

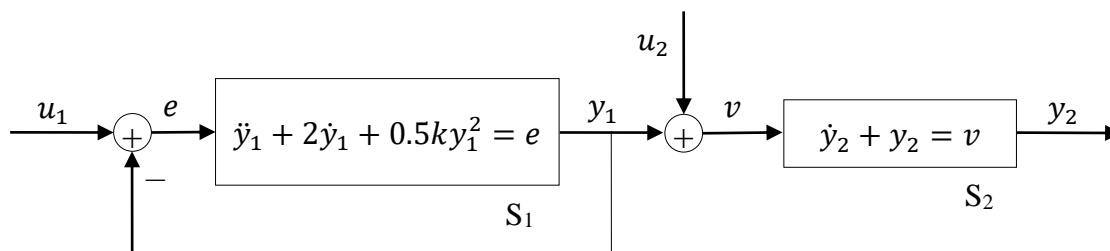
**FONDAMENTI DI SISTEMI DINAMICI**  
**(prof. Vincenzo LIPPIELLO — A.A. 2015–2016)**

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni - II anno

**PROVA DEL 8 SETTEMBRE 2016**

*Rispondere in maniera chiara e sintetica ai seguenti quesiti, indicando Cognome e Nome su ogni foglio manoscritto.  
 La traccia, debitamente compilata, va consegnata insieme al compito svolto. Non è consentito consultare appunti o altro materiale. È assolutamente vietata ogni forma di collaborazione, pena l'annullamento della prova.*

Dato il sistema rappresentato in figura, calcolare:



- Una rappresentazione i-s-u del sistema, i punti di equilibrio ed il modello linearizzato in caso di ingresso costante a scelta. Si scelga un modello linearizzato corrispondente ad un punto di equilibrio e lo si usi per risolvere i punti successivi. **[5 punti]**
- I valori di  $k$  che ne assicurino l'asintoticamente stabilità ed i valori di  $k$  che determinano la presenza di soli poli reali nel sistema. **[5 punti]**
- Studiare la raggiungibilità e l'osservabilità al variare di  $k$ . **[5 punti]**
- Fissato un valore di  $k$  che garantisca l'asintotica stabilità, la risposta agli ingressi  $u_1 = \delta_{-1}(-t)$ ,  $u_2 = \sin(5t)$ . **[10 punti]**
- Tracciare i diagrammi di Bode asintotici (un diagramma modulo-fase per ciascuna coppia ingresso-uscita) e valutare le corrispondenti frequenze di taglio. **[5 punti]**

# FONDAMENTI DI SISTEMI DINAMICI

(prof. Vincenzo LIPPIELLO — A.A. 2015–2016)

Università degli Studi di Napoli Federico II

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni - II anno

SVOLGIMENTO DELLA PROVA DEL 8 SETTEMBRE 2016

**a)** Entrambi i due sotto-sistemi che compongono il sistema in esame sono descritti mediante le relazioni differenziali ingresso-uscita. Posto  $x_1 = y_1$ ,  $x_2 = \dot{y}_1$  e  $x_3 = y_2$ , e considerato che  $e = u_1 - y_1$  e  $v = u_2 + y_1$ , risulta

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - \frac{1}{2}kx_1^2 - 2x_2 + u_1 \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_3 + u_2 \\ y_1 = x_1 \\ y_2 = x_3 \end{cases} \quad (1)$$

Il sistema è del terzo ordine, ha due ingressi ( $u_1, u_2$ ) e due uscite ( $y_1, y_2$ ), è non lineare (nello stato) ed è strettamente proprio. Posto  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^\top$ ,  $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2]^\top$ , e  $\mathbf{y} = [y_1 \ y_2]^\top$ , il sistema (1) può essere infatti descritto dalla seguente espressione compatta

