Esercizio

Calcolare e^{At} e A^k per la matrice

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

1. Calcolo del polinomio caratteristico di A

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda-3 & 1 & 1 \\ -1 & \lambda-1 & 1 \\ -2 & 2 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

$$= (\lambda-3)\det\begin{pmatrix} \lambda-1 & 1 \\ 2 & \lambda \end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & \lambda \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} -1 & \lambda-1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda-3)\left[\lambda(\lambda-1)-2\right] - (-\lambda+2) + \left[-2+2(\lambda-1)\right]$$

$$= (\lambda-3)(\lambda^2-\lambda-2) + (\lambda-2) + (2\lambda-4)$$

$$= \lambda^3-\lambda^2-2\lambda-3\lambda^2+3\lambda+6+\lambda-2+2\lambda-4$$

$$= \lambda^3-4\lambda^2+4\lambda$$

$$= \lambda(\lambda^2-4\lambda+4)$$

$$= \lambda(\lambda-2)^2$$

2. Calcolo degli autovalori

$\lambda_1=0$

$\lambda_2=2$

3. Calcolo delle molteplicità algebriche

$\mu_1=1$

$\mu_2=2$

4. Calcolo delle molteplicità geometriche

- per λ_1:

$$0 < \nu_1 \leq \mu_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \nu_1 = 1$$

- per λ_2:

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

riduzione a scala di Gauss-Jordan

riga 2 ⟵ riga 2 − riga 1

riga 3 ⟵ riga 3 − 2 riga 1

Dalla riduzione a scala, osserviamo che rango $(A - \lambda_2 I) = 1$.

Quindi:

$$\nu_2 = \dim\left(\ker(A - \lambda_2 I)\right) = 3 - \text{rango}\left(A - \lambda_2 I\right) = 3 - 1 = 2$$

$n = 3$ dimensione di A

Riassumendo:

$\nu_1 = 1$

$\nu_2 = 2$

5. Confronto delle molteplicità

$\mu_1 = 1 = \nu_1$

$\mu_2 = 2 = \nu_2$

Quindi, per entrambi gli autovalori, molteplicità algebrica e geometrica coincidono $\Rightarrow$ A è diagonalizzabile

Dato che $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ e $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, siamo nel caso di matrice diagonalizzabile con tutti autovalori reali.

6. Calcolo degli autovettori

- per λ_1:

$$A-\lambda_1 I = \begin{bmatrix}3 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & -2 & 0\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 3 & -1 & -1\\ 2 & -2 & 0\end{bmatrix} \longrightarrow$$

scambio riga1 e riga2

$$\longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & -4 & 2\\ 0 & -4 & 2\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

riga2 $\longleftarrow$ riga2 -3 riga1 riga2 $\longleftarrow$ $-\frac{1}{2}$ riga2

riga3 $\longleftarrow$ riga3 -2 riga1 riga3 $\longleftarrow$ riga3 $-$ riga2

sistema omogeneo: $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=0\\ 2x_2-x_3=0\end{cases}$

Posto $x_3=\alpha$:

$$x_2=\frac{x_3}{2}=\frac{\alpha}{2},$$

$$x_1=-x_2+x_3=-\frac{\alpha}{2}+\alpha=\frac{\alpha}{2}$$

Dunque l'autospazio $\mathcal{V}_1=\ker(A-\lambda_1 I)$ è dato da

$$\mathcal{V}_1=\left\{ v=\begin{bmatrix}\frac{\alpha}{2}\\ \frac{\alpha}{2}\\ \alpha\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{bmatrix} : \alpha\in\mathbb{C}\right\}$$

Scegliendo $\alpha=2$, il vettore

$v_1=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$ è una possibile base dell'autospazio $\mathcal{V}_1$.

- per λ_2:

Riprendiamo la riduzione a scala di $A-\lambda_2 I$ fatta in precedenza.

<u>sistema omogeneo</u>: $x_1 - x_2 - x_3 = 0$

Posto $x_2 = \alpha$ e $x_3 = \beta$:

$x_1 = x_2 + x_3 = \alpha + \beta$

Dunque l'autospazio $\mathcal{V}_2 = \ker(A - \lambda_2 I)$ è dato da

$$\mathcal{V}_2 = \left\{ v = \begin{bmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_2} + \beta \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_3} \;:\; \alpha, \beta \in \mathbb{C} \right\}$$

I vettori $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ costituiscono una possibile base dell'autospazio $\mathcal{V}_2$.

7. Costruzione di T

$$T = \Big[\underbrace{v_1}_{\text{base di } \mathcal{V}_1} \,\vdots\, \underbrace{v_2 \;\; v_3}_{\text{base di } \mathcal{V}_2} \Big] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

8. Matrice $\tilde{A}$

$$\tilde{A} = T^{-1} A T = \left[\begin{array}{c:cc} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

<u>NOTA</u> - scritta senza aver dovuto calcolare T^{-1}, ma applicando la teoria.

9. Matrici $e^{\tilde{A}t}$ e $\tilde{A}^k$

$$e^{\tilde{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix}$$

10. Calcolo di T^{-1}

$$T^{-1} = \frac{1}{\det(T)} \mathrm{Agg}(T) = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(T) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -2$$

[sviluppato rispetto alla terza colonna]

11. Matrici e^{At} e A^k

$$e^{At} = T e^{\tilde{A}t} T^{-1} = \ldots = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-1+3e^{2t}) & \frac{1}{2}(1-e^{2t}) & \frac{1}{2}(1-e^{2t}) \\ \frac{1}{2}(-1+e^{2t}) & \frac{1}{2}(1+e^{2t}) & \frac{1}{2}(1-e^{2t}) \\ -1+e^{2t} & 1-e^{2t} & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^k = T \tilde{A}^k T^{-1} = \ldots = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(-0^k+3\cdot 2^k) & \frac{1}{2}(0^k-2^k) & \frac{1}{2}(0^k-2^k) \\ \frac{1}{2}(-0^k+2^k) & \frac{1}{2}(0^k+2^k) & \frac{1}{2}(0^k-2^k) \\ -0^k+2^k & 0^k-2^k & 0^k \end{bmatrix}$$

NOTA - $0^k = \begin{cases} 1 & \text{se } k=0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Esercizio

Calcolare e^{At} e A^k per la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

1. Calcolo degli autovalori

Partizionando la matrice A come segue:

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ \hline -2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline A_3 & A_2 \end{array}\right]$$

riconosciamo una struttura triangolare inferiore a blocchi, percui gli autovalori di A coincidono con gli autovalori di A_1 e A_2.

$$p_{A_1}(\lambda) = \det\begin{pmatrix} \lambda & -2 \\ 2 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 4 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2i, \quad \lambda_2 = \lambda_1^* = -2i$$

$$A_2 = \left[\tfrac{1}{2}\right] \quad \Rightarrow \quad \lambda_3 = \frac{1}{2}$$ (blocchetto scalare)

Dato che la matrice A ha tre autovalori distinti, essa e` diagonalizzabile (su $\mathbb{C}$, perche` $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$).

⇒ Siano nel caso di matrice diagonalizzabile con autovalori complessi.

2. Calcolo degli autovettori

- per λ_1: (NOTA- consideriamo l'autovalore complesso con parte immaginaria positiva)

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -2i & 2 & 0 \\ -2 & -2i & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-2i \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ 1 & i & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-2i \end{bmatrix} \longrightarrow$$

riga 1 $\longleftarrow \frac{1}{2}i$ riga 1

riga 2 $\longleftarrow -\frac{1}{2}$ riga 2

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}+2i & \frac{1}{2}-2i \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}+2i & \frac{1}{2}-2i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

riga2 $\longleftarrow$ riga2 - riga1

riga3 $\longleftarrow$ riga3 + 2 riga1

scambio riga2 e riga3

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

riga2 $\longleftarrow \dfrac{1}{-\frac{1}{2}+2i}$ riga2

sistema omogeneo: $\begin{cases} x_1 + i x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

Posto $x_3 = \alpha$:

$x_2 = x_3 = \alpha$

$x_1 = -i x_2 = -i\alpha$

Dunque l'autospazio $V_1 = \ker(A - \lambda_1 I)$ è dato da

$$V_1 = \left\{ v = \begin{bmatrix} -i\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_1} \; : \; \alpha \in \mathbb{C} \right\}$$

$$v_1 = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_1^{(1)} \text{ parte reale}} + i \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_1^{(2)} \text{ parte immaginaria}}$$

- per λ_3:

$$A-\lambda_3 I = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

riga1 $\longleftarrow$ -2 riga1

riga3 $\longleftarrow$ riga3 $-$ riga2

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & -\frac{17}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

riga2 $\longleftarrow$ riga2 $+ 2$ riga1 riga2 $\longleftarrow$ $-\frac{2}{17}$ riga2

sistema omogeneo: $\begin{cases} x_1 - 4x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$

Posto $x_3 = \alpha$:

$x_2 = 0$

$x_1 = 4x_2 = 0$

Dunque l'autospazio $V_3 = \ker(A-\lambda_3 I)$ e' dato da

$$V_3 = \left\{ v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_3} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

3. Costruzione di T

$$T = \left[\, v_1^{(1)} \;\; v_1^{(2)} \,\vdots\, v_3 \,\right] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. Matrice $\tilde{A}$

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \left[\begin{array}{cc|c} \sigma_1 & \omega_1 & 0 \\ -\omega_1 & \sigma_1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_3 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 2i = \sigma_1 + i\omega_1$

$\Rightarrow \sigma_1 = 0\,,\ \omega_1 = 2$

NOTA - $\tilde{A}$ è stata scritta senza calcolare T^{-1}, ma applicando i risultati noti dalla teoria.

5. Matrici $e^{\tilde{A}t}$ e $\tilde{A}^k$

$$e^{\tilde{A}t} = \left[\begin{array}{cc|c} e^{\sigma_1 t}\cos(\omega_1 t) & e^{\sigma_1 t}\sin(\omega_1 t) & 0 \\ -e^{\sigma_1 t}\sin(\omega_1 t) & e^{\sigma_1 t}\cos(\omega_1 t) & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) & 0 \\ -\sin(2t) & \cos(2t) & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{1}{2}t} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}^k = \left[\begin{array}{cc|c} \rho_1^k\cos(k\theta_1) & \rho_1^k\sin(k\theta_1) & 0 \\ -\rho_1^k\sin(k\theta_1) & \rho_1^k\cos(k\theta_1) & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_3^k \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 2^k\cos(k\frac{\pi}{2}) & 2^k\sin(k\frac{\pi}{2}) & 0 \\ -2^k\sin(k\frac{\pi}{2}) & 2^k\cos(k\frac{\pi}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{2})^k \end{bmatrix}$$

$\rho_1 = \sqrt{\sigma_1^2 + \omega_1^2} = 2$

$\theta_1 = \mathrm{acos}\left(\frac{\sigma_1}{\rho_1}\right) = \mathrm{acos}(0) = \frac{\pi}{2}$

6. Calcolo di T^{-1}

$$T^{-1} = \frac{1}{\det(T)} \mathrm{Agg}(T) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(T) = 1$

7. Matrici e^{At} e A^k

$$e^{At} = T e^{\tilde{A}t} T^{-1} = \ldots = \begin{bmatrix} \cos(2t) & \sin(2t) & 0 \\ -\sin(2t) & \cos(2t) & 0 \\ -\sin(2t) & \cos(2t) - e^{\frac{1}{2}t} & e^{\frac{1}{2}t} \end{bmatrix}$$

$$A^k = T\tilde{A}^k T^{-1} = \;\ldots\; = \begin{bmatrix} 2^k\cos(k\frac{\pi}{2}) & 2^k\sin(k\frac{\pi}{2}) & 0 \\ -2^k\sin(k\frac{\pi}{2}) & 2^k\cos(k\frac{\pi}{2}) & 0 \\ -2^k\sin(k\frac{\pi}{2}) & 2^k\cos(k\frac{\pi}{2}) - (\frac{1}{2})^k & (\frac{1}{2})^k \end{bmatrix}$$

Esercizio

Calcolare e^{At} e A^k per la matrice

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 3\\ -3 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

1. Calcolo degli autovalori

Partizionando la matrice A come segue:

$$A=\left[\begin{array}{cc|c}-1 & 0 & 3\\ -3 & 2 & 2\\ \hline 0 & 0 & 2\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c}A_1 & A_3\\ \hline 0 & A_2\end{array}\right]$$

riconosciamo una struttura triangolare superiore a blocchi, per cui gli autovalori di A coincidono con quelli di A_1 e A_2

$$A_1=\left[\begin{array}{c|c}-1 & 0\\ \hline -3 & 2\end{array}\right]$$ struttura triangolare inferiore $\Rightarrow$ autovalori: $-1, 2$

$$A_2=[2]$$ blocchetto scalare $\Rightarrow$ autovalore: 2

autovalori di A:

$\lambda_1=-1$ con $\mu_1=1$

$\lambda_2=2$ con $\mu_2=2$

2. Calcolo delle molteplicità geometriche

- per λ_1:

$$0<\nu_1\leq\mu_1=1 \Rightarrow \nu_1=1$$

- per λ_2:

$$A-\lambda_2 I=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 3\\ -3 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc}1 & 0 & -1\\ \hline 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

riga1 $\longleftarrow -\frac{1}{3}$ riga 1

riga 2 $\longleftarrow$ $-$riga2 $+$ riga 1

Dalla riduzione a scala, osserviamo che rango$(A-\lambda_2 I)=2$.

Quindi:

$$\nu_2 = \dim(\ker(A-\lambda_2 I)) = \underset{\substack{\downarrow \\ n=3 \text{ dimensione di } A}}{3} - \text{rango}(A-\lambda_2 I) = 1.$$

3. Confronto delle molteplicità

$\mu_1 = 1 = \nu_1$

$\mu_2 = 2 > 1 = \nu_2$

Quindi, la matrice A non è diagonalizzabile.

