Voto

Cognome/Nome & No. Matricola

FONDAMENTI DI SISTEMI DINAMICI

(prof. Vincenzo LIPPIELLO — A.A. 2015–2016)

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni - II anno

PROVA DEL 19 DICEMBRE 2016

Rispondere in maniera chiara e sintetica ai seguenti quesiti, indicando Cognome e Nome su ogni foglio manoscritto. La traccia, debitamente compilata, va consegnata insieme al compito svolto. Non è consentito consultare appunti o altro materiale. È assolutamente vietata ogni forma di collaborazione, pena l'annullamento della prova.

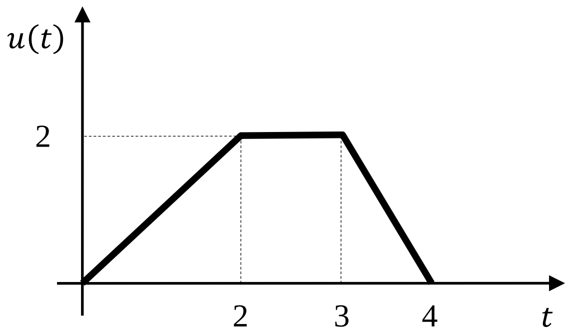
Assegnato il seguente sistema

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(k) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u(k)$$

a) Discutere la stabilità. **[5 punti]**

b) Determinare lo spazio degli stati raggiungibili da $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0}$ e ricavare una rappresentazione di stato equivalente che evidenzi, laddove necessario, le parti raggiungibili e non del sistema. **[10 punti]**

c) Determinare la risposta dello stato $\boldsymbol{x}$ corrispondente a condizioni iniziali nulle e ingresso $u(k)$ ricavato considerando il segnale in figura costante a tratti, con $T = 1$. **[15 punti]**



FONDAMENTI DI SISTEMI DINAMICI

(prof. Vincenzo LIPPIELLO — A.A. 20152016)

Università degli Studi di Napoli Federico II
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni - II anno

SVOLGIMENTO DELLA PROVA DEL 19 DICEMBRE 2016

a) Determiniamo la stabilità del sistema attraverso lo studio degli autovalori della matrice $\boldsymbol{A}$. La matrice $\boldsymbol{A}$ è triangolare superiore, e quindi è immediato concludere che gli autovalori sono $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = -\frac{1}{2}$. Ci sono due autovalori in modulo uguale a 1, ma essendo autovalori distinti non determinano instabilità. Il sistem è comunque semplicemente stabile.

b) Per determinare lo spazio degli stati raggiungibili da $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{0}$, calcoliamo la matrice di raggiungibilità $\boldsymbol{R} = \left[\boldsymbol{B}|\boldsymbol{AB}|\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}\right]$:

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{AB}) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{rank}(\boldsymbol{R}) = 2 \qquad \begin{cases} \det(\boldsymbol{R}) = 0 \\ \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{4} \neq 0 \end{cases}$$

Il sistema, ovvero la coppia $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$, non è completamente raggiungibile e lo spazio di raggiungibilità $\mathcal{X}_R$ avrà dimensione 2 e sarà dato dalle colonne linearmente indipendenti della matrice $\boldsymbol{R}$:

$$\mathcal{X}_R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Per ricavare una rappresentazione di stato in forma di raggiungibilità costruiamo la matrice di trasformazione, la cui inversa avrà come prime 2 colonne una base di $\mathcal{X}_R$ e sarà quindi completata in modo che risulti di rango pieno (si noti che è possibile effettuare infinite scelte, ovvero esistono infinite matrici di trasformazione con le medesime proprietà):

$$\boldsymbol{T}_R^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{T}_R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Posto $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{T}_R\boldsymbol{x}$, la nuova forma di stato sarà la seguente

$$\dot{\boldsymbol{z}} = \underbrace{\boldsymbol{T}_R\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}_R^{-1}}_{\boldsymbol{A}_R}\boldsymbol{z} + \underbrace{\boldsymbol{T}_R\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{B}_R}u = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \end{array}\right]\boldsymbol{z} + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right]u. \tag{3}$$

La nuova rappresentazione di stato ha assunto la classica struttura triangolare alta a blocchi, tipica della forma canonica di raggiungibilità. In questo caso particolare, risultando nulla la matrice sulla sovradiagonale, la matrice ottenuta è diagonale a blocchi. Osserviamo che il blocco inferiore posto sulla diagonale è uno scalare pari a -1, che corrisponderà all'unico autovalore della parte non raggiungibile del sistema. Si noti infatti che l'evoluzione della terza componente del vettore di stato $\boldsymbol{z}$ non è influenzata dall'ingresso, né direttamente, né indirettamente attraverso uno degli altri due stati raggiungibili. Tale proprietà dell'autovalore -1 non era assolutamente deducibile dalla rappresentazione di stato inizialmente assegnata.

c) Per determinare la risposta dello stato $\boldsymbol{x}$ scegliamo di operare nel dominio della variabile complessa, ovvero della trasformata z.

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{B}u(k) \quad \rightarrow \quad z\boldsymbol{X}(z) - z\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(z) + \boldsymbol{B}U(z) \tag{4}$$

e considerando che lo stato iniziale è nullo si ottiene

$$\boldsymbol{X}(z) = (z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}U(z). \tag{5}$$

Calcoliamo la funzione di transizione di stato $\boldsymbol{\Phi}(z)$

$$\boldsymbol{\Phi}(z) = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z+1} & \frac{2}{(z+1)(z-1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{z-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Possiamo quindi calcolare la matrice delle risposte impulsive nello stato $\boldsymbol{\Phi}(z)\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{\Phi}(z)\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{z-1} \\ \frac{1}{z-1} \\ \frac{1}{z-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Osserviamo come il sistema non sia completamente raggiungibile (controllabile) in quanto vi è la perdita di un polo nella matrice delle risposte impulsive nello stato e, in particolare, il polo non controllabile (cancellato) è $z = -1$.

