Voto

Cognome/Nome & No. Matricola

FONDAMENTI DI SISTEMI DINAMICI

(prof. Vincenzo LIPPIELLO — A.A. 2015–2016)

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni - II anno

PROVA DEL 16 GENNAIO 2017

Rispondere in maniera chiara e sintetica ai seguenti quesiti, indicando Cognome e Nome su ogni foglio manoscritto. La traccia, debitamente compilata, va consegnata insieme al compito svolto. Non è consentito consultare appunti o altro materiale. È assolutamente vietata ogni forma di collaborazione, pena l'annullamento della prova.

Assegnato il seguente sistema

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u(t)$$

e supponendo $u(t)$ costante a tratti, con $\Delta T = 1$s

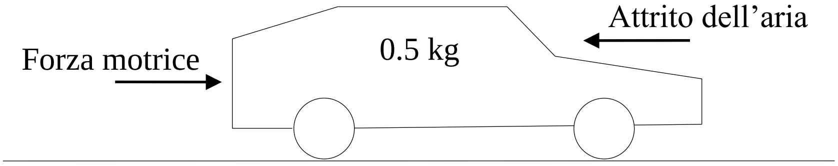
a) Determinare le equazioni di stato del sistema equivalente a tempo discreto. **[10 punti]**

b) Discutere la stabilità e la raggiungibilità del sistema ottenuto al punto a). **[10 punti]**

c) Tracciare i diagrammi di Bode (modulo e fase) della seguente funzione di trasferimento: **[5 punti]**

$$G(s) = \frac{20(s+1)}{(s+2)(s^2+4s+100)}$$

d) Mettere il seguente sistema in forma di stato, supponendo che l'ingresso $u(t)$ sia la forza motrice, il coefficiente di attrito viscoso dell'aria sia pari a 3 e che l'uscita $y(t)$ sia la posizione: **[5 punti]**



FONDAMENTI DI SISTEMI DINAMICI

(prof. Vincenzo LIPPIELLO — A.A. 2015–2016)

Università degli Studi di Napoli Federico II
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni - II anno

SVOLGIMENTO DELLA PROVA DEL 16 GENNAIO 2017

a) Dal sistema a tempo continuo lineare e stazionario, dato nella forma

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}u(t), \tag{1}$$

dobbiamo determinare le equazioni di stato a tempo discreto, nella forma

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \widehat{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{x}(k) + \widehat{\boldsymbol{B}}u(k). \tag{2}$$

Ricordiamo alcuni passaggi dalla teoria. In generale, l'evoluzione dello stato è

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{t-t_0}\boldsymbol{x}(t_0) + \int_{t0^-}^{t} e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}u(\tau)\mathrm{d}\tau, \tag{3}$$

ma essendo l'ingresso costante a tratti con intervallo di campionamento ΔT, avremo che il comportamento dello stato all'interno di ogni singolo intervallo $[k\Delta T, (k+1)\Delta T]$ è costante, ed è esprimibile come

$$\boldsymbol{x}((k+1)\Delta T) = e^{\boldsymbol{A}\Delta T}\boldsymbol{x}(k\Delta T) + \int_{k\Delta T}^{(k+1)\Delta T} e^{\boldsymbol{A}((k+1)|deltaT-\tau)}\boldsymbol{B}u(k\Delta T)\mathrm{d}\tau. \tag{4}$$