Siamo nel caso particolare di matrice jordanizzabile analizzato.

4. Calcolo degli autovettori

- per λ_1:

$$A-\lambda_1 I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \underset{\text{scambio riga 1 e riga 2}}{\begin{bmatrix} -3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}} \longrightarrow \underset{\substack{\text{riga 1} \leftarrow -\frac{1}{3}\text{riga 1} \\ \text{riga 2} \leftarrow \frac{1}{3}\text{riga 2} \\ \text{riga 3} \leftarrow \text{riga 3} - \text{riga 2}}}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}$$

sistema omogeneo: $\begin{cases} x_1 - x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

Posto $x_2 = \alpha$:

$x_3 = 0$

$x_1 = x_2 + \frac{2}{3}x_3 = \alpha$

Dunque l'autospazio $\mathcal{V}_1 = \ker(A-\lambda_1 I)$ è dato da:

$$\mathcal{V}_1 = \left\{ v = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\to\, v_1} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

- per λ_2:

Riprendiamo la riduzione a scala di $A-\lambda_2 I$ fatta in precedenza.

sistema omogeneo: $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

Posto $x_2 = \alpha$:

$x_3 = 0$

$x_1 = x_3 = 0$

Dunque l'autospazio $V_2 = \ker(A-\lambda_2 I)$ è dato da:

$$V_2 = \left\{ v = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_2} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Dobbiamo calcolare ora l'autovettore generalizzato v_3 tale che:

$$(A-\lambda_2 I) v_3 = v_2$$

$$\left[\underbrace{\begin{matrix} -3 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A-\lambda_2 I} \;\middle|\; \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}}_{v_2} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$\text{riga}1 \leftarrow -\frac{1}{3}\text{riga}1$

$\text{riga}2 \leftarrow -\text{riga}2 + \text{riga}1$

sistema: $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_3 = -1 \end{cases}$

Posto $x_2 = \alpha$:

$x_3 = -1$

$x_1 = x_3 = -1$

In particolare, per $\alpha = 0$ (arbitrario, ma comodo!):

$$v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

5. Costruzione di T

$$T = \left[v_1 \,\vdots\, v_2 \;\; v_3 \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

6. Matrice $\tilde{A}$

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{c:cc} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

NOTA- Si ricordi che $\tilde{A} = T^{-1}AT$ può essere scritta senza calcolare T^{-1}...

7. Matrici $e^{\tilde{A}t}$ e $\tilde{A}^k$

$$e^{\tilde{A}t} = \left[\begin{array}{c:cc} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & e^{\lambda_2 t} & e^{\lambda_2 t} t \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & e^{2t} t \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A}^k = \left[\begin{array}{c:cc} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & \lambda_2^k & \lambda_2^{k-1} k \\ 0 & 0 & \lambda_2^k \end{array}\right] = \begin{bmatrix} (-1)^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 2^{k-1} k \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix}$$

8. Calcolo di T^{-1}

$$T^{-1} = \frac{1}{\det(T)} \, Agg(T) = \frac{1}{(-1)} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

9. Matrici e^{At} e A^k

$$e^{At} = T e^{\tilde{A}t} T^{-1} = \ldots = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & -e^{-t} + e^{2t} \\ e^{-t} - e^{2t} & e^{2t} & -e^{-t} + e^{2t}(1-t) \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

$$A^k = T\tilde{A}^k T^{-1} = \ldots = \begin{bmatrix} (-1)^k & 0 & -(-1)^k + 2^k \\ (-1)^k - 2^k & 2^k & -(-1)^k + 2^{k-1}(2-k) \\ 0 & 0 & 2^k \end{bmatrix}$$

• ESEMPIO DI JORDANIZZAZIONE

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \textcircled{0} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad n = 5$$

– AUTOVALORI:

$$\det(A) = (\lambda - 0) \det \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \lambda(\lambda-1) \det \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda-1)^2 \det \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 0 \\ 0 & \textcircled{1} \end{pmatrix} = \lambda(\lambda-1)^4$$

$\lambda_1 = 0 \quad m_{a,1} = 1 \quad (m_{g,1} = 1) \quad ; \quad \lambda_2 = 1 \quad : \quad m_{a,2} = 4$

calcolo $m_{g,2}$:

$$m_{g,2} = \overset{5}{n} - \rho\underbrace{\left(A - \overset{1}{\lambda_2} I\right)}_{A_2^{(1)}} = 5 - \rho \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 5 - 3 = 2$$

← = RIGA 2

$m_{g,2} = 2 < 4$

$$\operatorname{Ker}(A - \lambda_2 I) : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{2a} \\ u_{2b} \\ u_{2c} \\ u_{2d} \\ u_{2e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u_{2a} = 0 \\ u_{2b} = 0 \\ u_{2c} = -u_{2e} \end{cases}$$

u_{2e}, u_{2d} LIBERI

⇒ 2 AUTOVETTORI GENERALIZZATI DEL PRIMO ORDINE

$$u_{2,1}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_{2,2}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$u_{2,d} = 1$
$u_{2,e} = 0$

$u_{2,e} = 1$
$u_{2,d} = 0$

$$\ker\left(A-\lambda_2 I\right)^2 : \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}}_{\rho(A-\lambda_2 I)^2 = 2} \begin{pmatrix} u^{(2)}_{2,a} \\ u^{(2)}_{2,b} \\ u^{(2)}_{2,c} \\ u^{(2)}_{2,d} \\ u^{(2)}_{2,e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\dim\left(\ker(A-\lambda_2 I)^2\right) = 5-2=3$$

$$\begin{cases} -\overset{\overset{0}{\shortparallel}}{u^{(2)}_{2,a}} - u^{(2)}_{2,b} + u^{(2)}_{2,c} + u^{(2)}_{2,e} = 0 \\ -u^{(2)}_{2,a} = 0 \end{cases} \Rightarrow \underset{\underset{u^{(1)}_{2,1}}{\shortparallel}}{u^{(2)}_{2,1}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underset{\underset{u^{(1)}_{2,2}}{\shortparallel}}{u^{(2)}_{2,2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u^{(2)}_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$u_{2,d}=1$
$u_{2,c}=0$
$u_{2,b}=0$
$u_{2,e}=0$

$u_{2,c}=1$
$u_{2,d}=0$
$u_{2,b}=0$

$u_{2,b}=1$
$u_{2,e}=1$
$u_{2,d}=0$

$$\ker\left(A-\lambda_2 I\right)^3 : \quad \begin{pmatrix} \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(3)}_{2,a} \\ u^{(3)}_{2,b} \\ u^{(3)}_{2,c} \\ u^{(3)}_{2,d} \\ u^{(3)}_{2,e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\rho(A-\lambda_2 I)^3 = 1$$

$$\dim\left(\ker(A-\lambda_2 I)^3\right) = 4$$

$$u^{(3)}_{2,a} + u^{(3)}_{2,b} - u^{(3)}_{2,c} - u^{(3)}_{2,e} = 0 \quad \Rightarrow \quad u^{(3)}_{2,1} = u^{(2)}_{2,1} \; ; \; u^{(3)}_{2,2} = u^{(2)}_{2,2} \; ; \; u^{(3)}_{2,3} = u^{(2)}_{2,3} \; = u^{(3)}_{2,4} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$u_{2,a}=1$

$$\mathrm{Ker}\left(A-\lambda_2 I\right) \qquad \cancel{\overset{u_{2,1}^{(1)}}{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}}} \quad \overset{u_{2,2}^{(1)}}{\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}} \qquad\qquad \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\\0\end{pmatrix}^{u_{2,4}^{(1)}}$$

CATENA LUNGA 1

$$\mathrm{Ker}\left(A-\lambda_2 I\right)^2 \qquad \cancel{\overset{u_{2,3}^{(2)}}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix}}} \qquad \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}^{u_{2,4}^{(2)}}$$

$$\mathrm{Ker}\left(A-\lambda_2 I\right)^3 \qquad \overset{u_{2,4}^{(3)}}{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}}$$

CATENA LUNGA 3

$$u_{2,4}^{(2)} = \left(A-\lambda_1 I\right) u_{2,4}^{(3)} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$u_{2,4}^{(1)} = \left(A-\lambda_2 I\right) u_{2,4}^{(2)} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

- CALCOLO L'AUTOVETTORE DI λ_1:

$$\lambda_1: \quad A u_1 = 0 \Rightarrow u_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

- COSTRUISCO LA MATRICE MODALE GENERALIZZATA:

$$U_J = \left(\begin{array}{c:ccc:c} u_1 & u_{2,4}^{(1)} & u_{2,4}^{(2)} & u_{2,4}^{(3)} & u_{2,2}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad ; \quad U_J^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

CATENA LUNGA 3

CATENA LUNGA 1

$$J = U_J^{-1} A \, U_J = \left(\begin{array}{c|ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

CATENA LUNGA 3

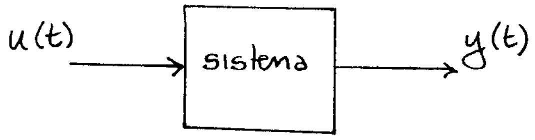
CATENA LUNGA 1

$$e^{Jt} = \left(\begin{array}{c|ccc|c} e^{0t} & & 0 & & \\ \hline & e^{t} & te^{t} & \frac{1}{2}t^2e^{t} & \\ 0 & 0 & e^{t} & te^{t} & 0 \\ & 0 & 0 & e^{t} & \\ \hline & & 0 & & e^{t} \end{array}\right)$$

$$e^{At} = U_J \, e^{Jt} \, U_J^{-1} = \begin{bmatrix} e^{t} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -te^{t} & e^{t} & 0 & 0 & 0 \\ e^{t}-1 & e^{t}-1 & 1 & 0 & 1-e^{t} \\ \frac{1}{2}t^2e^{t} & te^{t} & 0 & e^{t} & 0 \\ -te^{t} & 0 & 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix}$$

ESERCIZIO

Dato il sistema



descritto dall'equazione differenziale

$$\dddot{y}(t)+4\ddot{y}(t)+\dot{y}(t)-6y(t)=2u(t)$$

1) scrivere una rappresentazione del sistema in forma di spazio di stato;

2) calcolare la risposta libera nell'uscita con condizioni iniziali $y(0)=0,\ \dot{y}(0)=3,\ \ddot{y}(0)=-3.$

1) Definiamo lo stato

$$x(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{bmatrix}$$

Abbiamo:

$$\dot{x}_1(t)=\dot{y}(t)=x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t)=\ddot{y}(t)=x_3(t)$$

dalla definizione di $x(t)$

$$\dot{x}_3(t)=\dddot{y}(t)=6y(t)-\dot{y}(t)-4\ddot{y}(t)+2u(t)$$

$$=6x_1(t)-x_2(t)-4x_3(t)+2u(t)$$

dall'equazione differenziale del sistema

Dunque:

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -4 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$ equazione dello stato

Per quanto riguarda l'uscita:

$$y(t) = x_1(t)$$ —— dalla definizione di $x(t)$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x(t) + \underbrace{0}_{D} \cdot u(t)$$ equazione dell'uscita

2) Dobbiamo calcolare:

$$y_\ell(t) = Ce^{At}x_0$$ risposta libera nell'uscita

Innanzi tutto, ricaviamo x_0 dai dati del problema:

$$x_0 = x(0) = \begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \\ \ddot{y}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

dalla definizione di $x(t)$

Procediamo ora al calcolo di e^{At}, partendo dagli autovalori di A:

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -6 & 1 & \lambda+4 \end{bmatrix}$$

$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) =$ —— sviluppiamo il calcolo del determinante rispetto alla prima colonna

$$= \lambda \det\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda+4 \end{pmatrix} - 6 \det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \lambda & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda\left[\lambda(\lambda+4)+1\right] - 6 \cdot 1 =$$

$$= \lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda - 6$$

Per il calcolo delle radici di $p_A(\lambda)$, proviamo ad applicare il metodo di Ruffini, cercando le radici tra i divisori interi del termine noto -6, ossia $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

Proviamo con $\lambda = 1$:

$$p_A(1) = \lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda - 6 \Big|_{\lambda=1} = 1 + 4 + 1 - 6 = 0$$

Quindi $\lambda = 1$ è radice di $p_A(\lambda)$. Per abbassare il polinomio di grado:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 4 & 1 & -6 \\ 1 & & 1 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & /\!/ \end{array} \quad \longleftarrow \text{coefficienti del polinomio}$$

radice ↘ 1

$$\Rightarrow p_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 5\lambda + 6) = (\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda+3)$$

$$\Delta = 25 - 24 = 1$$

$$\lambda = \frac{-5 \pm 1}{2} = \begin{cases} -2 \\ -3 \end{cases}$$

La matrice A ha <u>tre</u> radici distinte:

$\lambda_1 = 1$ con $\mu_1 = 1$ $\Rightarrow$ $\nu_1 = 1$

$\lambda_2 = -2$ con $\mu_2 = 1$ $\Rightarrow$ $\nu_2 = 1$

$\lambda_3 = -3$ con $\mu_3 = 1$ $\Rightarrow$ $\nu_3 = 1$

ed è quindi diagonalizzabile.

