Voto

Cognome/Nome & No. Matricola

Fondamenti di Sistemi Dinamici

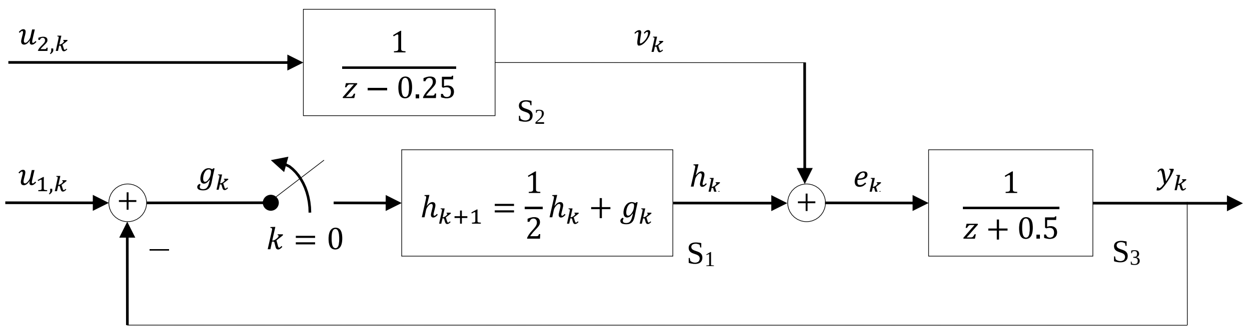
(prof. Vincenzo LIPPIELLO — A.A. 2015–2016)

Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni - II anno

PROVA DEL 13 MARZO 2017

Rispondere in maniera chiara e sintetica ai seguenti quesiti, indicando Cognome e Nome su ogni foglio manoscritto. La traccia, debitamente compilata, va consegnata insieme al compito svolto. Non è consentito consultare appunti o altro materiale. È assolutamente vietata ogni forma di collaborazione, pena l'annullamento della prova.

a) Per il sistema in figura, calcolare la risposta all'uscita $\forall k$ supponendo $u_{1,k} = 1$ e $u_{2,k} = 2$. **[20 punti]**



b) Si consideri il seguente sistema:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 3 & k \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} h \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Determinare per quali valori di k e h il sistema è completamente raggiungibile. **[5 punti]**

c) Disegnare i diagrammi di Bode asintotici per la seguente funzione di trasferimento: **[5 punti]**

$$G(s) = \frac{s^2 + s + 25}{s^2 \left(\frac{s}{100} + 1 \right)}$$

FONDAMENTI DI SISTEMI DINAMICI

(prof. Vincenzo LIPPIELLO — A.A. 20152016)

Università degli Studi di Napoli Federico II
Corso di Laurea in Ingegneria Elettronica e delle Telecomunicazioni - II anno

SVOLGIMENTO DELLA PROVA DEL 13 MARZO 2017

a) Consideriamo dapprima il caso $k < 0$. Essendo l'interruttore chiuso, il sistema è sottoposto a entrambi gli ingressi $u_{1,k}$ e $u_{2,k}$. Per determinare il movimento dell'uscita possiamo applicare il principio di sovrapposizione degli effetti, vista la linearità, quanto meno a tratti, del sistema in esame. Potremo quindi scrivere la funzione di trasferimento (f.d.t.) del sistema complessivo come segue

$$\boldsymbol{G}(z) = \begin{bmatrix} G_{1,1}(z) & G_{1,2}(z) \end{bmatrix}, \tag{1}$$

dove $G_{1,1}(z)$ è la f.d.t. del sistema quando è presente il solo ingresso $u_{1,k}$. Ricaviamo la f.d.t. del sottosistema S_1 attraverso la Z-trasformata della equazione alle differenze assegnata nella traccia

$$h_{k+1} = \frac{1}{2}h_k + g_k \quad \xrightarrow{\mathcal{Z}} \quad zH(z) = \frac{1}{2}H(z) + G(z) \quad \rightarrow \quad G_1(z) = \frac{H(z)}{G(z)} = \frac{1}{z - \frac{1}{2}}. \tag{2}$$

Annullando $u_{2,k}$ la variabile v_k sarà egualmente nulla, quindi otterremo

$$G_{1,1}(z) = \left.\frac{Y(z)}{U_1(z)}\right|_{u_2=0} = \frac{G_1(z)G_3(z)}{1 + G_1(z)G_3(z)} = \frac{1}{\left(z - \frac{1}{2}\right)\left(z + \frac{1}{2}\right) + 1} = \frac{1}{z^2 + \frac{3}{4}}. \tag{3}$$

Procedendo in modo analogo per il caso in cui $u_{1,k} = 0$, otterremo

$$G_{1,2}(z) = \left.\frac{Y(z)}{U_2(z)}\right|_{u_1=0} = G_2(z) \cdot \frac{G_3(z)}{1 + G_1(z)G_3(z)} = \frac{z - \frac{1}{2}}{\left(z - \frac{1}{4}\right)\left(z^2 + \frac{3}{4}\right)}. \tag{4}$$