É importante osservare come in precedenza l'intervallo fosse $[t_0, t]$ mentre adesso è $[k\Delta T, (k+1)\Delta T]$; abbiamo infatti considerato quest'ultimo nell'ultima espressione scritta. Inoltre $u(t)$ è un ingresso costante su tutto l'intervallo considerato e quindi, nell'ultima espressione scritta, si è potuto scrivere $u(k\Delta T)$ al posto di $u(\tau)$. Poniamo $(k+1)\Delta T = \xi$ ottenendo $-\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}\xi \to \mathrm{d}\tau = -\mathrm{d}\xi$. L'estremo inferiore (superiore) diventerà quindi $\xi = \Delta T$ ($\xi = 0$). Possiamo quindi scrivere

$$\boldsymbol{x}(k+1) = e^{\boldsymbol{A}\Delta T}\boldsymbol{x}(k) - \int_{\Delta T}^{0} e^{\boldsymbol{A}\xi}\boldsymbol{B}\mathrm{d}\xi u(k) \Rightarrow \boldsymbol{x}(k+1) = e^{\boldsymbol{A}\Delta T}\boldsymbol{x}(k) + \int_{0}^{\Delta T} e^{\boldsymbol{A}\xi}\boldsymbol{B}\mathrm{d}\xi u(k). \tag{5}$$

Poniamo $\widehat{\boldsymbol{A}} = e^{\boldsymbol{A}\Delta T}$ e $\widehat{\boldsymbol{B}} = \int_0^{\Delta T} e^{\boldsymbol{A}\xi}\boldsymbol{B}\mathrm{d}\xi$, ottenendo quindi l'espressione (2) cercata. Osserviamo che la matrice $\boldsymbol{A}$ non è invertibile, quindi il termine $e^{\boldsymbol{A}\xi}$ non è integrabile, mentre lo potrebbe essere il termine $e^{\boldsymbol{A}\xi}\boldsymbol{B}$.

Per calcolare le matrici $\widehat{\boldsymbol{A}}$ e $\widehat{\boldsymbol{B}}$ utilizziamo la seguente relazione:

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\right\}. \tag{6}$$

Determiniamo prima $(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}$:

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Possiamo ora ricavare le seguenti espressioni:

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s^2} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} \delta_{-1}(t) & \delta_{-2}(t) \\ 0 & \delta_{-1}(t) \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$\widehat{\boldsymbol{A}} = e^{\boldsymbol{A}T} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$e^{\boldsymbol{A}\xi}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi \\ 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\widehat{\boldsymbol{B}} = \int_0^{\Delta T} e^{\boldsymbol{A}\xi}\boldsymbol{B}\mathrm{d}\xi = \int_0^{\Delta T} \begin{bmatrix} \xi \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{d}\tau = \begin{bmatrix} \left[\frac{1}{2}\xi^2\right]_0^{\Delta T} \\ \\ \left[\xi\right]_0^{\Delta T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\Delta T^2 \\ \Delta T \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Poniamo $\Delta T = 1$ ottenendo

$$\widehat{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \widehat{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

L'equazione di stato tempo discreto cercata sarà pari a

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(k) + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} u(k). \tag{13}$$

b) Determiniamo la stabilità del sistema ottenuto al punto precedente. La matrice $\widehat{\boldsymbol{A}}$ è diagonale superiore e quindi è immediato dedurre che il sistema è dotato di un solo autovalore $\lambda = 1$ con molteplicità 2. Per poter concludere riguardo la stabilità dovremmo andare a valutare la molteplicità dell'unico autovalore trovato nel polinomio minimo. Osservo però che la matrice $\widehat{\boldsymbol{A}}$ è in forma di Jordan e che il mini-blocco di Jordan relativo all'autovalore $\lambda = 1$ ha dimensione 2. Di conseguenza la molteplicità geometrica di $\lambda = 1$ sarà minore di quella algebrica, ed essendo $0 < m_g \leq m_a = 2 \Rightarrow m_g = 1$. Concludiamo quindi che il sistema è **instabile**.

