Voto		Cognome/Nome & No. Matricola

FONDAMENTI DI SISTEMI DINAMICI

(prof. Vincenzo LIPPIELLO — A.A. 2015–2016)

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni - II anno

PROVA DEL 13 FEBBRAIO 2017

Rispondere in maniera chiara e sintetica ai seguenti quesiti, indicando Cognome e Nome su ogni foglio manoscritto. La traccia, debitamente compilata, va consegnata insieme al compito svolto. Non è consentito consultare appunti o altro materiale. È assolutamente vietata ogni forma di collaborazione, pena l'annullamento della prova.

Si consideri il seguente sistema

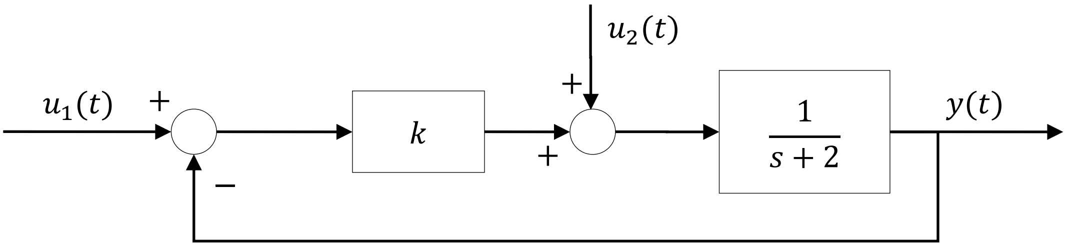
$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}(t) \end{cases}$$

a) Supponendo condizioni iniziali nulle, determinare se sia possibile trovare $u(t)$ in modo da ottenere: **[5 punti]**
   1) $x_1(1) = x_2(1)$
   2) $x_2(1) = -2x_1(1)$

b) Con riferimento al sistema al punto a) e supposto come ingresso un gradino unitario, determinare le condizioni iniziali $\boldsymbol{x}(0)$ in modo tale che la risposta globale sia: **[15 punti]**

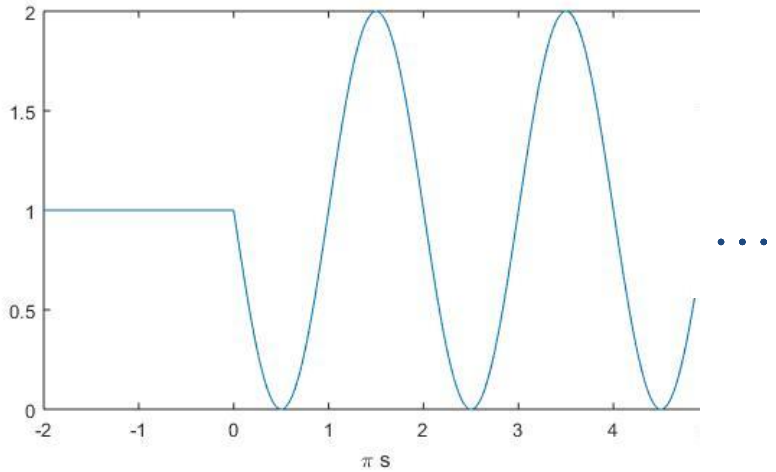
$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-3t} \quad \text{per} \quad t > 0$$

c) Assegnato il sistema in figura



determinare il parametro k in modo che il sistema sia asintoticamente stabile. **[5 punti]**

d) Determinare la funzione di trasferimento di un sistema che esibisce la seguente risposta all'impulso: **[5 punti]**



FONDAMENTI DI SISTEMI DINAMICI

(prof. Vincenzo LIPPIELLO — A.A. 20152016)

Università degli Studi di Napoli Federico II
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni - II anno

SVOLGIMENTO DELLA PROVA DEL 13 FEBBRAIO 2017

a) Determiniamo lo spazio degli stati controllabili per valutare quali sono gli stati raggiungibili. Per studiare la raggiungibilità del sistema determino la matrice di Kalman (o matrice di raggiungibilità)

$$\boldsymbol{R} = [\boldsymbol{B}|\boldsymbol{AB}]\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \to \text{rank}(\boldsymbol{R}) = 1. \tag{1}$$

La matrice $\boldsymbol{R}$ non è a rango pieno (infatti $\det(\boldsymbol{R}) = 4 - 4 = 0$). Il sistema non è **completamente raggiungibile**.

