Voto

Cognome/Nome & No. Matricola

FONDAMENTI DI SISTEMI DINAMICI

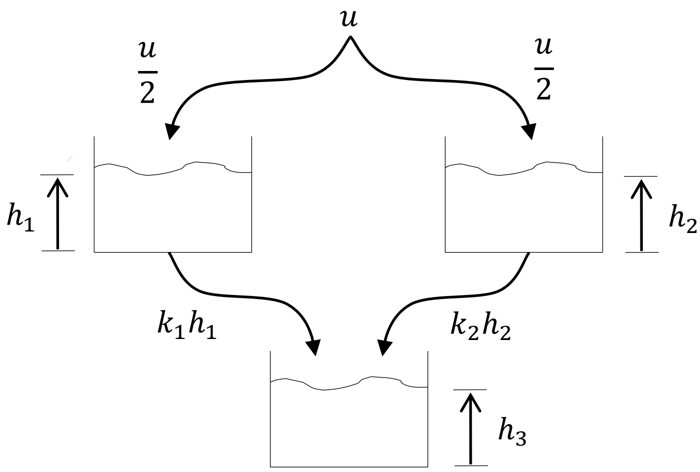
(prof. Vincenzo LIPPIELLO — A.A. 2015–2016)

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni - II anno

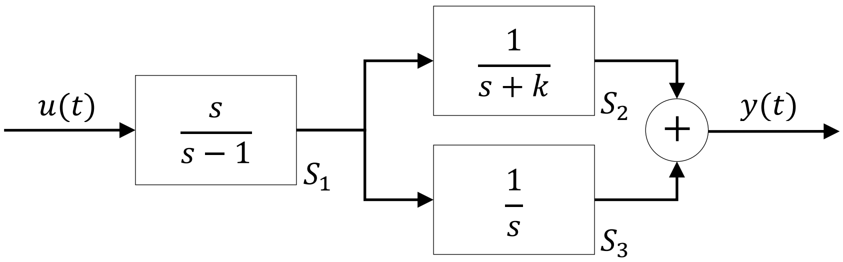
PROVA DEL 14 NOVEMBRE 2016

Rispondere in maniera chiara e sintetica ai seguenti quesiti, indicando Cognome e Nome su ogni foglio manoscritto. La traccia, debitamente compilata, va consegnata insieme al compito svolto. Non è consentito consultare appunti o altro materiale. È assolutamente vietata ogni forma di collaborazione, pena l'annullamento della prova.

a) Si consideri il seguente sistema composto da tre vasche comunicati. Sia u la portata del fluido in ingresso al sistema, sia $A = 5m^2$ la sezione dei serbati, $k_1 = 10m^2/s$ e $k_2 = 5m^2/s$ le costanti di efflusso del fluido. Determinare la rappresentazione di stato del sistema considerando il volume di fluido contenuto nel terzo serbatoio come variabile di uscita. **[5 punti]**



b) Discutere, al variare di k, le proprietà strutturali del seguente sistema: **[10 punti]**



c) Assegnato il seguente sistema con $u(t) = \delta_{-1}(t)$, determinare $\boldsymbol{x}(0^-)$ tale che $y(t)$ sia limitata. **[15 punti]**

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t)$$

FONDAMENTI DI SISTEMI DINAMICI

(prof. Vincenzo LIPPIELLO — A.A. 20152016)

Università degli Studi di Napoli Federico II
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni - II anno

SVOLGIMENTO DELLA PROVA DEL 14 NOVEMBRE 2016

a) Per mettere in forma di stato il sistema di vasche comunicanti è necessario utilizzare l'equazione dinamica che regola la variazione del volume dell'acqua all'interno di una vasca sulla base della portata di ingresso e della portata di uscita. L'equazione in questione è

$$\text{Variazione volume} = \text{Portata in ingresso} - \text{Portata in uscita}$$

Nel nostro sistema si ha quindi

$$A\dot{h}_1(t) = \frac{u(t)}{2} - k_1 h_1(t) \tag{1}$$

$$A\dot{h}_2(t) = \frac{u(t)}{2} - k_2 h_2(t) \tag{2}$$

$$A\dot{h}_3(t) = k_1 h_1(t) + k_2 h_2(t), \tag{3}$$

che possono essere scritte come

$$\dot{h}_1(t) = \frac{u(t)}{2A} - \frac{k_1}{A} h_1(t) \tag{4}$$

$$\dot{h}_2(t) = \frac{u(t)}{2A} - \frac{k_2}{A} h_2(t) \tag{5}$$

$$\dot{h}_3(t) = \frac{k_1}{A} h_1(t) + \frac{k_2}{A} h_2(t). \tag{6}$$

Consideriamo come variabili di stato il livello dell'acqua $h_1(t)$, $h_2(t)$ e $h_3(t)$ delle tre vasche. L'ingresso del sistema è rappresentato dalla portata d'ingresso $u(t)$. Infine, scelgo come uscita del sistema il volume dell'acqua contenuta nel terzo serbatoio, $Ah_3(t)$. Poniamo quindi $x_1(t) = h_1(t)$, $x_2(t) = h_2(t)$, $x_3(t) = h_3(t)$, $y(t) = Ah_3(t)$. si ottengono quindi le seguenti equazioni di stato