Procediamo al calcolo degli autovettori:

Per $\lambda_1 = 1$:

$$\lambda_1 I - A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -6 & 1 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sistema omogeneo: $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

Ponendo $x_3 = \alpha$ (parametro libero), otteniamo:

$$x_2 = x_3 = \alpha \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_1}$$
$$x_1 = x_2 = \alpha$$

v_1, autovettore relativo a λ_1

Per $\lambda_2 = -2$:

$$\lambda_2 I - A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sistema omogeneo: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

Ponendo $x_3 = \alpha$ (parametro libero), otteniamo:

$$x_2 = -\frac{1}{2}x_3 = -\frac{1}{2}\alpha$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{4}\alpha$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\alpha \\ -\frac{1}{2}\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

v_2, autovettore relativo a λ_2

Per $\lambda_3 = -3$:

$$\lambda_3 I - A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ -6 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sistema omogeneo: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

Ponendo $x_3 = \alpha$ (parametro libero), otteniamo:

$$x_2 = -\frac{1}{3}x_3 = -\frac{1}{3}\alpha$$

$$x_1 = -\frac{1}{3}x_2 = \frac{1}{9}\alpha$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9}\alpha \\ -\frac{1}{3}\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

v_3, autovettore relativo a λ_3

Definiamo la matrice T:

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{9} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

tale che

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Da cui:

$$e^{\tilde{A}t} = \begin{bmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

Ricordiamo che $e^{At} = T e^{\tilde{A}t} T^{-1}$. Sostituendo in

$$y_e(t) = C e^{At} x_0$$

otteniamo:

$$y_e(t) = C T e^{\tilde{A}t} T^{-1} x_0$$

Per evitare di invertire T, definiamo $\alpha = T^{-1} x_0$, con $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$.

α è soluzione del sistema lineare $T\alpha = x_0$.

Applicando il metodo della riduzione a scala per risolvere il sistema, abbiamo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{9} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{T} \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{matrix}}_{x_0} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{9} \\ 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{4}{9} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{8}{9} \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{9} \\ 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{4}{9} \\ 0 & 0 & \frac{4}{9} \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \frac{1}{4}\alpha_2 + \frac{1}{9}\alpha_3 = 0 \\ -\frac{3}{4}\alpha_2 - \frac{4}{9}\alpha_3 = 3 \\ \frac{4}{9}\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \alpha_3 = 0$ $\Uparrow$

$-\frac{3}{4}\alpha_2 = 3 \Rightarrow \alpha_2 = -4$ $\Uparrow$

$\alpha_1 = 1$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

In conclusione:

$$y_e(t) = C T e^{\tilde{A}t} \alpha =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{t} \\ -4e^{-2t} \\ 0 \end{bmatrix} = e^{t} - e^{-2t}$$

Esercizio

Calcolare la risposta libera del sistema:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

con $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$ e $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$x(t) = e^{At} x_0$$

- Calcoliamo gli autovalori di A.

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) \qquad \lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 5 & \lambda+2 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda+2) + 5 = \lambda^2 + 2\lambda + 5$$

$$\Delta = 4 - 20 = -16 \rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm j4}{2} = -1 \pm 2j$$

$$\boxed{\lambda_1 = -1 + 2j}$$

$$\lambda_2 = \lambda_1^* = -1 - 2j$$

$\rightarrow$ Consideriamo λ_1 perché ha parte immaginaria positiva.

- $A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 1-2j & 1 \\ -5 & -1-2j \end{bmatrix}$

Risolviamo il sistema omogeneo associato:

$$\begin{bmatrix} 1-2j & 1 \\ -5 & -1-2j \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1+4 & 1+2j \\ -5 & -1-2j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1+2j \\ -5 & -1-2j \end{bmatrix}$$

moltiplica la prima riga per 1+2j

$$(1+2j)(1-2j) = 1 - \cancel{2j} + \cancel{2j} + 4$$

Righe linearmente dipendenti

=> ne possiamo scartare una...

Consideriamo la prima equazione:

$$(1-2j)x_1 + x_2 = 0$$

Poniamo $x_1 = \alpha$ => $\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = -(1-2j)\alpha \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1+2j \end{bmatrix} \alpha$$

⇓

$v = \begin{bmatrix} 1 \\ -1+2j \end{bmatrix}$ è un autovettore di A relativo a λ_1

=> $v = v_1 + j v_2$ dove $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

parte reale di v

parte immaginaria di v

=> $T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$ dove $\sigma = Re(\lambda_1) = -1$

$\omega = Im(\lambda_1) = 2$

parte reale

parte immaginaria

$$e^{\tilde{A}t} = e^{\sigma t}\begin{bmatrix}\cos(\omega t) & \sin(\omega t)\\ -\sin(\omega t) & \cos(\omega t)\end{bmatrix} = e^{-t}\begin{bmatrix}\cos(2t) & \sin(2t)\\ -\sin(2t) & \cos(2t)\end{bmatrix}$$

- I modi del sistema sono tutte le funzioni differenti che troviamo in $e^{\tilde{A}t}$: $\underline{\underline{e^{-t}\sin(2t),\ e^{-t}\cos(2t)}}$ - <u>MODI DEL SISTEMA</u>-

- Il sistema è <u>asintoticamente stabile</u> perchè $Re(\lambda_1)<0$ e $Re(\lambda_2)<0$.

- $x(t) = e^{At}x_0 = T e^{\tilde{A}t}\underbrace{(T^{-1}x_0)}_{Z_0 = \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}}$ → coordinate di x_0 rispetto alla base $\{v_1, v_2\}$: $\underline{x_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2}$

Z_0 è soluzione del sistema lineare $TZ_0 = X_0$ → $X_0 = \begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$

$$\begin{cases}\alpha_1 = 1\\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 = -1\end{cases} \qquad \begin{cases}\alpha_1 = 1\\ \alpha_2 = 0\end{cases}$$

NOTA- si poteva anche osservare che $X_0 = v_1$! Dunque $X_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = v_1 \iff \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0$

non ci interessano, perchè verranno moltiplicati per zero!

$$x(t) = T e^{\tilde{A}t} Z_0 = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t}\cos(2t) & *\\ -e^{-t}\sin(2t) & *\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t}\cos(2t)\\ -e^{-t}\sin(2t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}e^{-t}\cos(2t)\\ -e^{-t}\cos(2t) - 2e^{-t}\sin(2t)\end{bmatrix}$$

ESERCIZIO

Si consideri il sistema:

$$\dot{x}(t) = A\,x(t)$$

dove $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 3/2 & -5/2 & 3/2 \\ 3/2 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

1. Studiare la stabilità del sistema
2. Determinare i modi del sistema
3. Calcolare la risposta libera del sistema con condizione iniziale $x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
4. Determinare l'insieme delle condizioni iniziali x_0 tali che:

$$\lim_{t \to \infty} \|x(t)\| = 0$$

Calcoliamo gli autovalori del sistema.

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda-2 & 3 & -3 \\ -\frac{3}{2} & \lambda+\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \lambda-\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) \underset{\swarrow}{=} (\lambda-2)\det\left(\begin{bmatrix} \lambda+\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \lambda-\frac{1}{2} \end{bmatrix}\right) - 3\det\left(\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \lambda-\frac{1}{2} \end{bmatrix}\right) +$$

sviluppiamo il determinante rispetto alla prima riga

$$-3\det\left(\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & \lambda+\frac{5}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}\right) =$$

$$= (\lambda-2)\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda + \frac{5}{2}\lambda - \frac{5}{4} + \frac{9}{4}\right) - 3\left(-\frac{3}{2}\lambda + \frac{3}{4} - \frac{9}{4}\right) - 3\left(-\frac{9}{4} + \frac{3}{2}\lambda + \frac{15}{4}\right) =$$

$$= (\lambda-2)(\lambda^2+2\lambda+1) \cancel{-3\left(-\frac{3}{2}\lambda - \frac{3}{2}\right)} \cancel{-3\left(\frac{3}{2}\lambda + \frac{3}{2}\right)}$$

$$= (\lambda-2)(\lambda+1)^2$$

AUTOVALORI	MOLT. ALG.	MOLT. GEOM.	
$\lambda_1 = 2$	$\mu_1 = 1$	$\nu_1 = 1$	$(\mu_1 = 1 \Rightarrow \nu_1 = 1)$
$\lambda_2 = -1$	$\mu_2 = 2$	$\nu_2 = \dots ?$	

Stabilità

Dato che $\lambda_1 > 0$ si può immediatamente concludere che il sistema è INSTABILE

Modi del sistema

Calcoliamo $\nu_2 = \dim(\ker(A - \lambda_2 I))$

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rango}(A - \lambda_2 I) = 1$$

sottraggo alla 2ª e alla 3ª riga la 1ª moltiplicata per $\frac{1}{2}$, poi moltiplico la 1ª riga per $\frac{1}{3}$...

⇘ RIDUZIONE A SCALA DI GAUSS-JORDAN

$$\dim(\ker(A - \lambda_2 I)) = \underbrace{n}_{\text{dimensione dello stato}} - \text{rango}(A - \lambda_2 I) = 3 - 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nu_2 = 2}$$

Dato che $\mu_1 = \nu_1$ e $\mu_2 = \nu_2$ la matrice A è diagonalizzabile.

Dunque esiste una matrice T di cambio di coordinate tale che:

$$\Lambda = T^{-1} A T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Essendo:

$$e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$

i modi del sistema sono: e^{2t}, e^{-t}

(tutte le funzioni distinte che troviamo in $e^{\Lambda t}$)

Calcolo della risposta libera

$$x(t) = e^{At} x_0 = T e^{\Lambda t} T^{-1} x_0$$

Calcoliamo la matrice T di cambio di coordinate.

Consideriamo λ_1.

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 3 \\ \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

moltiplico la 1ª riga per $-\frac{1}{3}$, la 2ª per $\frac{2}{3}$ e la 3ª per $\frac{2}{3}$; scambio la 1ª e la 2ª riga

sottraggo alla 3ª riga la 1ª

RIDUZIONE A SCALA DI GAUSS-JORDAN

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

sottraggo alla 3ª riga la 2ª moltiplicata per 2

sistema omogeneo associato

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Poniamo $x_3 = \alpha$.

$$\begin{cases} x_1 = 3x_2 - x_3 = 2\alpha \\ x_2 = x_3 = \alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \alpha$$

v_1

AUTOVETTORE RELATIVO A λ_1

Consideriamo λ_2.

$$A-\lambda_2 I = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

stessa riduzione a scala di prima...

sistema omogeneo associato

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

Poniamo $x_2 = \alpha$ e $x_3 = \beta$.

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - x_3 = \alpha - \beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{v_2} \alpha + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_3} \beta$$

AUTOVETTORI LINEARMENTE INDIPENDENTI
RELATIVI A λ_2.

La matrice T di cambio di coordinate si costruisce come:

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = T e^{\Lambda t} \boxed{T^{-1} x_0} \longrightarrow z_0 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$$

coordinate di x_0 rispetto alla base $\{v_1, v_2, v_3\}$:

$$x_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3$$

$$= T e^{\Lambda t} z_0$$

$$= e^{2t} \alpha_1 v_1 + e^{-t} (\alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3)$$

z_0 si ottiene risolvendo il sistema lineare $T z_0 = x_0$:

$$\begin{cases} 2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=3 \\ \alpha_1+\alpha_2=1 \\ \alpha_1+\alpha_3=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1=-\alpha_3 \\ \alpha_2=1-\alpha_1=1+\alpha_3 \\ -2\alpha_3+1+\cancel{\alpha_3}-\cancel{\alpha_3}=3 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1=1 \\ \alpha_2=0 \\ \alpha_3=-1 \end{cases}$$

Dunque:

$$x(t)=e^{2t}v_1-e^{-t}v_3=\begin{bmatrix} 2e^{2t}+e^{-t} \\ e^{2t} \\ e^{2t}-e^{-t} \end{bmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ Ritornando alla generica espressione di $x(t)$:

$$x(t)=e^{2t}\alpha_1 v_1+e^{-t}\left(\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3\right)$$

Si osserva che $e^{2t}\to\infty$ e $e^{-t}\to 0$ per $t\to\infty$.

Dunque, affinché $\lim\limits_{t\to\infty}\|x(t)\|=0$, deve essere $\boxed{\alpha_1=0}$, cioè la condizione iniziale x_0 non deve avere componente lungo l'autospazio relativo all'autovalore <u>instabile</u> λ_1.

Le condizioni iniziali che soddisfano questa condizione sono date da:

$$x_0=T\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}=\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3$$

al variare di $\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$. Sono quindi tutte le condizioni iniziali appartenenti al sottospazio lineare generato da v_2 e v_3.

Esercizi

1) Dato il sistema descritto dall'equazione differenziale

$$\dot{x}(t) = (x(t))^2 + u(t) \qquad (1)$$

dire se il sistema e' lineare, applicando la definizione.

soluzione

Sia $x_1(t)$ la soluzione di (1) con condizione iniziale $x_1(0) = x_0$ e ingresso $u_1(t)$.

$$\Rightarrow \quad \dot{x}_1(t) = (x_1(t))^2 + u_1(t)$$

Se il sistema fosse lineare, allora $x(t) = a\,x_1(t)$, con $a \neq 1$ costante, dovrebbe essere soluzione di (1) con condizione iniziale $x(0) = a\,x_0$ e ingresso $u(t) = a\,u_1(t)$. Ma:

$$\dot{x}(t) = a\,\dot{x}_1(t) = a\left[(x_1(t))^2 + u_1(t)\right] = a\,(x_1(t))^2 + a\,u_1(t)$$

$$\underset{(a\neq 1)}{\neq} (a\,x_1(t))^2 + a\,u_1(t) = (x(t))^2 + u(t)$$

Dunque $x(t)$ non e' soluzione di (1). Il sistema NON e' lineare.

2) Dato il sistema descritto dall'equazione differenziale

$$\dot{x}(t) = t\,x(t) + u(t) \qquad (2)$$

dire se il sistema e' stazionario, applicando la definizione.

soluzione

Sia $x_1(t)$ la soluzione di (2) con condizione iniziale $x_1(0) = x_0$ e ingresso $u_1(t)$.

$$\Rightarrow \quad \dot{x}_1(t) = t\,x_1(t) + u_1(t)$$

Se il sistema fosse stazionario, allora $x_2(t) = x_1(t-T)$, con $T \neq 0$ costante, dovrebbe essere soluzione di (2) con condizione iniziale $x_2(T) = x_0$ e ingresso $u_2(t) = u_1(t-T)$. Ma:

$$\dot{x}_2(t)=\dot{x}_1(t-T)=(t-T)\,x_1(t-T)+u_1(t-T)$$

$$\underset{(T\neq 0)}{\neq}\ t\,x_1(t-T)+u_1(t-T)=t\,x_2(t)+u_2(t).$$

Dunque $x_2(t)$ non è soluzione di (2). Il sistema NON è stazionario.