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (2)$$

dove

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Con riferimento ad un ingresso costante  $\bar{\mathbf{u}} = [\bar{u}_1 \ \bar{u}_2]^\top$ , i corrispondenti punti di equilibrio del sistema si calcolano ponendo  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ , ovvero

$$\begin{cases} 0 = \bar{x}_2 \\ 0 = -\bar{x}_1 - \frac{1}{2}k\bar{x}_1^2 - 2\bar{x}_2 + \bar{u}_1 \\ 0 = \bar{x}_1 - \bar{x}_3 + \bar{u}_2 \\ \bar{y}_1 = \bar{x}_1 \\ \bar{y}_2 = \bar{x}_3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} k\bar{x}_1^2 + 2\bar{x}_1 - 2\bar{u}_1 = 0 \\ \bar{x}_2 = 0 \\ \bar{x}_3 = \bar{x}_1 + \bar{u}_2 \\ \bar{y}_1 = \bar{x}_1 \\ \bar{y}_2 = \bar{x}_3 \end{cases} \quad (3)$$

Dalla prima equazione si ricavano due soluzioni, ovvero due punti di equilibrio caratterizzati da:

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{k} \left( -1 \pm \sqrt{1 + 2k\bar{u}_1} \right), \quad \text{con } k \neq 0.$$

Scegliamo come ingresso di riferimento  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , da cui discendono i due punti di equilibrio  $\bar{\mathbf{x}}' = \mathbf{0}$ , a cui corrisponde una uscita di equilibrio anch'essa nulla ( $\bar{\mathbf{y}}' = \mathbf{0}$ ), e  $\bar{\mathbf{x}}'' = [-2/k \ 0 \ -2/k]^\top$ , a cui corrisponde l'uscita di equilibrio  $\bar{\mathbf{y}}'' = [-2/k \ -2/k]^\top$ .

Per il calcolo del modello linearizzato in corrispondenza dei punti di equilibrio trovati è sufficiente il calcolo della matrice della dinamica, in quanto le altre matrici sono già state ricavate nella (2). Dalla teoria sappiamo che

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 - k\bar{x}_1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Posto  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \delta \mathbf{u}$  ( $= \delta \mathbf{u}$  per l'ingresso costante scelto),  $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \delta \mathbf{x}$  e  $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}} + \delta \mathbf{y}$ , il modello linearizzato cercato risulta essere il seguente:

$$\begin{cases} \delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \delta \mathbf{x} + \mathbf{B} \delta \mathbf{u} \\ \delta \mathbf{y} = \mathbf{C} \delta \mathbf{x}. \end{cases} \quad (5)$$

b) Sostituendo i valori corrispondenti ai due punti di equilibrio si osserva che *per il particolare ingresso scelto*, entrambe le matrici della dinamica non dipendono dalla costante  $k$  (quindi anche i corrispondenti autovalori non saranno funzione del parametro  $k$ ):

$$\mathbf{A}' = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{A}'' = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}=\bar{\mathbf{x}}''} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori della matrice  $\mathbf{A}'$  risultano dalla soluzione del relativo polinomio caratteristico  $p(\lambda) = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}'| = (\lambda + 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0$ , ovvero  $\lambda_{1,2,3} = -1$  (tre poli coincidenti reali e negativi). Questo significa che il sistema linearizzato intorno al punto di equilibrio  $\bar{\mathbf{x}}'$  è asintoticamente stabile, ovvero che lo stesso punto di equilibrio  $\bar{\mathbf{x}}'$  è asintoticamente stabile per ogni valore di  $k$ .

La verifica della stabilità del secondo punto di equilibrio dimostrerà facilmente che tale punto è instabile in quanto la matrice  $\mathbf{A}''$  è dotata di un autovalore reale positivo.

Per la soluzione dei restanti punti della traccia si farà riferimento al punto di equilibrio stabile  $\bar{\mathbf{x}}' = \mathbf{0}$  (si noti che in questo caso  $\mathbf{x} = \delta \mathbf{x}$  e  $\mathbf{y} = \delta \mathbf{y}$ , mentre queste uguaglianze non sono valide in generale) e si porrà  $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$ . Si invita lo studente ad esercitarsi considerando un ingresso costante differente, ad esempio  $\bar{\mathbf{u}} = [1/2 \ 0]^\top$ , e a rifare i passaggi precedenti. Si osserverà che le matrici della dinamica dipenderanno dalla scelta del parametro  $k$ , che quindi ne determinerà la stabilità e la collocazione dei corrispondenti autovalori.

c) Dato che nessuna delle matrici del sistema dipende dal parametro  $k$ , anche le proprietà di raggiungibilità ed osservabilità saranno indipendenti dal parametro  $k$ .

