delta u$, $\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{x}} + \delta\boldsymbol{x} = \delta\boldsymbol{x}$, $y = \bar{y} + \delta y = \delta y$, si ha

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} &= \begin{pmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ K & -(K+1) & -3 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}u \\ y &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\boldsymbol{x} \end{cases} \tag{16}$$

c) Calcoliamo ora la funzione di trasferimento

$$W(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} = \cdots = \frac{100K}{(s+20)(s^2+3s+K+1)} \tag{17}$$

Essendo già un autovalore (-20) a parte reale negativa, per determinare i valori di K per cui il sistema risulta essere asintoticamente stabile è sufficiente applicare la regola di Cartesio al polinomio $s^2+3s+K+1$. Dovrà quindi essere $K+1>0$, ovvero il sistema sarà asintoticamente stabile per $K>-1$.

Scegliamo K=32, da cui si ha

$$W(s) = \frac{3200}{(s+20)(s^2+3s+33)} \tag{18}$$

d) Osserviamo che il segnale di ingresso rappresentato in figura può essere analiticamente descritto come

$$\begin{aligned} u(t) &= \delta_{-1}(-t) + (\delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t-4))\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \\ &= 1 - \delta_{-1}(t) + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\delta_{-1}(t) + \cos\left(\frac{\pi}{2}(t-4)\right)\delta_{-1}(t-4) \\ &= u' + u''(t) + u'''(t) + u'''(t-4), \end{aligned} \tag{19}$$

avendo posto $u' = 1$, $u''(t) = \delta_{-1}(t)$, $u'''(t) = \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\delta_{-1}(t)$ ed utilizzato la proprietà di tempo invarianza del sistema oggetto di studio.

La risposta a regime al segnale u' costante è data da

$$y' = W(s)_{|s=0}\,u' = 4.85 \cdot 1 = 4.85. \tag{20}$$

La risposta a regime al segnale $u''(t)$ è data da

$$\begin{aligned} y''(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{W(s)}{s}\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3200}{s(s+20)(s^2+3s+33)}\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{s} + \frac{B}{s+20} + \frac{Cs+D}{(s+3/2)^2+123/4}\right]. \end{aligned} \tag{21}$$

La risposta a regime al segnale $u'''(t)$ è data da

$$\begin{aligned} y'''(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[W(s)\frac{s}{s^2+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3200s}{(s+20)(s^2+3s+33)\left(s^2+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)}\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A}{s+20} + \frac{Bs+C}{(s+3/2)^2+123/4} + \frac{Ds+E}{s^2+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}\right]. \end{aligned} \tag{22}$$

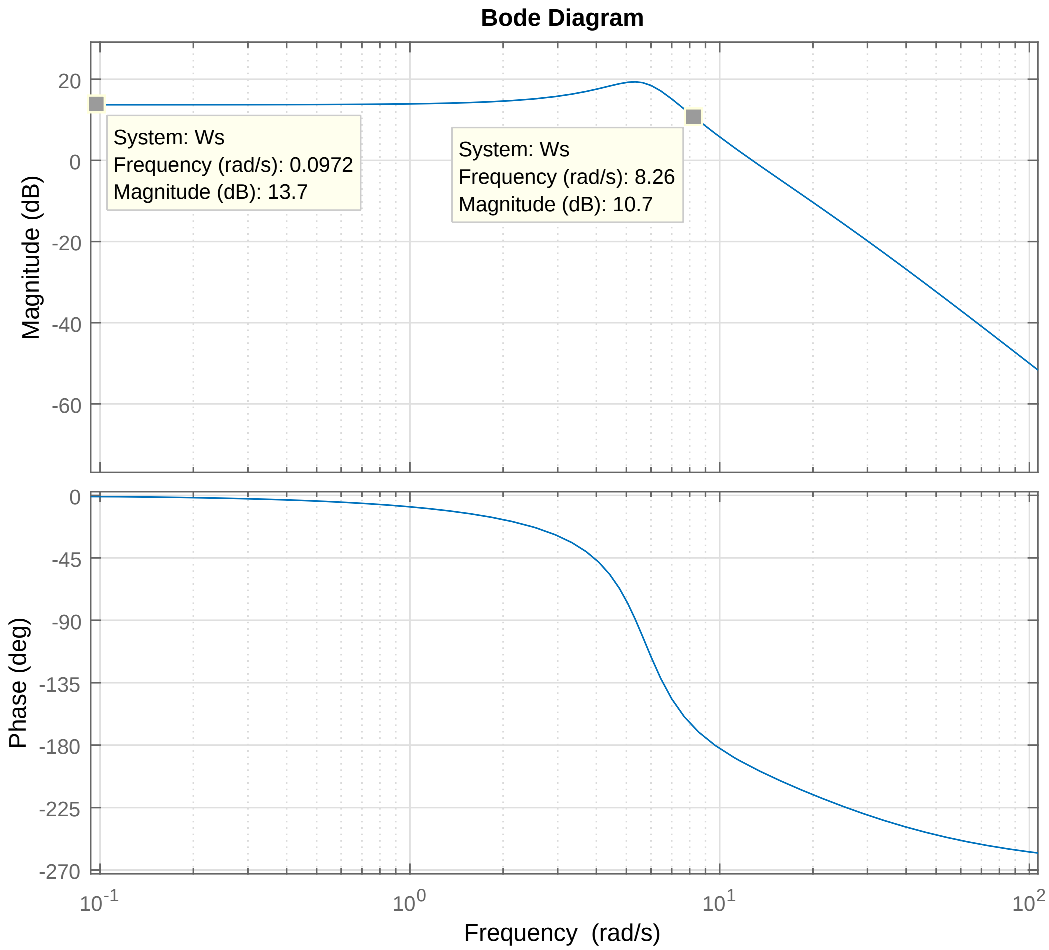


Figure 1: Diagramma di Bode.

Si lascia al discente il calcolo dei residui e delle relative anti-trasformate delle risposte $y''(t)$ ed $y'''(t)$.

Sfruttando la linearità locale e la tempo invarianza del sistema potremo scrivere la risposta al segnale di ingresso assegnato come $y(t) = y' + y''(t) + y'''(t) + y'''(t-4)$.

e) La Figura 1 illustra i diagrammi di Bode e la relativa frequenza di taglio a 3dB. Si noti anche la presenza adi un picco di risonanza determinato dalla coppia di poli complessi e coniugati di cui dispone il sistema per il valore scelto di K. Il discente potrà utilizzare i risultati proposta in figura per confrontarli con il diagramma asintotico che avrà sviluppato.