* * *

3) Dato il sistema descritto ancora dall'equazione differenziale (2), dire se il sistema è lineare, applicando la definizione.

soluzione

Sia $x_1(t)$ la soluzione di (2) con condizione iniziale $x_1(t_0)=x_{1,0}$ e ingresso $u_1(t)$.

$$\Rightarrow\ \dot{x}_1(t)=t\,x_1(t)+u_1(t)$$

Sia $x_2(t)$ la soluzione di (2) con condizione iniziale $x_2(t_0)=x_{2,0}$ e ingresso $u_2(t)$.

$$\Rightarrow\ \dot{x}_2(t)=t\,x_2(t)+u_2(t)$$

Se il sistema è lineare, allora $x(t)=a\,x_1(t)+b\,x_2(t)$ è soluzione di (2) con condizione iniziale $x(t_0)=a\,x_{1,0}+b\,x_{2,0}$ e ingresso $u(t)=a\,u_1(t)+b\,u_2(t)$, per ogni $t_0, x_{1,0}, x_{2,0}, u_1(\cdot), u_2(\cdot), a, b$.

- $x(t_0)=a\,x_1(t_0)+b\,x_2(t_0)=a\,x_{1,0}+b\,x_{2,0}.$ verificata
- $\dot{x}(t)=a\,\dot{x}_1(t)+b\,\dot{x}_2(t)=a\left[t\,x_1(t)+u_1(t)\right]+b\left[t\,x_2(t)+u_2(t)\right]=$

$$=t\left[a\,x_1(t)+b\,x_2(t)\right]+\left[a\,u_1(t)+b\,u_2(t)\right]=$$

$$=t\,x(t)+u(t)$$ verificata

$\Rightarrow$ Dunque il sistema È lineare.

ESERCIZIO

Dato il sistema nonlineare:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u^2 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + u x_2 \end{cases}$$

1. determinare i punti di equilibrio del sistema quando $u(t)=1 \;\forall t$
2. calcolare le matrici dei sistemi linearizzati nell'intorno dei punti di equilibrio
3. studiare la stabilità dei punti di equilibrio

Definendo lo stato $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, il sistema è nella forma:

$$\dot{x} = f(x,u)$$

dove $f(x,u) = \begin{bmatrix} x_2 + u^2 \\ x_1^2 + u x_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightsquigarrow f_1(x,u) \\ \rightsquigarrow f_2(x,u) \end{matrix}$

Per determinare i punti di equilibrio del sistema, si risolve:

$$f(x,u) = 0$$ (NOTA - siamo a tempo continuo...)

con $u = u_{eq} = 1$.

$$\begin{cases} x_2 + u^2 = 0 \\ x_1^2 + u x_2 = 0 \end{cases} \underset{u = u_{eq} = 1}{\Longrightarrow} \begin{cases} x_2 + 1 = 0 \\ x_1^2 + x_2 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_1^2 = -x_2 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases} \begin{cases} x_1 = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

I punti di equilibrio sono:

$$x_{eq,1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad e \quad x_{eq,2} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Per calcolare le matrici dei sistemi linearizzati nell'intorno dei punti di equilibrio, occorre prima calcolare le matrici jacobiane di f rispetto a X e u:

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2x_1 & u \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u \\ x_2 \end{bmatrix}$$

MATRICI DEL SISTEMA LINEARIZZATO NELL'INTORNO DI $(X_{eq,1}\,,\,u_{eq})$

$$A_{lin,1} = \left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{\substack{X=X_{eq,1} \\ u=u_{eq}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{lin,1} = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{X=X_{eq,1} \\ u=u_{eq}}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

MATRICI DEL SISTEMA LINEARIZZATO NELL'INTORNO DI $(X_{eq,2}, u_{eq})$

$$A_{lin,2} = \left.\frac{\partial f}{\partial X}\right|_{\substack{X=X_{eq,2} \\ u=u_{eq}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{lin,2} = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{X=X_{eq,2} \\ u=u_{eq}}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Per studiare la stabilità dei punti di equilibrio, applichiamo il metodo indiretto di Lyapunov, e quindi calcoliamo gli autovalori di $A_{lin,1}$ e $A_{lin,2}$ ...

$$p_1(\lambda) = \det\left(\lambda I - A_{lin,1}\right) = \lambda\left(\lambda-1\right)-2 = \lambda^2-\lambda-2$$

=> in $p_1(\lambda)$ ci sono alternanze di segno, e quindi $p_1(\lambda)$ ha almeno una radice con parte reale positiva

↳ dunque possiamo concludere che $(x_{eq,1}, u_{eq})$ è un punto di equilibrio INSTABILE.

$$p_2(\lambda) = \det\left(\lambda I - A_{lin,2}\right) = \lambda\left(\lambda-1\right)+2 = \lambda^2-\lambda+2$$

=> in $p_2(\lambda)$ ci sono alternanze di segno, e quindi $p_2(\lambda)$ ha almeno una radice con parte reale positiva.

↳ dunque possiamo concludere che $(x_{eq,2}, u_{eq})$ è un punto di equilibrio INSTABILE.

Esercizio

Dato il sistema nonlineare a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(t)[\,\ln{(x_2(t))} - 1] + e^{u(t)} - 1 \\ \dot{x}_2(t) = (1-e)\,x_1(t) + [x_2(t) - 1][x_2(t) - \dfrac{1}{2}\,u^2(t) + \alpha] \end{cases}$$

nel quale α è un parametro reale:

1. Determinare i punti di equilibrio del sistema quando $u(t) = 0$, $\forall t$.
2. Discutere la stabilità di almeno due punti di equilibrio al variare del parametro α.

Soluzione

Domanda 1.

Il sistema è nella forma

$$\dot{\mathrm{x}}(t) = f(\mathrm{x}(t), u(t))$$

dove

$$\mathrm{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad f(\mathrm{x}, u) = \begin{bmatrix} x_1[\,\ln(x_2) - 1] + e^u - 1 \\ (1-e)\,x_1 + (x_2 - 1)(x_2 - \dfrac{1}{2}\,u^2 + \alpha) \end{bmatrix}$$

Si osservi innanzi tutto che, affinché il logaritmo sia definito, deve risultare $x_2 > 0$. Per determinare i punti di equilibrio del sistema quando $u(t) = 0$, si risolve il sistema

$$0 = f(\mathrm{x}, u)$$

cioè

$$\begin{cases} 0 = x_1[\,\ln(x_2) - 1] + e^u - 1 \\ 0 = (1-e)\,x_1 + (x_2 - 1)(x_2 - \dfrac{1}{2}\,u^2 + \alpha) \end{cases}$$

con $u \triangleq u_{eq} = 0$. Si ha dunque

$$\begin{cases} x_1[\,\ln(x_2) - 1] = 0 \\ (e-1)x_1 = (x_2 - 1)(x_2 + \alpha) \end{cases}$$

La prima equazione ha soluzioni $x_1 = 0$ e $x_2 = e$.

$\boxed{x_1 = 0}$

Sostituendo $x_1 = 0$ nella seconda equazione, si ha

$$(x_2 - 1)(x_2 + \alpha) = 0$$

che ha soluzioni $x_2 = 1$ e $x_2 = -\alpha$. Dato che deve essere $x_2 > 0$ affinché il logaritmo sia definito, la seconda soluzione esiste per $\alpha < 0$. I punti

$$\mathrm{x}_{eq,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathrm{x}_{eq,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha \end{bmatrix}$$

sono dunque punti di equilibrio del sistema.

$\boxed{x_2 = e}$

Sostituendo $x_2 = e$ nella seconda equazione, si ha

$$(e-1)x_1 = (e-1)(e+\alpha)$$

che ha soluzione $x_1 = e + \alpha$. Il punto

$$\mathrm{x}_{eq,3} = \begin{bmatrix} e+\alpha \\ e \end{bmatrix}$$

è dunque un punto di equilibrio del sistema.

Domanda 2.

Calcoliamo la matrice jacobiana di f rispetto a x:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x}, u) = \begin{bmatrix} \ln(x_2) - 1 & \dfrac{x_1}{x_2} \\ 1 - e & 2\,x_2 - \dfrac{1}{2}\,u^2 + \alpha - 1 \end{bmatrix}$$

Consideriamo il punto di equilibrio $(\mathrm{x}_{eq,1}, u_{eq})$. Abbiamo:

$$A_{lin,1} = \frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x}_{eq,1}, u_{eq}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1-e & 1+\alpha \end{bmatrix}$$

La matrice $A_{lin,1}$ è in forma triangolare inferiore, per cui i suoi autovalori coincidono con gli elementi sulla diagonale:

$$\lambda_1 = -1$$
$$\lambda_2 = 1 + \alpha$$

- Se $\alpha < -1$, allora risulta $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$, e si conclude che il punto di equilibrio è *asintoticamente stabile*.
- Se $\alpha > -1$, allora risulta $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$, e si conclude che il punto di equilibrio è *instabile*.
- Se $\alpha = -1$, allora risulta $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 = 0$, e applicando il metodo della linearizzazione non si può concludere nulla sulla stabilità del punto di equilibrio.

Consideriamo il punto di equilibrio $(\mathrm{x}_{eq,2}, u_{eq})$, con $\alpha < 0$. Abbiamo:

$$A_{lin,2} = \frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x}_{eq,2}, u_{eq}) = \begin{bmatrix} \ln(-\alpha) - 1 & 0 \\ 1 - e & -(1+\alpha) \end{bmatrix}$$

La matrice $A_{lin,2}$ è in forma triangolare inferiore, per cui i suoi autovalori coincidono con gli elementi sulla diagonale:

$$\lambda_1 = \ln(-\alpha) - 1$$
$$\lambda_2 = -(1+\alpha)$$

- Se $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$, si può concludere che il punto di equilibrio è *asintoticamente stabile*. Ciò si verifica per valori di α tali che

  $$\ln(-\alpha) - 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \ln(-\alpha) < 1 \quad \Rightarrow \quad 0 < -\alpha < e \quad \Rightarrow \quad -e < \alpha < 0$$
  $$-(1+\alpha) < 0 \quad \Rightarrow \quad 1 + \alpha > 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha > -1$$

  Entrambe le condizioni sono verificate per $-1 < \alpha < 0$.

- Se $\alpha < -1$, allora risulta $\lambda_2 > 0$, e si conclude che il punto di equilibrio è *instabile*.

- Se $\alpha = -1$, allora risulta $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 = 0$, e applicando il metodo della linearizzazione non si può concludere nulla sulla stabilità del punto di equilibrio.

Esercizio 2 (esame 28/09/2006)

Dato il sistema nonlineare a tempo continuo

$$\dot{x}_1(t) = 1 + x_1^2(t) + \sin(x_2(t))$$

$$\dot{x}_2(t) = 2x_2(t) + \sin(x_1(t)) - u(t)$$

1) si calcolino i punti di equilibrio del sistema per ingresso costante $u(t) = 3\pi \ \forall t$

2) scrivere le equazioni del sistema linearizzato nell'intorno di ciascun punto di equilibrio

3) studiare la stabilità dei punti di equilibrio

Definendo lo stato

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

e $f(x,u) = \begin{bmatrix} f_1(x,u) \\ f_2(x,u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + x_1^2 + \sin(x_2) \\ 2x_2 + \sin(x_1) - u \end{bmatrix}$,

il sistema è nella forma $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$.

1) Posto $u(t) = u_{eq} = 3\pi \ \forall t$, risolviamo $f(x, u_e) = 0$ per calcolare i punti di equilibrio del sistema.

$$\begin{cases} 1 + x_1^2 + \sin(x_2) = 0 \\ 2x_2 + \sin(x_1) - 3\pi = 0 \end{cases}$$

Consideriamo la prima equazione:

$$1 + x_1^2 + \sin(x_2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \underbrace{1 + x_1^2}_{\geq 1} = \underbrace{-\sin(x_2)}_{\in [-1,1]}$$

Si può avere uguaglianza solo se:

$$\begin{cases} 1 + x_1^2 = 1 & \Rightarrow \quad x_1 = 0 \\ \sin(x_2) = -1 & \Rightarrow \quad x_2 = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi \ , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Consideriamo ora la seconda equazione:

$$2x_2 + \sin(x_1) - 3\pi = 0$$

Sostituendo in essa le possibili soluzioni della prima otteniamo:

$$2\left(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right) - 3\pi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}\pi + 2k\pi = \frac{3}{2}\pi$$

che è verificata per $k=0$.

ATTENZIONE! Qui k può essere solo intero $(k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

Quindi il sistema ha un <u>unico</u> punto di equilibrio:

$$x_{eq} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{3}{2}\pi \end{bmatrix}$$

2) Il sistema linearizzato nell'intorno di (x_{eq}, u_{eq}) ha equazione

$$\dot{\tilde{x}}(t) = A_{lin}\,\tilde{x}(t) + B_{lin}\,\tilde{u}(t)$$

dove $\tilde{x}(t) = x(t) - x_{eq}$, $\tilde{u}(t) = u(t) - u_{eq}$, $A_{lin} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_{eq} \\ u=u_{eq}}}$, $B_{lin} = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_{eq} \\ u=u_{eq}}}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & \cos(x_2) \\ \cos(x_1) & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A_{lin} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

abbiamo sostituito $x_1 = 0$ e $x_2 = \frac{3}{2}\pi$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad B_{lin} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3) Per studiare la stabilità del punto di equilibrio, applichiamo il metodo indiretto di Lyapunov.