Verifichiamo quindi dapprima la proprietà di raggiungibilità costruendo la matrice di raggiungibilità per il punto di equilibrio scelto ( $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$ ):

$$\mathbf{M}_r = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

che risulta essere evidentemente di rango pieno. Il sistema linearizzato è quindi completamente raggiungibile nell'intorno del punto di equilibrio scelto.

Verifichiamo analogamente la proprietà di osservabilità costruendo la matrice di osservabilità:

$$\mathbf{M}_o = [\mathbf{C}^\top \quad \mathbf{A}^\top\mathbf{C}^\top \quad \mathbf{A}^{\top 2}\mathbf{C}^\top] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

che risulta essere anch'essa di rango pieno. Il sistema linearizzato è quindi completamente osservabile nell'intorno del punto di equilibrio scelto.

**d)** Per il punto di equilibrio scelto, come spiegato, non è importante la scelta di del parametro  $k$  in quanto esso è assente nel sistema linearizzato risultante. Nell'ipotesi di piccoli segnali rispetto al punto di equilibrio scelto, ovvero che il modello linearizzato sia valido per gli ingressi assegnati, osserviamo che l'ingresso  $u_1(t) = \delta_{-1}(-t) = 1 - \delta_{-1}(t) = u'_1 - u''_1(t)$ . Per il principio di sovrapposizione degli effetti, valido per il solo modello linearizzato, l'uscita complessiva del sistema sarà la combinazione lineare delle risposte agli ingressi  $u'_1$  (ingresso costante),  $u''_1(t)$  (gradino unitario) ed  $u_2(t) = \sin(5t)$  (segnale sinusoidale). Procediamo quindi al calcolo separato dei tre contributi.

Costruiamo dapprima la funzione di trasferimento dell'intero sistema

$$\mathbf{W}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} + \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & 0 \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2} & 0 \\ \frac{1}{(s+1)^3} & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

dove  $W_{ij}(s)$  rappresenta la funzione di trasferimento dall'ingresso  $j$  all'uscita  $i$ . La  $W_{12}(s) = 0$  in quanto l'uscita  $y_1$  non dipende dall'ingresso  $u_2$  per ovvie ragioni topologiche del sistema.

La risposta all'ingresso costante  $u'_1 = 1$  sarà quindi pari a

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{bmatrix} = \mathbf{W}(0) \begin{bmatrix} u'_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11}(0) \\ W_{21}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

La risposta all'ingresso  $u''_1(t) = \delta_{-1}(t)$  nel dominio di Laplace sarà pari a

$$\mathbf{Y}''(s) = \begin{bmatrix} Y''_1(s) \\ Y''_2(s) \end{bmatrix} = \mathbf{W}(s)\mathcal{L}\left\{\begin{bmatrix} \delta_{-1}(t) \\ 0 \end{bmatrix}\right\} = \mathbf{W}(s) \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{W_{11}(s)}{s} \\ \frac{W_{21}(s)}{s} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

La corrispondente risposta nel dominio del tempo può essere calcolata mediante l'anti-trasformazione della (10) come segue

$$\mathbf{y}''(t) = \begin{bmatrix} y''_1(t) \\ y''_2(t) \end{bmatrix} = \mathcal{L}^{-1}\{\mathbf{Y}''(s)\} = \begin{bmatrix} \mathcal{L}^{-1}\{Y''_1(s)\} \\ \mathcal{L}^{-1}\{Y''_2(s)\} \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Si lascia allo studente il calcolo delle due anti-trasformate. Come elemento di verifica, lo studente può accertarsi che  $\mathbf{y}''(t) = \mathbf{y}'$  per  $t \rightarrow \infty$  in quanto  $u_1(t) = u_1' - u_1''(t) = 0$  per  $t > 0$ .

Per il calcolo del terzo ed ultimo contributo possiamo ricorrere al teorema della risposta armonica, ovvero

$$\mathbf{y}'''(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ y_2'''(t) \end{bmatrix} = |W_{22}(j5)| \sin(5t + \arg(W_{22}(j5))). \quad (12)$$

Si lascia nuovamente allo studente lo svolgimento dei calcoli.