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{k_1}{A} x_1(t) + \frac{1}{2A} u(t) \tag{7}$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k_2}{A} x_2(t) + \frac{1}{2A} u(t) \tag{8}$$

$$\dot{x}_3(t) = \frac{k_1}{A} x_1(t) + \frac{k_2}{A} x_2(t) \tag{9}$$

$$y(t) = Ax_3(t), \tag{10}$$

che possono essere riscritte in forma matriciale come segue

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \begin{bmatrix} -\frac{k_1}{A} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_2}{A} & 0 \\ \frac{k_1}{A} & \frac{k_2}{A} & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{2A} \\ \frac{1}{2A} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & A \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{cases} \tag{11}$$

Sostituisco i valori assegnati ottenendo il seguente sistema

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{cases} \tag{12}$$

b) Discutiamo le proprietà strutturali del sistema, al variare del parametro k, attraverso l'algebra dei blocchi. Considero il sottosistema costituito dal parallelo di S_2 ed S_3. Se vi sono poli che compaiono in entrambi i blocchi, perdo sia controllabilità che osservabilità. E' immediato quindi concludere che se $k = 0$ il sistema è non completamente controllabile e non completamente osservabile. In questo caso infatti i blocchi in parallelo presentano la stessa funzione di trasferimento e quindi hanno gli stessi poli.

Risolvendo il parallelo si ottiene un nuovo sistema che indicheremo con S_{23} la cui funzione di trasferimento è la seguente

$$G_{23}(s) = \frac{1}{s+k} + \frac{1}{s} = \frac{2s+k}{s(s+k)} = \frac{2\left(s+\frac{k}{2}\right)}{s(s+k)}. \tag{13}$$

Analizziamo ora la serie di S_1 con S_{23}. Indipendentemente dal parametro k, si ha una cancellazione zero/polo (cancellazione di s) che fa perdere la completa controllabilità. Si può quindi immediatamente concludere che il sistema è non completamente controllabile $\forall k \in \mathbb{R}$. Inoltre, se $k = -2$, ho una cancellazione polo/zero (cancellazione di $s - 1$) che mi fa perdere la completa controllabilità.

Riassumendo:

- il sistema è non completamente controllabile $\forall k \in \mathbb{R}$;
- il sistema è non completamente osservabile per $k = 0$ e $k = -2$.

Per quanto riguarda la stabilità, il sistema originario presenta i tre poli $s_1 = 0$, $s_2 = 1$ e $s_3 = -k$. Il sistema è instabile indipendentemente dal parametro k, data la presenza di un polo a parte reale positiva.

c) La risposta complessiva del sistema, nella variabile complessa s, è composto da una componente in evoluzione libera ed una forzata

$$Y(s) = Y_l(s) + Y_f(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0^-) + \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}U(s). \tag{14}$$

Determino la matrice $\boldsymbol{\Phi}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$

$$\boldsymbol{\Phi}(s) = (s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 & -1 \\ 0 & s+1 & 0 \\ 0 & 0 & s-1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & \frac{1}{(s+1)(s-1)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Si ha inoltre

$$\boldsymbol{\Psi}(s) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\Phi}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & \frac{1}{(s+1)(s-1)} \\ 0 & \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & \frac{s+2}{(s+1)(s-1)} \end{bmatrix}, \tag{16}$$

$$Y_l(s) = \boldsymbol{\Psi}(s)\boldsymbol{x}(0^-) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & \frac{s+2}{(s+1)(s-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ x_{03} \end{bmatrix} = \frac{(x_{01} + x_{03})s - x_{01} + 2x_{03}}{(s+1)(s-1)}, \tag{17}$$

$$W(s) = \boldsymbol{\Psi}(s)\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & \frac{s+2}{(s+1)(s-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad Y_f(s) = 0. \tag{18}$$

L'uscita del sistema è quindi data dalla sola componente libera $Y_l(s)$.

Antitrasformiamo secondo Laplace utilizzando il metodo della scomposizione in fratti semplici:

$$\frac{(x_{01} + x_{03})s - x_{01} + 2x_{03}}{(s+1)(s-1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-1} = \frac{(A+B)s + (-A+B)}{(s+1)(s-1)} \tag{19}$$

$$\begin{cases} A + B = x_{01} + x_{03} \\ -A + B = -x_{01} + 2x_{03} \end{cases} \tag{20}$$

$$2B = 3x_{03} \Rightarrow B = \frac{3}{2}x_{03} \tag{21}$$

$$2A = 2x_{01} - x_{03} \Rightarrow A = x_{01} - \frac{1}{2}x_{03}. \tag{22}$$

La risposta del sistema è costituita da un esponenziale negativo (dovuto al modo di risposta $s = -1$) che converge a 0 per $t \to \infty$, e da un esponenziale positivo (dovuto al modo di risposta $s = 1$) che diverge a $+\infty$ per $t \to \infty$. Perché la risposta sia limitata deve quindi essere annullato il contributo dovuto all'esponenziale positivo, cioé è necessario porre $B = 0$ e quindi $x_{03} = 0$. Abbiamo quindi ∞^2 condizioni iniziali che forniscono un'uscita limitata

$$\boldsymbol{x}(0^-) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{23}$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Con tali condizioni iniziali l'uscita è infatti

$$y(t) = \alpha e^{-t}\delta_{-1}(t). \tag{24}$$