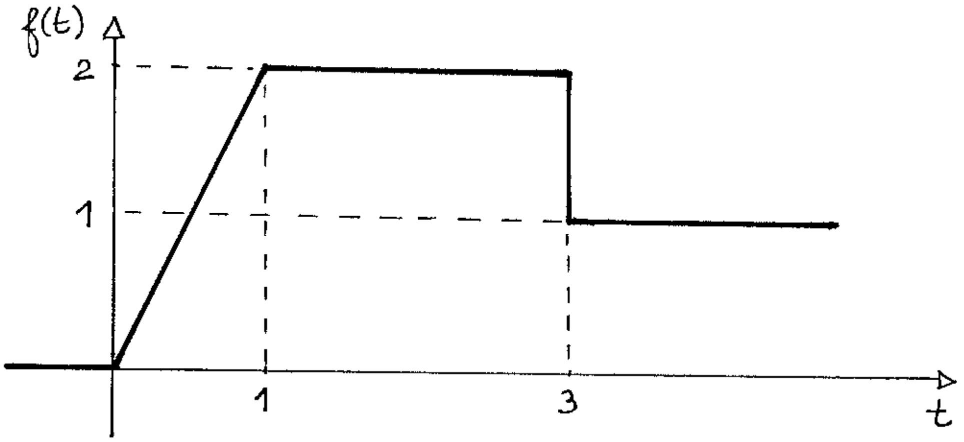
$$A_{lin} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \searrow$$ matrice in forma triangolare inferiore

=> i suoi autovalori coincidono con gli elementi sulla diagonale: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$

Dato che A_{lin} ha un <u>autovalore positivo</u>, concludiamo che il punto di equilibrio (x_{eq}, u_{eq}) è <u>INSTABILE</u>

ESERCIZI SULLE TRASFORMATE DI LAPLACE

① Calcolare la trasformata di Laplace della funzione in figura.



La funzione $f(t)$ ha l'espressione:

$$f(t)=\begin{cases} 2t & \text{se } 0\le t<1 \\ 2 & \text{se } 1\le t<3 \\ 1 & \text{se } t\ge 3 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

che può essere riscritta nella forma compatta:

$$f(t)=2\,\delta_{-2}(t)-2\,\delta_{-2}(t-1)-\delta_{-1}(t-3)$$

dove $\delta_{-1}(t)$ è la funzione <u>gradino unitario</u>, e $\delta_{-2}(t)$ è la funzione <u>rampa lineare</u>.

Dunque:

$$F(s)=2\cdot\frac{1}{s^2}-2\cdot\frac{1}{s^2}e^{-s}-\frac{1}{s}e^{-3s}=\frac{2}{s^2}\left(1-e^{-s}\right)-\frac{1}{s}e^{-3s}$$

② Antitrasformare la funzione razionale $Y(s)=\dfrac{1}{(s-1)(s^2+1)}$

<u>1° metodo</u>

$$Y(s)=\frac{1}{(s-1)(s-i)(s+i)}=\frac{1}{(s-p_1)^{q_1}(s-p_2)^{q_2}(s-p_2^*)^{q_2}}$$

dove:

$p_1=1$ con $q_1=1$

$p_2=i$ con $q_2=1$ $\Rightarrow$ $\sigma_2=0,\ \omega_2=1$

Dunque:

$$Y(s) = \frac{R_{1,1}}{s-1} + \frac{R_{2,1}}{s-i} + \frac{R_{2,1}^{*}}{s+i}$$

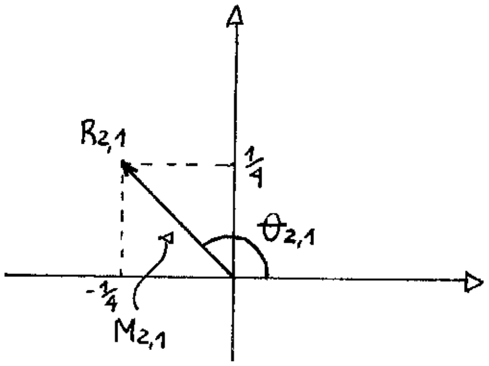
con:

$$R_{1,1} = \lim_{s \to p_1} (s-p_1) Y(s) = \lim_{s \to 1} \cancel{(s-1)} \frac{1}{\cancel{(s-1)}(s^2+1)} = \frac{1}{2}$$

$$R_{2,1} = \lim_{s \to p_2} (s-p_2) Y(s) = \lim_{s \to i} \cancel{(s-i)} \frac{1}{(s-1)\cancel{(s-i)}(s+i)} = \frac{1}{2i(i-1)} =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{1}{1+i} \boxed{\frac{1-i}{1-i}} = -\frac{1}{4}(1-i)$$

per razionalizzare



modulo e fase di $R_{2,1}$

$$M_{2,1} = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\theta_{2,1} = \operatorname{acos}\left(\frac{\text{parte reale}}{\text{modulo}}\right) = \operatorname{acos}\left(\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2\sqrt{2}}}\right) =$$

$$= \operatorname{acos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{4}\pi$$

anche graficamente, perche' $R_{2,1}$ sta sulla bisettrice del 2° quadrante

Applicando la formula:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \left[R_{1,1} e^{t} + 2 M_{2,1} \cos(t + \theta_{2,1})\right] \mathbb{1}(t) =$$

$$= \left[\frac{1}{2} e^{t} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(t + \frac{3}{4}\pi\right)\right] \mathbb{1}(t)$$

2° metodo

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{A}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1}$$

A e' proprio il residuo in $p_1 = 1$:

$$A = \lim_{s \to 1} (s-1)Y(s) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{\frac{1}{2}}{s-1} + \frac{Bs+C}{s^2+1} = \frac{\frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2} + Bs^2 + Cs - Bs - C}{(s-1)(s^2+1)}$$

$$= \frac{(B+\frac{1}{2})s^2 + (-B+C)s + (-C+\frac{1}{2})}{(s-1)(s^2+1)} = \frac{1}{(s-1)(s^2+1)}$$

Per l'uguaglianza dei polinomi a numeratore:

$$\begin{cases} B + \frac{1}{2} = 0 & \Rightarrow \quad B = -\frac{1}{2} \\ -B + C = 0 & \qquad\qquad \underset{\text{(verifica)}}{\Rightarrow} \quad B = C = -\frac{1}{2} \quad \underline{\text{ok}} \\ -C + \frac{1}{2} = 1 & \Rightarrow \quad C = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

NOTA - è un sistema con più equazioni che incognite; una equazione è ridondante

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\,\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{s^2+1}$$

Antitrasformando:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \left[\frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2}\sin(t)\right]\mathbb{1}(t)$$

<u>NOTA</u> - Con il 1° metodo abbiamo ottenuto:

$$y(t) = \left[\frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(t + \frac{3}{4}\pi\right)\right]\mathbb{1}(t)$$

mentre con il 2° metodo:

$$y(t) = \left[\frac{1}{2}e^{t} - \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{1}{2}\sin(t)\right]\mathbb{1}(t)$$

Ovviamente, <u>le due espressioni sono equivalenti</u>!

Infatti, $\cos\left(t + \frac{3}{4}\pi\right) = \cos(t)\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) - \sin(t)\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t)$.

③ Antitrasformare la funzione razionale $Y(s) = \dfrac{-s^2-3s+7}{(s-1)^2(s+2)}$

Scomponendo $Y(s)$ in fratti semplici:

$$Y(s) = \frac{A}{(s-1)^2} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+2}$$

dove:

$$A = \lim_{s\to 1} (s-1)^2 Y(s) = \lim_{s\to 1} \cancel{(s-1)^2} \frac{-s^2-3s+7}{\cancel{(s-1)^2}(s+2)} = \frac{3}{3} = 1$$

$$B = \lim_{s\to 1} \frac{d}{ds}\left[(s-1)^2 Y(s)\right] = \lim_{s\to 1} \frac{d}{ds}\left[\frac{-s^2-3s+7}{s+2}\right] =$$

$$= \lim_{s\to 1} \frac{(-2s-3)(s+2)-(-s^2-3s+7)}{(s+2)^2} = -\frac{18}{9} = -2$$

$$C = \lim_{s\to -2} (s+2) Y(s) = \lim_{s\to -2} \cancel{(s+2)} \frac{-s^2-3s+7}{(s-1)^2\cancel{(s+2)}} = \frac{9}{9} = 1$$

abbiamo:

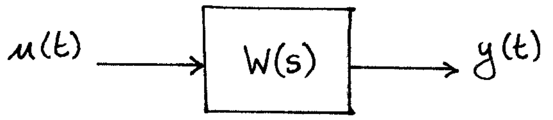
$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2} - 2\,\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+2}$$

e antitrasformando:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \left[t e^{t} - 2e^{t} + e^{-2t}\right]\mathbb{1}(t) = \left[(t-2)e^{t} + e^{-2t}\right]\mathbb{1}(t)$$

ESERCIZIO

Dato il sistema a tempo continuo in figura:



descritto dalla funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{-2s^3+s^2+6s+8}{s^3+s^2+4s+4}$$

calcolare la risposta forzata del sistema corrispondente all'ingresso:

$$u(t) = 1(t)$$

dove $1(t)$ e' la funzione gradino unitario.

La trasformata di Laplace dell'ingresso e':

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

La trasformata di Laplace dell'uscita e':

$$Y(s) = W(s)U(s) = \frac{-2s^3+s^2+6s+8}{s^3+s^2+4s+4} \cdot \frac{1}{s}$$

Scomponiamo il denominatore di Y(s) in fattori elementari:

$$p(s) = s^3+s^2+4s+\boxed{4}$$ i divisori di 4 sono ±1, ±2 e ±4.

$$p(1) = 1+1+4+4 = 10 \neq 0$$

$$p(-1) = -1+1-4+4 = 0 \quad \Rightarrow \quad s=-1 \text{ e' radice di } p(s)$$

Applicando la Regola di Ruffini:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & & -1 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & 4 & // \end{array} \quad \Rightarrow \quad p(s) = (s+1)(s^2+4)$$

non e' ulteriormente scomponibile perche' ha radici complesse

Dunque:

$$Y(s)=\frac{-2s^3+s^2+6s+8}{s(s+1)(s^2+4)} \qquad (*)$$

Scomponiamo Y(s) in fratti semplici:

$$Y(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+1}+\frac{Cs+D}{s^2+4}$$

Calcoliamo le costanti A e B:

$$A=\lim_{s\to0} sY(s)=\lim_{s\to0}\frac{-2s^3+s^2+6s+8}{(s+1)(s^2+4)}=\frac{8}{4}=2$$

$$B=\lim_{s\to-1}(s+1)Y(s)=\lim_{s\to-1}\frac{-2s^3+s^2+6s+8}{s(s^2+4)}=\frac{2+1-6+8}{(-1)(1+4)}=\frac{5}{-5}=-1$$

Per il calcolo di C e D ci sono due possibilità:

<u>1° METODO - uguaglianza dei polinomi</u>

$$Y(s)=\frac{2}{s}-\frac{1}{s+1}+\frac{Cs+D}{s^2+4}=\frac{s+2}{s(s+1)}+\frac{Cs+D}{s^2+4}=$$

$$=\frac{(s+2)(s^2+4)+s(s+1)(Cs+D)}{s(s+1)(s^2+4)}=$$

$$=\frac{s^3+4s+2s^2+8+Cs^3+(C+D)s^2+Ds}{s(s+1)(s^2+4)}$$

$$=\frac{(C+1)s^3+(C+D+2)s^2+(D+4)s+8}{s(s+1)(s^2+4)} \qquad (**)$$

Uguagliando i polinomi a numeratore in (*) e (**) si ottengono le condizioni:

$$\begin{cases} C+1=-2 & \Rightarrow\ C=-3 \\ C+D+2=1 & \quad -3+2+2=1 \ \text{Verificata!} \\ D+4=6 & \Rightarrow\ D=2 \\ 8=8 & \text{verificata!} \end{cases}$$

2° METODO - calcolo dei residui

$$\frac{Cs+D}{s^2+4} = \frac{\alpha}{s-2j} + \frac{\alpha^*}{s+2j} = \frac{\overbrace{(\alpha+\alpha^*)}^{2\,\mathrm{Re}(\alpha)}\, s + 2\overbrace{(\alpha-\alpha^*)j}^{2j\,\mathrm{Im}(\alpha)}}{s^2+4} =$$

$$= \frac{2\,\mathrm{Re}(\alpha)\, s - 4\,\mathrm{Im}(\alpha)}{s^2+4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} C = 2\,\mathrm{Re}(\alpha) \\ D = -4\,\mathrm{Im}(\alpha) \end{array}}$$

dove:

$$\alpha = \lim_{s\to 2j} (s-2j)Y(s) = \lim_{s\to 2j} \frac{-2s^3+s^2+6s+8}{s(s+1)(s+2j)} =$$

$$= \frac{16j-4+12j+8}{2j(1+2j)4j} = \frac{4+28j}{-8(1+2j)} \cdot \underbrace{\frac{1-2j}{1-2j}}_{\text{razionalizziamo...}} = \frac{(4+28j)(1-2j)}{-8\cdot 5} =$$

$$= \frac{4-8j+28j+56}{-40} =$$

$$= \frac{60+20j}{-40} = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}j \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{Re}(\alpha) = -\frac{3}{2} \\ \mathrm{Im}(\alpha) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Da cui:

$$C = 2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) = -3$$

$$D = -4\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$$

* * *

In conclusione:

$$Y(s) = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+1} + \frac{-3s+2}{s^2+4} =$$

$$= 2\cdot\underbrace{\frac{1}{s}}_{\text{trasformata di } 1(t)} - \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{\text{trasformata di } e^{-t}} - 3\cdot\underbrace{\frac{s}{s^2+4}}_{\text{trasformata di } \cos(2t)} + \underbrace{\frac{2}{s^2+4}}_{\text{trasformata di } \sin(2t)}$$