Per studiare la raggiungibilità del sistema determino la matrice di Kalman (o matrice di raggiungibilità) $\boldsymbol{R} = [\widehat{\boldsymbol{B}}|\widehat{\boldsymbol{A}}\widehat{\boldsymbol{B}}]$.

$$\widehat{\boldsymbol{A}}\widehat{\boldsymbol{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \to \mathrm{rank}(\boldsymbol{R}) = 2. \tag{15}$$

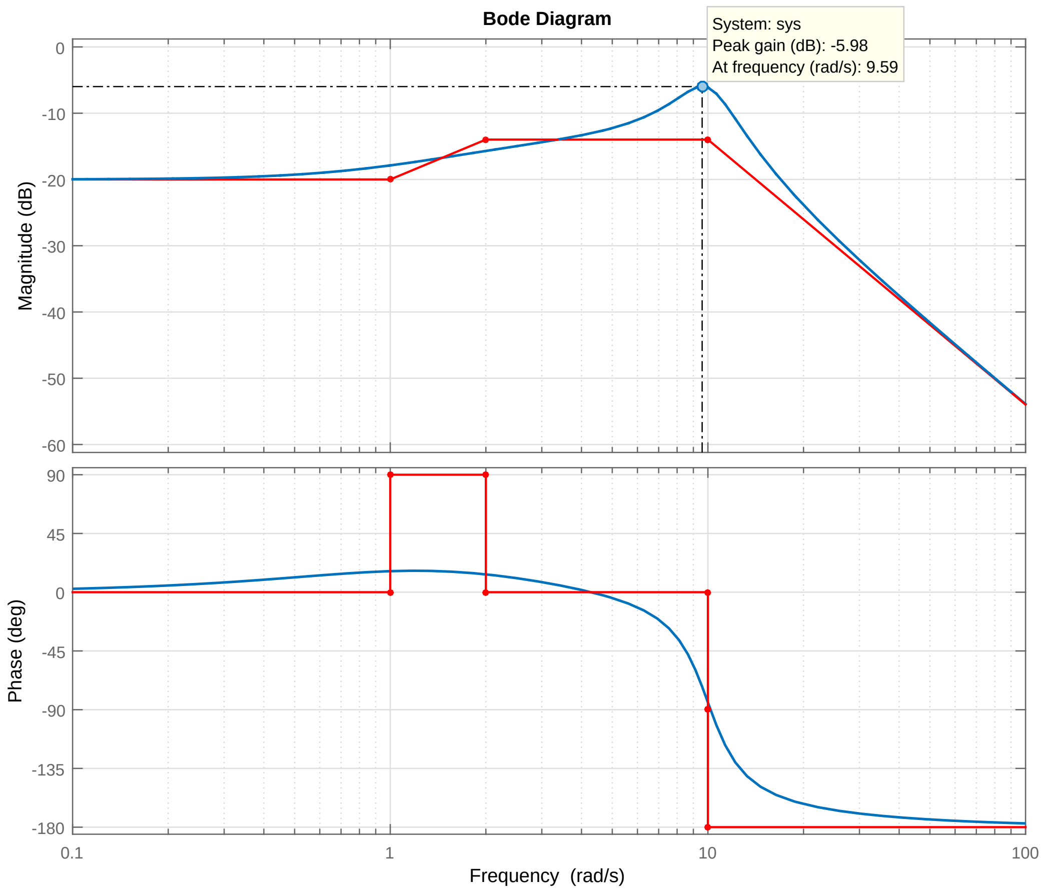


Figure 1: Diagramma di Bode corrispondente alla funzione di trasferimento $G(s)$.

La matrice $\boldsymbol{R}$ è a rango pieno (infatti $\det(\boldsymbol{R}) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1 \neq 0$). Il sistema è **completamente raggiungibile**.

c) La funzione di trasferimento assegnata

$$G(s) = \frac{20(s+1)}{(s+2)(s^2+4s+100)} = \frac{20(1+s)}{2 \cdot 100 \left(1 + \frac{1}{2}s\right)\left(1 + \frac{1}{25}s + \frac{s^2}{100}\right)}, \tag{16}$$

possiede i seguenti poli: -2, $-2 + j9.798$, $-1 - j9.798$, un solo zero in -1, un guadagno $\mu = \frac{20}{2 \cdot 100} = \frac{1}{10} = 0.1$, ed è di tipo 0 ($g = 0$). Con riferimento alla coppia di poli complessi e coniugati, questi corrispondono ad una pulsazione naturale $\omega_n = \sqrt{100} = 10$ e ad uno smorzamento $\zeta = 0.2$. I diagrammi di Bode asintotici e quelli esatti sono riportati in Fig. 1.