Si può quindi comporre la f.d.t. complessiva del sistema

$$\boldsymbol{G}(z) = \frac{\begin{bmatrix} z - \frac{1}{4} & z - \frac{1}{2} \end{bmatrix}}{\left(z - \frac{1}{4}\right)\left(z^2 + \frac{3}{4}\right)}. \tag{5}$$

La risposta del sistema per $k < 0$ all'ingresso costante $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^\top$ può essere calcolata considerando il guadagno statico del sistema

$$y(k) = \left.\boldsymbol{G}(z)\right|_{z=1} \boldsymbol{u} = \frac{\begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{4} & 1 - \frac{1}{2} \end{bmatrix}}{\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{3}{4}\right)} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{4}{3} \qquad k < 0. \tag{6}$$

Procediamo ora al calcolo del movimento dell'uscita del sistema per $k \geq 0$. Osservando la topologia del sistema, risulta conveniente calcolare il valore della variabile v_k. Infatti, essendo il sottosistema S_2 sottoposto ad un ingresso costante $\forall k$, la sua uscita risulterà anch'essa costante $\forall k$. In questo modo eviteremo di coinvolgere direttamente il sottosistema S_2 nel calcolo dell'uscita.

$$v_k(k) = G_2(z)\big|_{z=1} u_{2,k} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \cdot 2 = \frac{8}{3}. \tag{7}$$

La presenza di un interruttore determina una discontinuità istantanea nella topologia del sistema. Il sistema presenta dunque una linearità a tratti con due differenti topologie, una valida per $k < 0$ ed una valida per $k \geq 0$. La continuità dello stato del sistema è comunque sempre garantita e può essere utilizzata per calcolare l'uscita del sistema. Procediamo quindi alla composizione di una rappresentazione i-s-u del sistema mediante la composizione delle i-s-u dei singoli sottosistemi componenti.

Per il sottosistema S_1, posto $x_{1,k} = h_k$, si ha

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \frac{1}{2}x_1(k) + g(k) \\ h(k) = x_1(k) \end{cases}. \tag{8}$$

Analogamente, posto $x_{2,k} = y_k$, per il sottosistema S_3 (dopo aver anti-trasformato la f.d.t. $G_3(z)$) si ha

$$\begin{cases} x_2(k+1) = -\frac{1}{2}x_2(k) + e(k) \\ y(k) = x_2(k) \end{cases}. \tag{9}$$

Per $k < 0$ la topologia del sistema determina le seguenti relazioni

$$e_k = v_k + h_k = v_k + x_{1,k} \tag{10}$$

$$g_k = u_{1,k} - y_k = u_{1,k} - x_{2,k}, \tag{11}$$

Pertanto una rappresentazione i-s-u del sistema complessivo è la seguente

$$\begin{cases} x_1(k+1) = \frac{1}{2}x_1(k) - x_2(k) + u_1(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) - \frac{1}{2}x_2(k) - v(k) \\ y(k) = x_2(k) \end{cases}, \tag{12}$$

ovvero in forma matriciale

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{\nu} \\ y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(k) \end{cases}, \tag{13}$$

dove $\boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} u_1 & v \end{bmatrix}^\top$.

Determiniamo l'evoluzione dello stato per $k \leq 0$ al fine di determinare il valore dello stato all'istante $k = 0$, istante in cui si realizza la discontinuità dovuta all'interruttore. Calcoliamo dapprima la matrice delle risposte impulsive nello stato del sistema

$$H(z) = (z\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} z-\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & z+\frac{1}{2} \end{bmatrix}^{-1} \boldsymbol{I} = \frac{\begin{bmatrix} z+\frac{1}{2} & -1 \\ 1 & z-\frac{1}{2} \end{bmatrix}}{z^2+\frac{3}{4}}. \tag{14}$$

Pertanto la risposta nello stato all'ingresso $\boldsymbol{\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 8/3 \end{bmatrix}^\top$ è

$$\boldsymbol{x}(k) = H(z)|_{z=1}\,\boldsymbol{\nu} = \frac{4}{7}\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{8}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}(0). \tag{15}$$

Quindi lo stato all'istante $k = 0$ sarà $x_{1,0} = -\frac{2}{3}$ e $x_{2,0} = \frac{4}{3}$.

Per $k \geq 0$ evidentemente il sottosistema S_1 risulterà essere in evoluzione libera, quindi

$$h(k) = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{A}_1^k x_{1,0} = 1\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \qquad k \geq 0, \tag{16}$$

dove le matrici $\boldsymbol{C}_1$ e $\boldsymbol{A}_1$ sono le matrici definite in precedenza nella i-s-u del sottosistema S_1. Possiamo quindi determinare l'espressione della variabile $e(k)$, che sarà di ingresso al sottosistema S_3

$$e(k) = \frac{8}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k. \tag{17}$$