Una base dello spazio degli stati controllabili X_R può essere ricavata considerando una colonna linearmente indipendente della matrice $\boldsymbol{R}$, essendo una la dimensione dello spazio degli stati controllabili. Consideriamo quindi come base il vettore

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad \to \qquad X_R = \{\boldsymbol{x}|\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{v}, \alpha \in \mathbb{R}\}. \tag{2}$$

E' quindi possibile raggiungere tutti gli stati del tipo $x_2(t) = -2x_1(t)$. Pertanto non è possibile ottenere lo stato $x_1(1) = x_2(1)$, mentre è possibile raggiungere lo stato $x_2(1) = -2x_1(1)$:

a.1 Non possibile.

a.2 Possibile.

b) La risposta globale del sistema è data da

$$Y(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}U(s). \tag{3}$$

Determiniamo, nella variabile complessa s, i vari termini che costituiscono la risposta globale del sistema:

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 6 & s+5 \end{bmatrix} \tag{4}$$

$$\det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = (s+2)(s+3) \tag{5}$$

$$(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+5}{(s+2)(s+3)} & \frac{1}{(s+2)(s+3)} \\ -\frac{6}{(s+2)(s+3)} & \frac{s}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+5}{(s+2)(s+3)} & \frac{1}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} = \frac{1}{s+2} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{x}(0) = \frac{x_1(0)s + (5x_1(0) + x_2(0))}{(s+2)(s+3)} \tag{9}$$

$$\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}U(s) = \frac{1}{s+2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s(s+2)}. \tag{10}$$

La risposta globale del sistema è quindi

$$Y(s) = \frac{x_1(0)s^2 + (1 + 5x_1(0) + x_2(0))\, s + 3}{(s+2)(s+3)} \tag{11}$$

Tale forma nella variabile complessa s deve essere uguale alla trasformata di Laplace della funzione nella variabile reale t, $y(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-3t}$.

$$\mathcal{L}\left\{y(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} - e^{-3t}\right\} = \frac{2s+3}{(s+2)(s+3)}. \tag{12}$$

Bisogna quindi imporre

$$\begin{cases} x_1(0) = 0 \\ 1 + 5x_1(0) + x_2(0) = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 1 \end{cases}. \tag{13}$$

Le condizioni iniziali richieste sono

$$\boldsymbol{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

c) Determiniamo l'espressione dell'uscita nella variabile complessa s.

$$Y(s) = \frac{1}{s+2}\left(U_2(s) + k\left(U_1(s) - Y(s)\right)\right) = \frac{k}{s+2}U_1(s) + \frac{1}{s+2}U_2(s) - \frac{k}{s+2}Y(s) \tag{15}$$

$$\left(1 + \frac{k}{s+2}\right)Y(s) = \frac{k}{s+2}U_1(s) + \frac{1}{s+2}U_2(s) \tag{16}$$

$$Y(s) = \frac{k}{s+2+k}U_1(s) + \frac{1}{s+2+k}U_2(s). \tag{17}$$

Il sistema in esame presenta quindi un unico polo in $s = -2 - k$. Perchè sia garantita la stabilità (BIBO) deve essere

$$-s - k < 0 \quad \Rightarrow \quad k > -2. \tag{18}$$

d) Il segnale rappresentato in figura è un segnale sinusoidale con modulo unitario e periodo π, traslato in ampiezza di una unità. La forma esatta del segnale è

$$h(t) = 1 - \sin(t). \tag{19}$$

Dalla teoria sappiamo che la funzione di trasferimento di un sistema coincide con la trasformata di Laplace del della sua risposta all'impulso. Passando quindi nel campo della variabile complessa s si ha

$$G(s) = \mathcal{L}\left\{h(t)\right\} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2+1} = \frac{s^2 - s + 1}{s(s^2+1)}. \tag{20}$$