d) Per mettere il sistema rappresentato in figura in equazioni di stato è necessario considerare la massa dell'autoveicolo in movimento come puntiforme e considerare tutte le forze in gioco applicate a tale massa puntiforme. In questo modo è possibile utilizzare le equazioni di bilanciamento delle forze. L'equazione di bilanciamento delle forze è

$$\boldsymbol{f}_{\text{ris}} = m \cdot \boldsymbol{a}, \tag{17}$$

dove $\boldsymbol{f}_{\text{ris}}$ è la forza risultante da tutte le forze applicate alla massa puntiforme, m è la massa dell'oggetto puntiforme e $\boldsymbol{a}$ è l'accelerazione impressa a tale oggetto. Nel nostro caso (scalare), alla massa puntiforme sono applicate due forze: la forza di ingresso $u(t)$ e la forza di attrito $f_a(t)$. Quest'ultima ha stessa direzione ma verso contrario alla forza di ingresso, ed è proporzionale alla velocità dell'oggetto in movimento (nel nostro caso, secondo un fattore 3, ovvero $f_a(t) = 3v(t)$). L'equazione di bilanciamento delle forze è quindi

$$u(t) - f_a(t) = m \cdot a(t) \qquad \rightarrow \qquad u(t) - 3v(t) = m \cdot \dot{v}(t). \tag{18}$$

Per mettere il sistema in equazioni di stato, definisco come variabili di stato la posizione e la velocità dell'oggetto puntiforme, cioé $x_1(t) = s(t)$ (posizione) e $x_2(t) = v(t)$ (velocità). Da queste due relazione, e dall'equazione di bilanciamento delle forze, si ottiene:

$$\dot{x}_1(t) = \dot{s}(t) = v(t) = x_2(t) \tag{19}$$

$$\dot{c}_2(t) = \dot{v}(t) = \frac{1}{m}u(t) - \frac{3}{m}v(t) = 2u(t) - 6v(t) = -6x_2(t) + 2u(t). \tag{20}$$

Le equazioni di stato del sistema sono (supponendo di voler misurare, come uscita, la posizione dell'autoveicolo):

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \\ \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t). \end{cases} \tag{21}$$

Notiamo che i poli del sistema sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -6$. I sistema risulta quindi semplicemente stabile. É importante osservare come questo risultato sia compatibile con considerazioni fisiche che possono essere fatte sulla dinamica del sistema in esame. L'autoveicolo, sottoposto ad una forza in ingresso impulsiva, inizia a muoversi ma è destinato a fermarsi a causa della forza di attrito esercitata sull'autoveicolo stesso (e non più controbilanciata da una forza in ingresso). Il veicolo si fermerà però in una posizione diversa da quella di partenza. Anche una forza che tende a svanire nel tempo (si pensi ad esempio ad una forza il cui andamento nel tempo è assimilabile ad un'esponenziale negativa) provocherà l'arresto dell'autoveicolo (sempre in una posizione diversa da quella di partenza) dopo un certo intervallo di tempo. Se invece viene applicata al sistema una forza costante nel tempo, l'autoveicolo sarà sempre in movimento e si allontanerà sempre di più (al crescere del tempo) dalla sua posizione di partenza. In ogni caso l'autoveicolo non potrà più tornare nella sua posizione di partenza. Tutte queste considerazioni giustificano la semplice stabilità del sistema. Se il sistema fosse stato asintoticamente stabile allora esaurito il disturbo sarebbe dovuto tornare (anche in un tempo infinito) alla sua posizione originaria, ovvero quella di partenza (precedente al disturbo e quindi di equilibrio).