Infine, la risposta del sottosistema S_3 per $k \geq 0$ sarà data, scomponendola in evoluzione libera e forzata, da

$$y(k) = y_l(k) + y_f(k), \tag{18}$$

dove la risposta libera è

$$y_l(k) = \boldsymbol{C}_3\boldsymbol{A}_3^k x_{2,0} = 1\left(-\frac{1}{2}\right)^k\frac{4}{3} = \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^k \qquad k \geq 0, \tag{19}$$

dove le matrici $\boldsymbol{C}_3$ e $\boldsymbol{A}_3$ sono le matrici definite in precedenza nella i-s-u del sottosistema S_3, mentre la risposta forzata si ottiene nel dominio della z

$$Y_f(z) = G_3(z)E(z) = \frac{1}{z+\frac{1}{2}}\left(\frac{8}{3}\frac{z}{z-1} - \frac{2}{3}\frac{z}{z-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{10}{9}\frac{z}{z+\frac{1}{2}} - \frac{2}{3}\frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{16}{9}\frac{z}{z-1}. \tag{20}$$

Anti-trasformando

$$y_f(k) = -\frac{10}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^k - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{16}{9}. \tag{21}$$

Componendo la risposta libera e forzata otteniamo

$$y(k) = -\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \frac{16}{9} \qquad k \geq 0. \tag{22}$$

b) Calcoliamo la matrice di raggiungibilità e verifichiamo per quali valori delle variabili k e h il corrispondente determinate, dato che il sistema in esame ha un solo ingresso, sia diverso da zero.

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h & 3h+k \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \tag{23}$$

da cui ricaviamo il determinante $\det \boldsymbol{R} = 3h - 3h - k = -k$. Quindi $\det \boldsymbol{R} \neq 0 \ \forall h, k \neq 0$.

c) Il diagramma asintotico di Bode della f.d.t. assegnata è riportato in Figura 1.

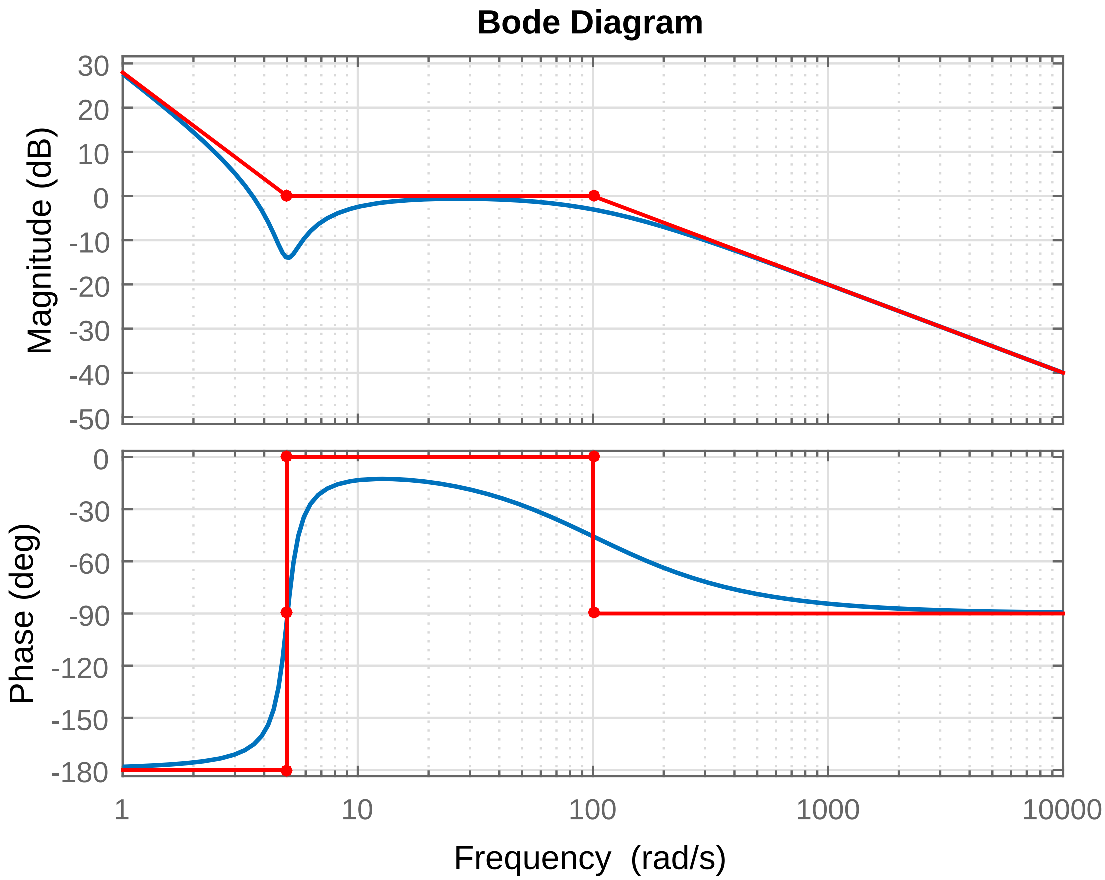


Figure 1: Diagramma di Bode corrispondente alla funzione di trasferimento assegnata al punto c).