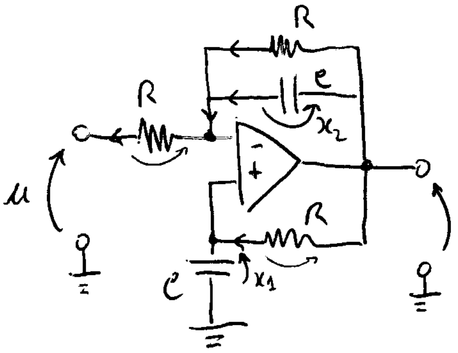
Antitrasformando:

$$y(t) = \left[\,2 - e^{-t} - 3\cos(2t) + \sin(2t)\,\right]\mathbf{1}(t)$$

<u>NOTA</u>- Dato che l'ingresso è nullo per $t<0$, anche la risposta è nulla per $t<0$. Moltiplicare per $\mathbf{1}(t)$ corrisponde dunque a scrivere:

$$y(t) = \begin{cases} 2 - e^{-t} - 3\cos(2t) + \sin(2t) & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t<0 \end{cases}$$

MODELLISTICA



$$u \tilde{=} -R\left(x_2/R + e\ \dot{x}_2\right) + x_1 \quad \Rightarrow$$

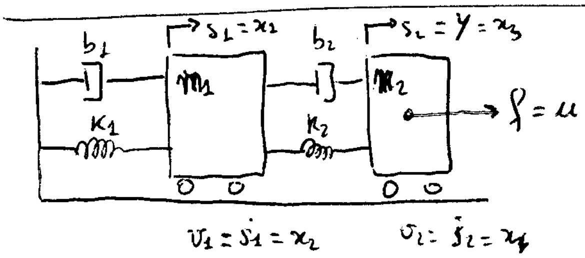
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{Re} x_1 - \frac{1}{RC} x_2 - \frac{1}{Re} u$$

$$x_2 - Re\,\dot{x}_1 = \phi \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_1 = \frac{1}{Re} x_2$$

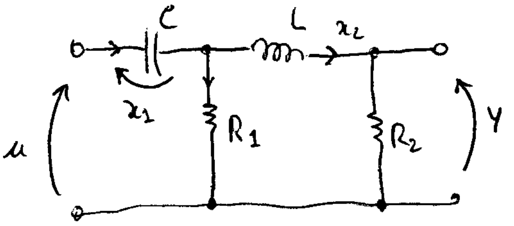
$$y = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{Re} x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{Re} x_1 - \frac{1}{Re} x_2 - \frac{1}{Re} u \\ y = x_1 + x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \underbrace{\overset{A}{\frac{1}{RC}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}}x + \overset{b}{\frac{1}{Re}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}} u \\ y = \underset{c^T}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}} x \end{cases}$$



$$\begin{cases} m_2\,\dot{x}_4 = \overset{(u)}{f} + b_2(x_2 - x_4) + k_2(x_1 - x_3) \\ m_1\,\dot{x}_2 = -b_1 x_2 - K_1 x_1 + b_2(x_4 - x_2) + K_2(x_3 - x_1) \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ y = x_3 \end{cases}$$



$$u = x_1 + L\,\dot{x}_2 + R_2 x_2 \quad \Rightarrow$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{L} x_1 - \frac{R_2}{L} x_2 + \frac{1}{L} u$$

$$u = x_1 + R_1(e\dot{x}_1 - x_2) \quad \Rightarrow$$

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{R_1 C} x_1 + \frac{1}{C} x_2 + \frac{1}{R_1 e} u$$

$$Y = R_2 x_2$$

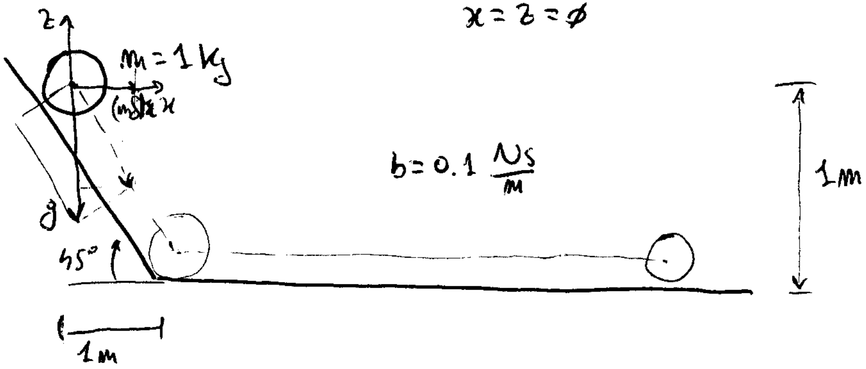
$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -1/R_1 e & 1/e \\ -1/L & -R_2/L \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1/R_1 e \\ 1/L \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & R_2 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

MODELLISTICA

ip) NO RIMBALZI

ip) NO ATTRITO DI ROTOLAMENTO

$\dot{x} = \dot{z} = 0$



$b = 0.1 \frac{Ns}{m}$

$x \leq 1m$, $\dot{x} = 0$

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} + mg \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$m\ddot{x} = -b\dot{x} + \frac{1}{2}mg$$

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{b}{m}x_2 + \overbrace{\frac{1}{2}g}^{u} \\ y = x_1 \end{cases}$$

$y = x$

$x_0 = 0$

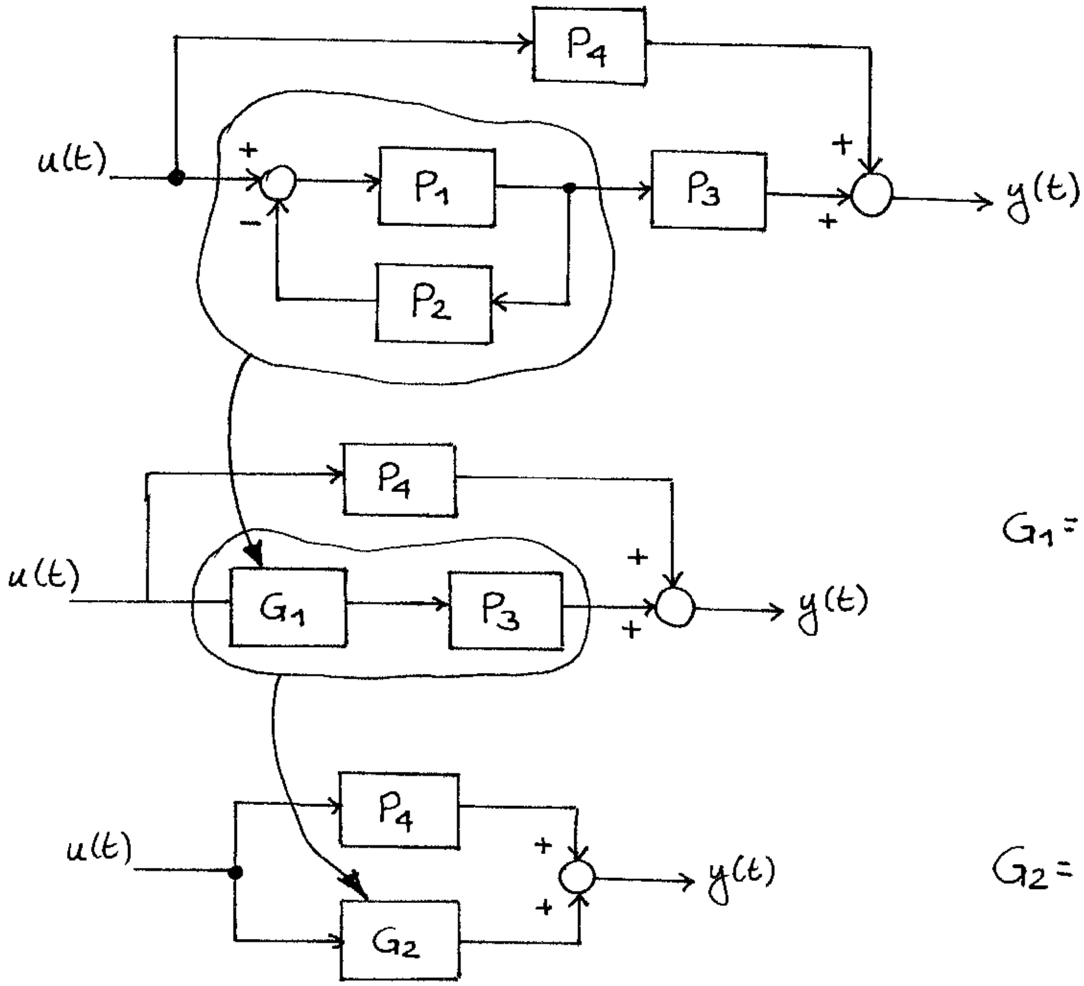
$x \geq 1m$ $\dot{x} = \dot{x}|_{x=1m} \neq 0$

$$m\ddot{x} = -b\dot{x}$$

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} \\ y = x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{b}{m}x_2 \\ y = x_1 \end{cases}$$

Esercizio sui diagrammi a blocchi

Calcolare la funzione di trasferimento da $u(t)$ a $y(t)$, dato lo schema:



$$G_1 = \frac{P_1}{1+P_1P_2}$$ (retroazione negativa)

$$G_2 = P_3 G_1$$ (cascata)

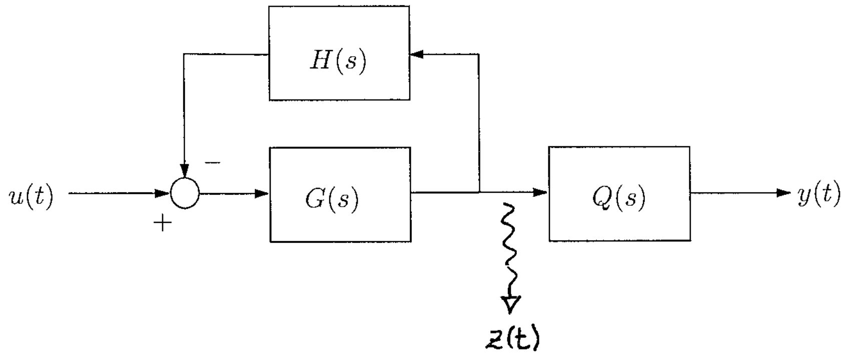
Dunque:

$$P = P_4 + G_2 = P_4 + P_3 G_1 = P_4 + \frac{P_3 P_1}{1+P_1P_2}$$

↑ funzione di trasferimento da $u(t)$ a $y(t)$

Esercizio

Si consideri il sistema a tempo continuo descritto dal diagramma a blocchi in figura, dove $G(s) = \frac{1}{s}$, $H(s) = \frac{1}{s+10}$ e $Q(s) = \frac{s-1}{s+10}$. Si calcoli la funzione di trasferimento del sistema, e la risposta $y_p(t)$ a regime permanente corrispondente all'ingresso $u(t) = 3\sin(2t + \pi/8)$.

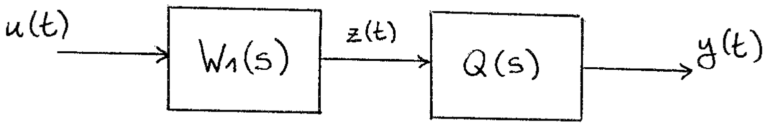


- Chiamiamo $z(t)$ il segnale in ingresso al blocco $Q(s)$. La funzione di trasferimento da $u(t)$ a $z(t)$ è:

$$W_1(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

- RETROAZIONE -

ed il sistema può essere rappresentato nella forma:



A questo punto, la funzione di trasferimento da $u(t)$ a $y(t)$ è:

$$W(s) = W_1(s)\,Q(s) = \frac{G(s)Q(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{\frac{1}{s}\,\frac{s-1}{s+10}}{1+\frac{1}{s}\,\frac{1}{s+10}} = \frac{s-1}{s(s+10)+1} = \frac{s-1}{s^2+10s+1}$$

- SERIE (O CASCATA) -

- La risposta a regime permanente corrispondente a un ingresso sinusoidale esiste se e solo se il sistema è ILUL stabile.

I poli di $W(s)$ hanno parte reale negativa, e quindi il sistema che stiamo considerando è ILUL stabile.

Possiamo dunque procedere al calcolo della risposta a regime permanente...

L'ingresso $u(t)$ è nella forma:

$$u(t) = A\sin(\omega t + \theta)$$

dove $A = 3$, $\omega = 2$ e $\theta = \frac{\pi}{8}$.

Applicando il TEOREMA DELLA RISPOSTA IN FREQUENZA, la risposta a regime permanente risulta:

$$y_P(t) = A\,|W(j\omega)|\sin\left(\omega t + \theta + \angle W(j\omega)\right)$$

Calcoliamo $W(j\omega)$ in $\omega = 2$:

$$W(j2) = \frac{j2-1}{(j2)^2 + 10\cdot j2 + 1} = \frac{-1+2j}{-4+20j+1} = \frac{-1+2j}{-3+20j} = \frac{1-2j}{3-20j}$$

Da cui:

$$|W(j2)| = \frac{|1-2j|}{|3-20j|} = \frac{\sqrt{1^2+(-2)^2}}{\sqrt{3^2+(-20)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{409}} = \sqrt{\frac{5}{409}} \simeq 0.11$$

$$\angle W(j2) = \angle 1-2j - \angle 3-20j = \text{atan}\left(\frac{-2}{1}\right) - \text{atan}\left(\frac{-20}{3}\right) =$$

$$= \text{atan}(-2) - \text{atan}\left(-\frac{20}{3}\right) = \text{atan}\left(\frac{20}{3}\right) - \text{atan}(2) \simeq 0.315 \text{ rad}$$

arcotangente

$\boxed{\text{NOTA: } \text{atan}(-x) = -\text{atan}(x)}$

Dunque:

$$y_P(t) = 3\sqrt{\frac{5}{409}}\,\sin(2t + \theta + \varphi)$$

$$\varphi = \text{atan}\left(\frac{20}{3}\right) - \text{atan}(2)$$

ESERCIZIO

Tracciare i diagrammi di Bode del modulo e della fase della funzione di trasferimento:

$$W(s) = \frac{(s-1)(s+10)}{s(s^2+s+16)}$$

1° passo

Verifichiamo se s^2+s+16 ha radici reali o complesse coniugate.