Analizziamo l'ingresso proposto nel dominio del tempo continuo. Esso può essere scritto come funzione lineare a tratti ed in particolare come una sequenza di rampe

$$\begin{aligned} u(t) &= t\delta_{-1}(t) - (t-2)\delta_{-1}(t-2) - 2(t-3)\delta_{-1}(t-3) + 2(t-4)\delta_{-1}(t-4) \\ &= \delta_{-2}(t) - \delta_{-2}(t-2) - 2\delta_{-2}(t-3) + 2\delta_{-2}(t-4). \end{aligned} \tag{8}$$

Posto $t = kT$, con $T = 1$ come assegnato, possiamo scrivere la versione a segnali campionati del segnale di ingresso

$$u(k) = u(kT) = \delta_{-2}(k) - \delta_{-2}(k-2) - 2\delta_{-2}(k-3) + 2\delta_{-2}(k-4). \tag{9}$$

Facendo ora uso della proprietà di linearità, di derivazione in z e di traslazione nel tempo della trasformata z, calcolo le trasformate delle funzioni elementari che compongono l'ingresso considerato

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left[\delta_{-2}(t)\right] = \mathcal{Z}\left[t\delta_{-1}(t)\right] &= \frac{z}{(z-1)^2} \\ \mathcal{Z}\left[\delta_{-2}(t-2)\right] &= \frac{1}{z(z-1)^2} \\ \mathcal{Z}\left[\delta_{-2}(t-3)\right] &= \frac{1}{z^2(z-1)^2} \\ \mathcal{Z}\left[\delta_{-2}(t-4)\right] &= \frac{1}{z^3(z-1)^2}. \end{aligned}$$

La trasformata del segnale di ingresso è quindi

$$\begin{aligned} U(z) &= \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{1}{z(z-1)^2} - \frac{2}{z^2(z-1)^2} + \frac{2}{z^3(z-1)^2} \\ &= \frac{z^2+2z+2}{z^3} \\ &= z^{-1} + 2z^{-2} + 2z^{-3}. \end{aligned} \tag{10}$$

Come potevamo immaginare, il segnale di ingresso risulta essere la trasformata di un treno finito di impulsi, tre per l'esattezza. Se si osserva il segnale di ingresso e lo si campiona con un periodo di $1s$ si noterà facilmente come da esso si generino solo tre impulsi diversi da zero di ampiezza 1, 2, 2, rispettivamente, negli istanti $1s$, $2s$, $3s$. Se avessimo considerato direttamente la funzione campionata, avremmo potuto z-trasformare il treno di impulsi, per i valori non nulli. Essendo

$$\mathcal{Z}\left[\delta(k-n)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k-n) z^{-k} = z^{-n}, \tag{11}$$

avremmo ottenuto per la proprietà di linearità

$$U(z) = z^{-1} + 2z^{-2} + 2z^{-3}. \tag{12}$$

Riprendendo quindi lo studio della risposta dello stato, possiamo ora scrivere

$$X(z) = \mathbf{\Phi}(z)\boldsymbol{B}U(z) = \begin{bmatrix} \frac{1}{z-1} \\ \frac{1}{z-1} \\ \frac{1}{z-\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \frac{z^2+2z+2}{z^3} = \begin{bmatrix} \frac{z^2+2z+2}{z^3(z-1)} \\ \frac{z^2+2z+2}{z^3(z-1)} \\ \frac{z^2+2z+2}{z^3\left(z-\frac{1}{2}\right)} \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Posto $\alpha \in \{1, \frac{1}{2}\}$, antitrasformando il seguente termine

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z^2+2z+2}{z^3(z-\alpha)}\right] &= \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{A}{z}+\frac{B}{z^2}+\frac{C}{z^3}+\frac{D}{z^4}+\frac{E}{z-\alpha}\right] \\
&= \mathcal{Z}^{-1}\left[-\frac{\alpha^2+2\alpha+2}{\alpha^4}-\frac{\alpha^2+2\alpha+2}{\alpha^3}\frac{1}{z}-\frac{2\alpha+2}{\alpha^2}\frac{1}{z^2}-\frac{2}{\alpha}\frac{1}{z^3}\right. \\
&\qquad\left.+\frac{\alpha^2+2\alpha+2}{\alpha^4}\frac{z}{z-\alpha}\right] \\
&= -\frac{\alpha^2+2\alpha+2}{\alpha^4}\delta(k)-\frac{\alpha^2+2\alpha+2}{\alpha^3}\delta(k-1) \\
&\quad -\frac{2\alpha+2}{\alpha^2}\delta(k-2)-\frac{2}{\alpha}\delta(k-3)+\frac{\alpha^2+2\alpha+2}{\alpha^4}\alpha^k\delta_{-1}(k).
\end{aligned} \tag{14}$$

La risposta dello stato $\boldsymbol{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) & x_2(k) & x_3(k) \end{bmatrix}^\top$ corrispondente a condizioni iniziali nulle e ingresso assegnato è la seguente

$$\left\{\begin{array}{l}
x_1(k) = -5\delta(k)-5\delta(k-1)-4\delta(k-2)-2\delta(k-3)+5\delta_{-1}(k) \\
x_2(k) = -5\delta(k)-5\delta(k-1)-4\delta(k-2)-2\delta(k-3)+5\delta_{-1}(k) \\
x_3(k) = -13\delta(k)-26\delta(k-1)-12\delta(k-2)-4\delta(k-3)+52\left(\frac{1}{2}\right)^k\delta_{-1}(k)
\end{array}\right. . \tag{15}$$