In conclusione la risposta agli ingressi assegnati corrisponderà alla seguente combinazione lineare dei singoli contributi

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}' - \mathbf{y}''(t) + \mathbf{y}'''(t). \quad (13)$$

e) La Figura 1 illustra le quattro coppie (modulo-fase) di diagrammi di Bode (uno per ciascuna coppia ingresso-uscita) e le relative frequenze di taglio a 3dB. I diagrammi relativi alla  $W_{12}(\omega) = 0$  sono ovviamente assenti. Il discente potrà utilizzare i risultati proposti in figura per confrontarli con i diagrammi asintotici che avrà sviluppato su carta.

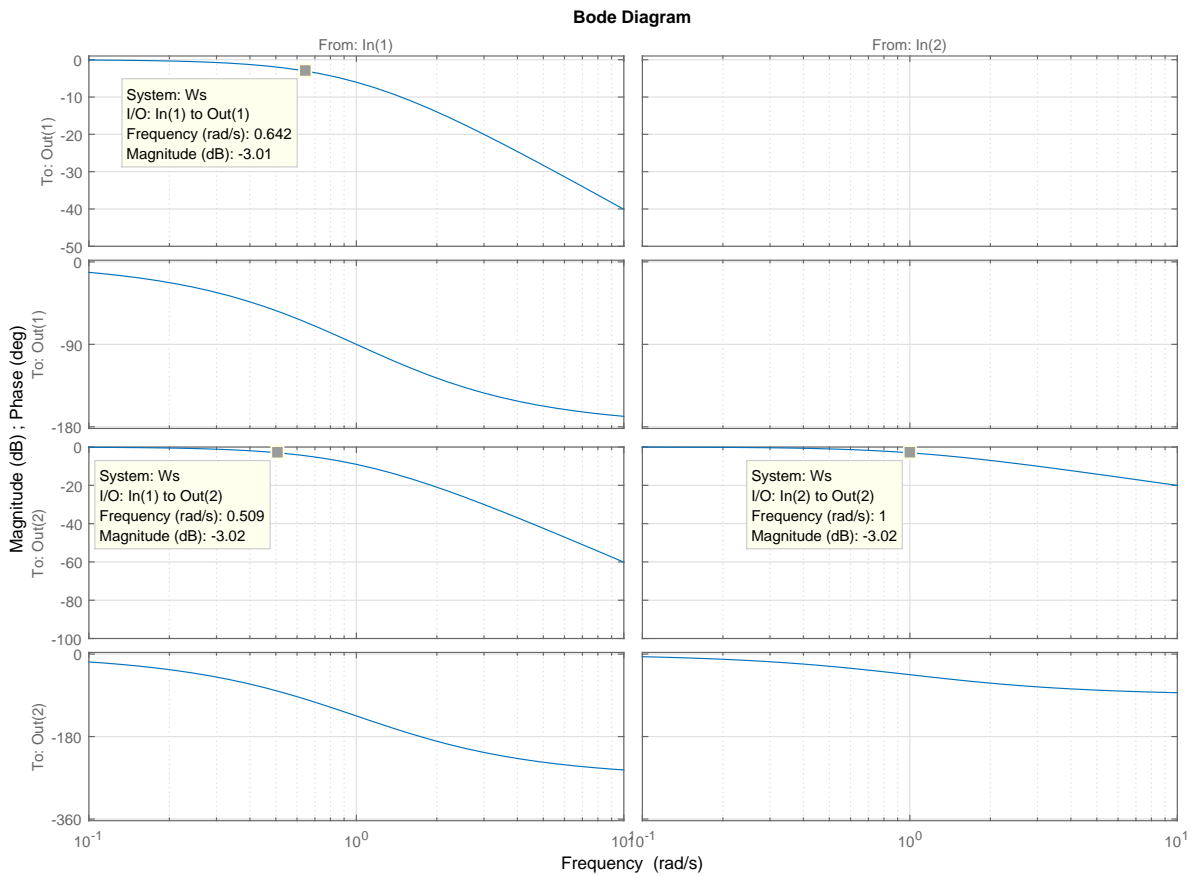


Figure 1: Diagramma di Bode.