$\Delta = 1-64 = -63 < 0 \Rightarrow$ radici complesse coniugate

$\Rightarrow s^2+s+16$ NON può essere scomposto nella forma $(s+a)(s+b)$ con $a,b \in \mathbb{R}$.

2° passo

Portiamo $W(s)$ in forma di Bode.

$$W(s) = \frac{(-1)\,10}{16} \frac{(1-s)\left(1+\frac{s}{10}\right)}{s\left(1+\frac{s}{16}+\frac{s^2}{16}\right)} = \frac{k_b}{s} \cdot \frac{(1-\tau_1 s)(1+\tau_2 s)}{1+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

dove:

- $k_b = -\frac{5}{8}$
- $\tau_1 = 1$
- $\tau_2 = \frac{1}{10}$
- $\omega_n^2 = 16 \Rightarrow \omega_n = 4$

  $\frac{2\zeta}{\omega_n} = \frac{1}{16} \Rightarrow \zeta = \frac{\omega_n}{32} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

3° passo

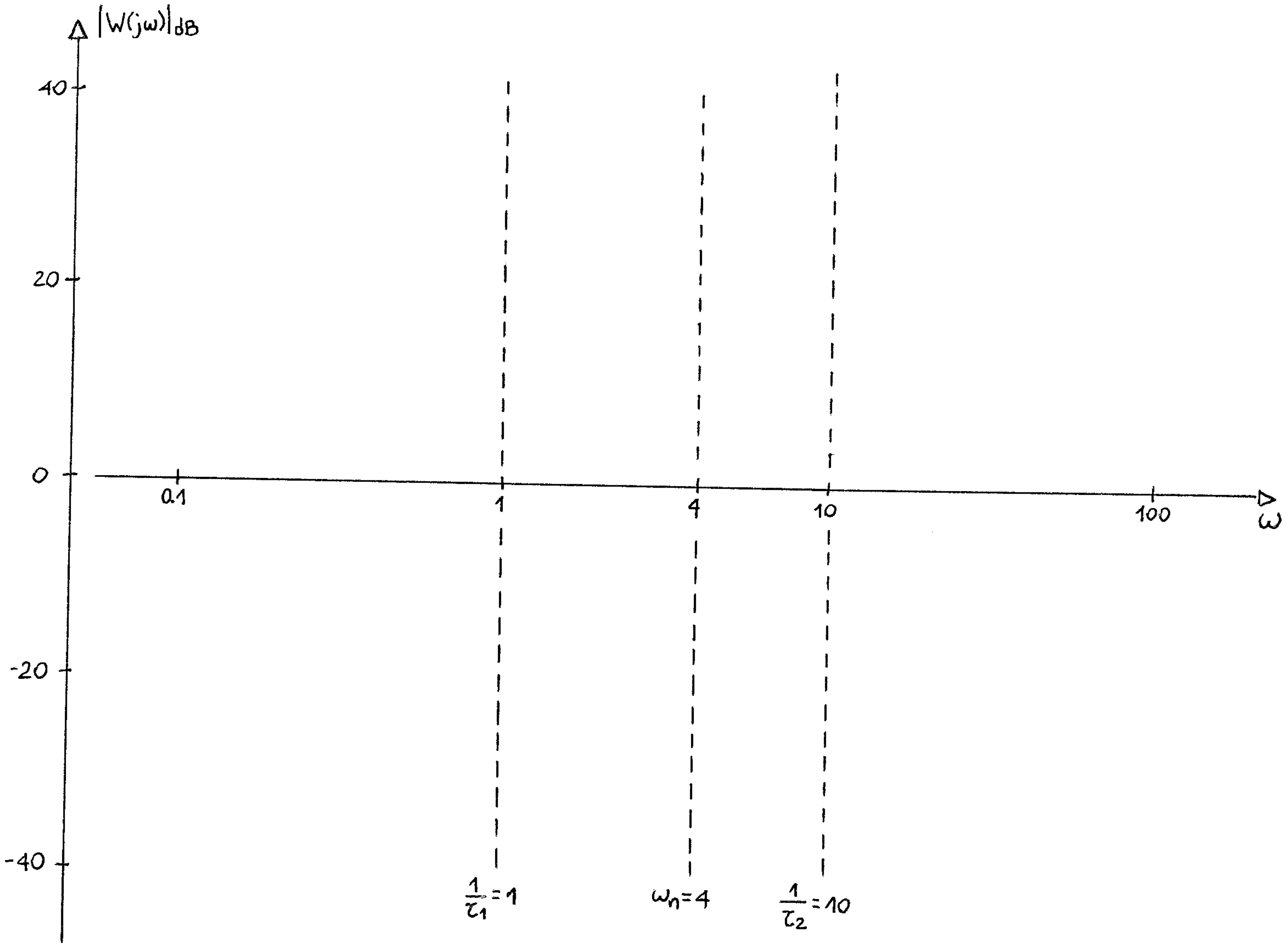
I punti di rottura del diagramma sono:

- $\frac{1}{\tau_1} = 1$
- $\omega_n = 4$
- $\frac{1}{\tau_2} = 10$

⇝ TRACCIAMO IL DIAGRAMMA DI BODE DEL MODULO...

1. Dividiamo il diagramma in settori

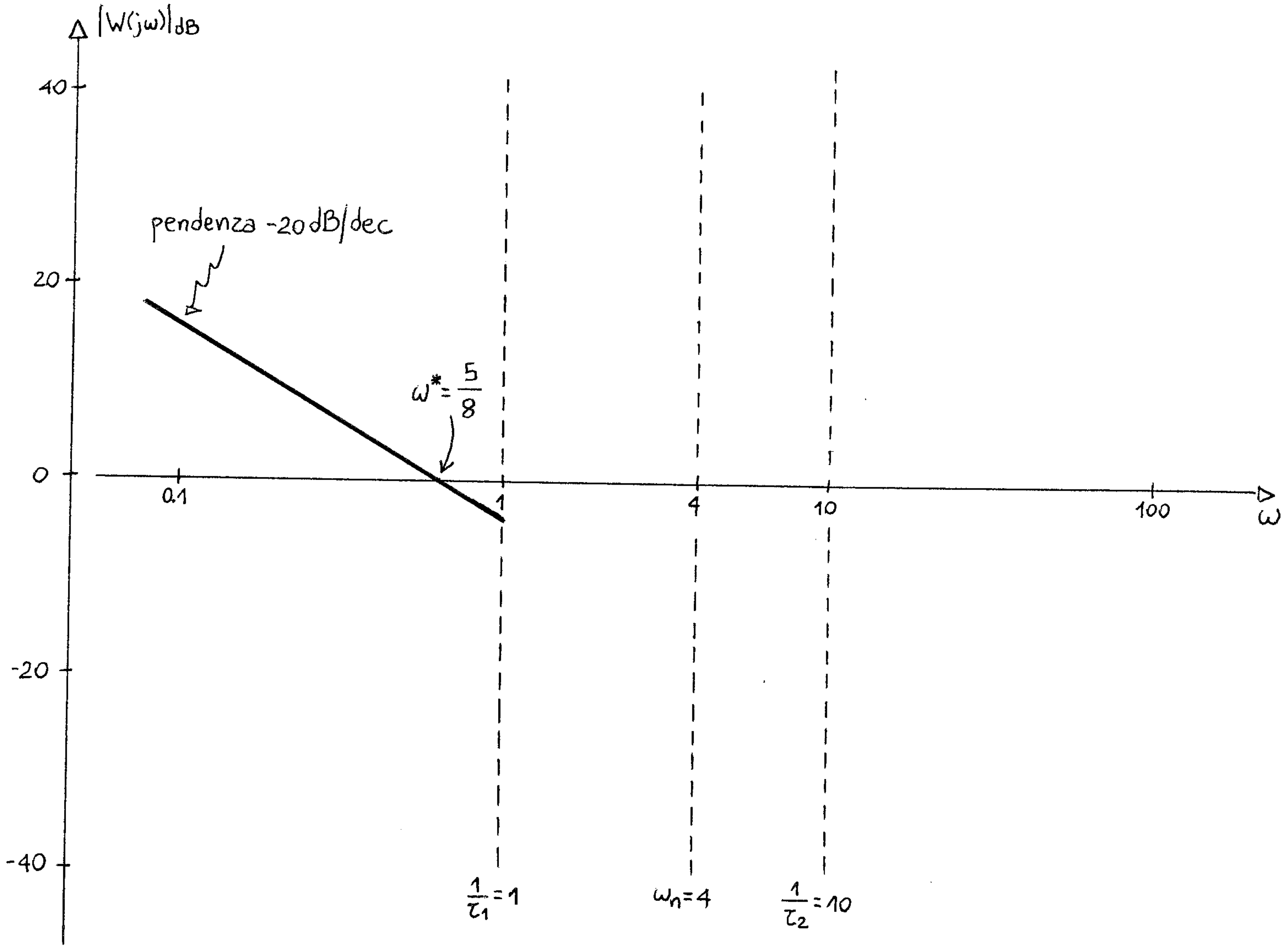
I 3 punti di rottura dividono il diagramma in 4 settori...



La regola e' che ciascun termine in cui e' stata scomposta la funzione di trasferimento W(s) entra in gioco solo dopo il corrispondente punto di rottura, quando si traccia il diagramma asintotico...

2. Se $\omega < \frac{1}{\tau_1} = 1$, l'unico contributo e' quello di $\frac{k_b}{s}$.

"Facciamo finta" che in questo settore la f.di t. sia $W_1(s) = \frac{k_b}{s}$



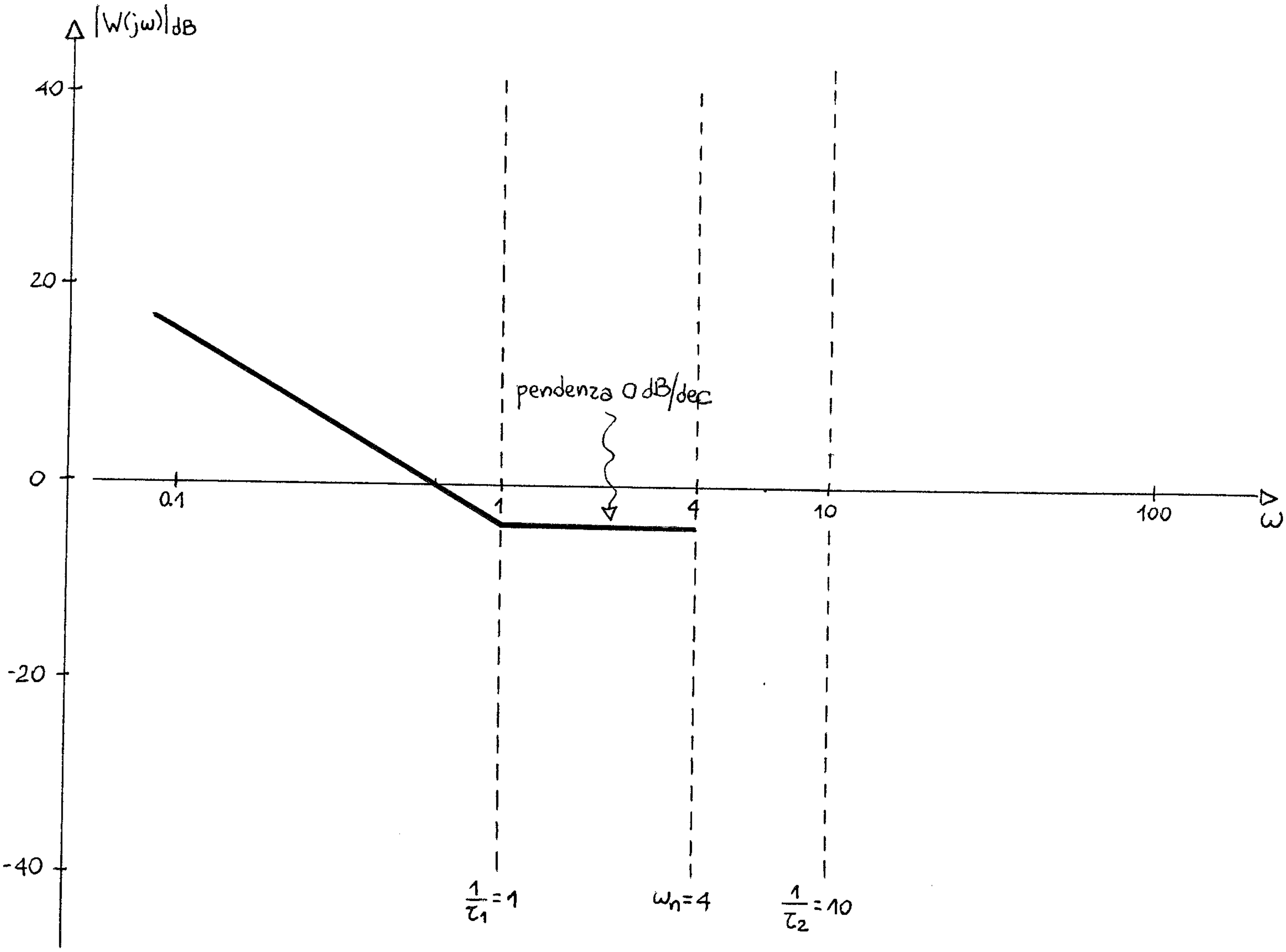
Il contributo al diagramma del termine $\frac{k_b}{s}$ e' una retta con pendenza -20dB/dec, di cui dobbiamo determinare l'intersezione con l'asse delle ascisse.

$$\left|\frac{k_b}{s}\right|_{s=j\omega} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{|k_b|}{\omega} = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega^* = |k_b| = \frac{5}{8}$$

per poterla posizionare correttamente sul grafico...

3. Se $\frac{1}{\tau_1} \leq \omega < \omega_n$ $\left(1 \leq \omega < 4\right)$, i contributi "attivi" sono quelli di $\frac{k_b}{s}$ e $(1-\tau_1 s)$.

"Facciamo finta" che in questo settore la f. di t. sia $W_2(s) = W_1(s) \cdot (1-\tau_1 s)$.



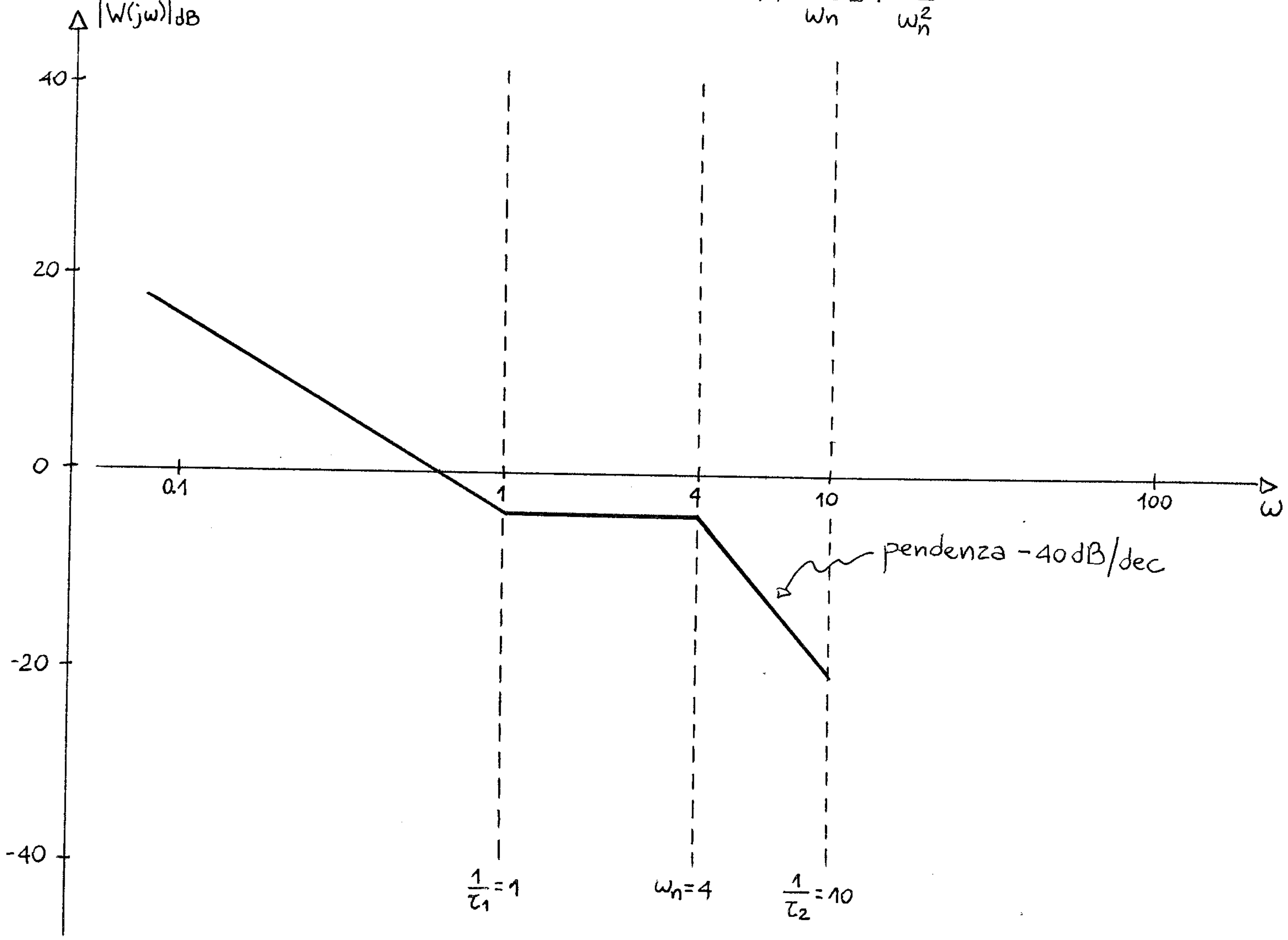
$$W_2(s) = \underbrace{\frac{k_b}{s}}_{\text{contributo } -20\,dB/dec} \cdot \underbrace{(1-\tau_1 s)}_{\text{contributo } +20\,dB/dec}$$

Il contributo complessivo è: $-20+20 = 0$ dB/dec

4. Se $\omega_n \leq \omega < \frac{1}{\tau_2}$ $(4 \leq \omega < 10)$, i contributi "attivi" sono quelli di $\frac{k_b}{s}$, $(1-\tau_1 s)$

e $\frac{1}{1+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}}$. "Facciamo finta" che in questo settore la f.d.t. sia

$$W_3(s) = W_2(s) \cdot \frac{1}{1+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}} .$$

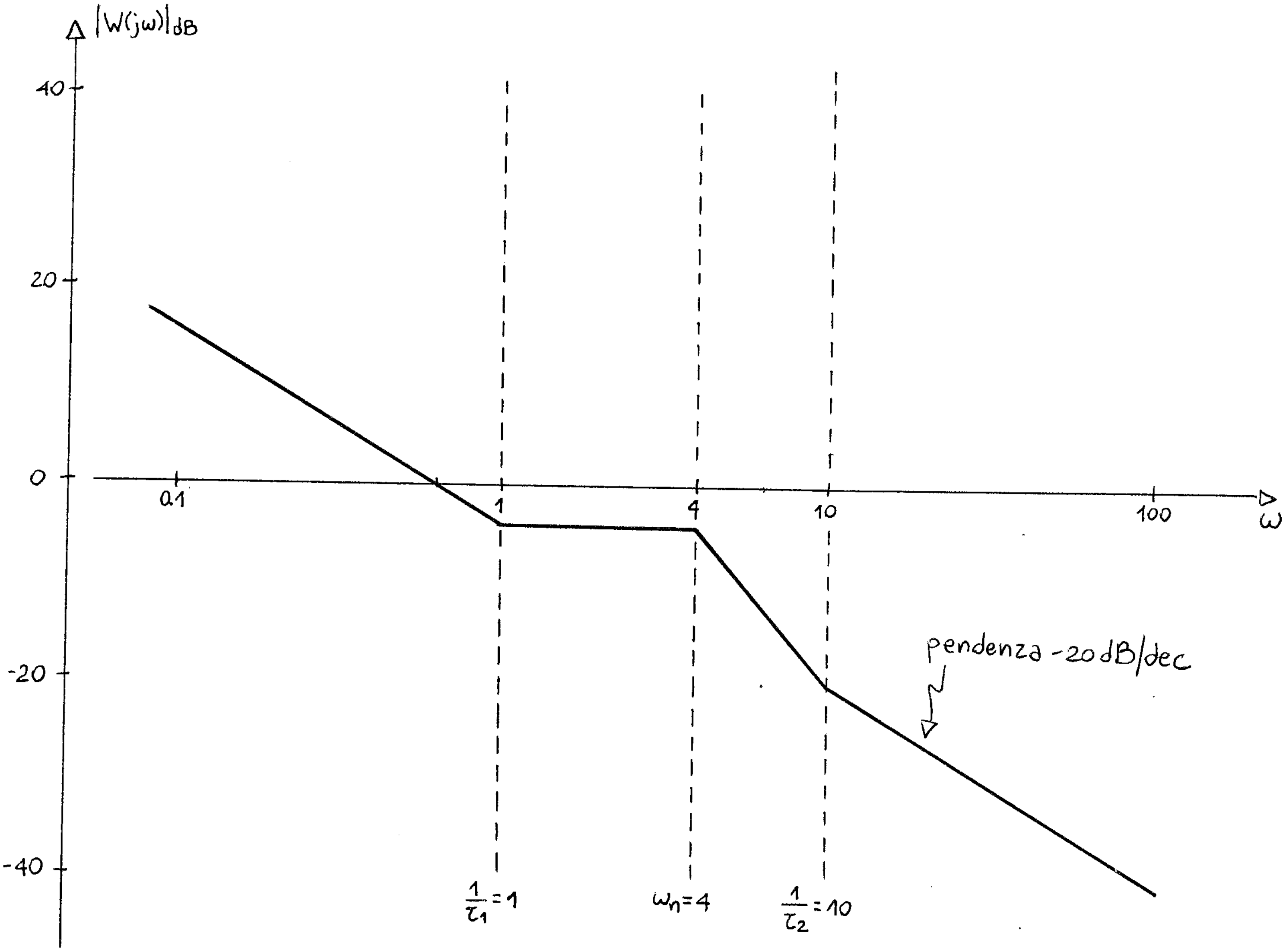


$$W_3(s) = \underbrace{\boxed{\frac{k_b}{s}}}_{\text{contributo } -20\,dB/dec} \cdot \underbrace{\boxed{(1-\tau_1 s)}}_{\text{contributo } +20\,dB/dec} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{1}{1+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}}}}_{\text{contributo } -40\,dB/dec}$$

Il contributo complessivo e': $-20+20-40 = -40$ dB/dec.

5. Se $\omega \geq \frac{1}{\tau_2} = 10$, tutti i termini danno contributo "attivo".

In questo settore la f.d.t. che consideriamo coincide con tutta $W(s)$.



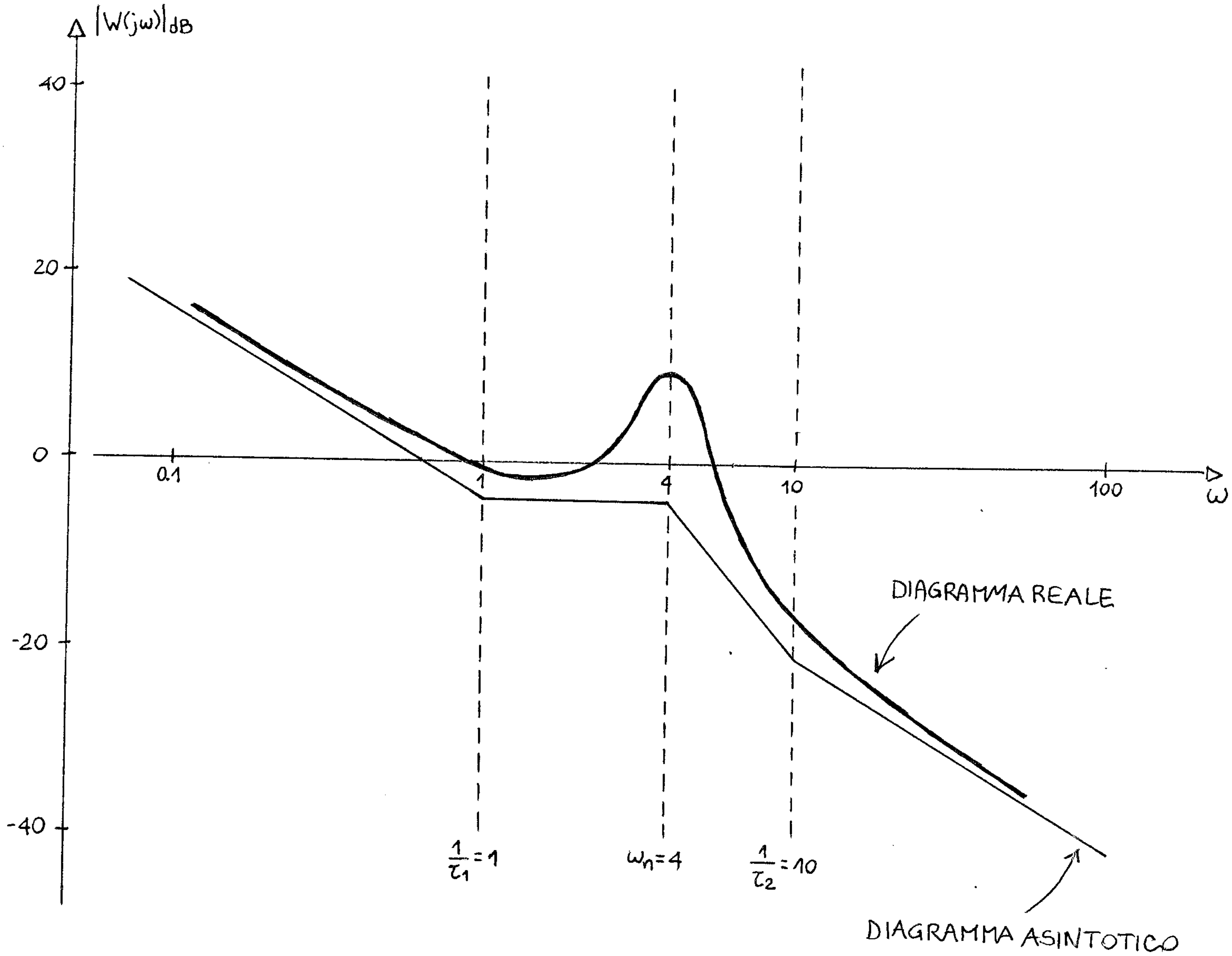
$$W(s) = \underbrace{\frac{k_b}{s}}_{\text{contributo } -20\,dB/dec} \cdot \underbrace{(1-\tau_1 s)}_{\text{contributo } +20\,dB/dec} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}}}_{\text{contributo } -40\,dB/dec} \cdot \underbrace{(1+\tau_2 s)}_{\text{contributo } +20\,dB/dec}$$

Il contributo complessivo è: $-20+20-40+20 = -20$ dB/dec.

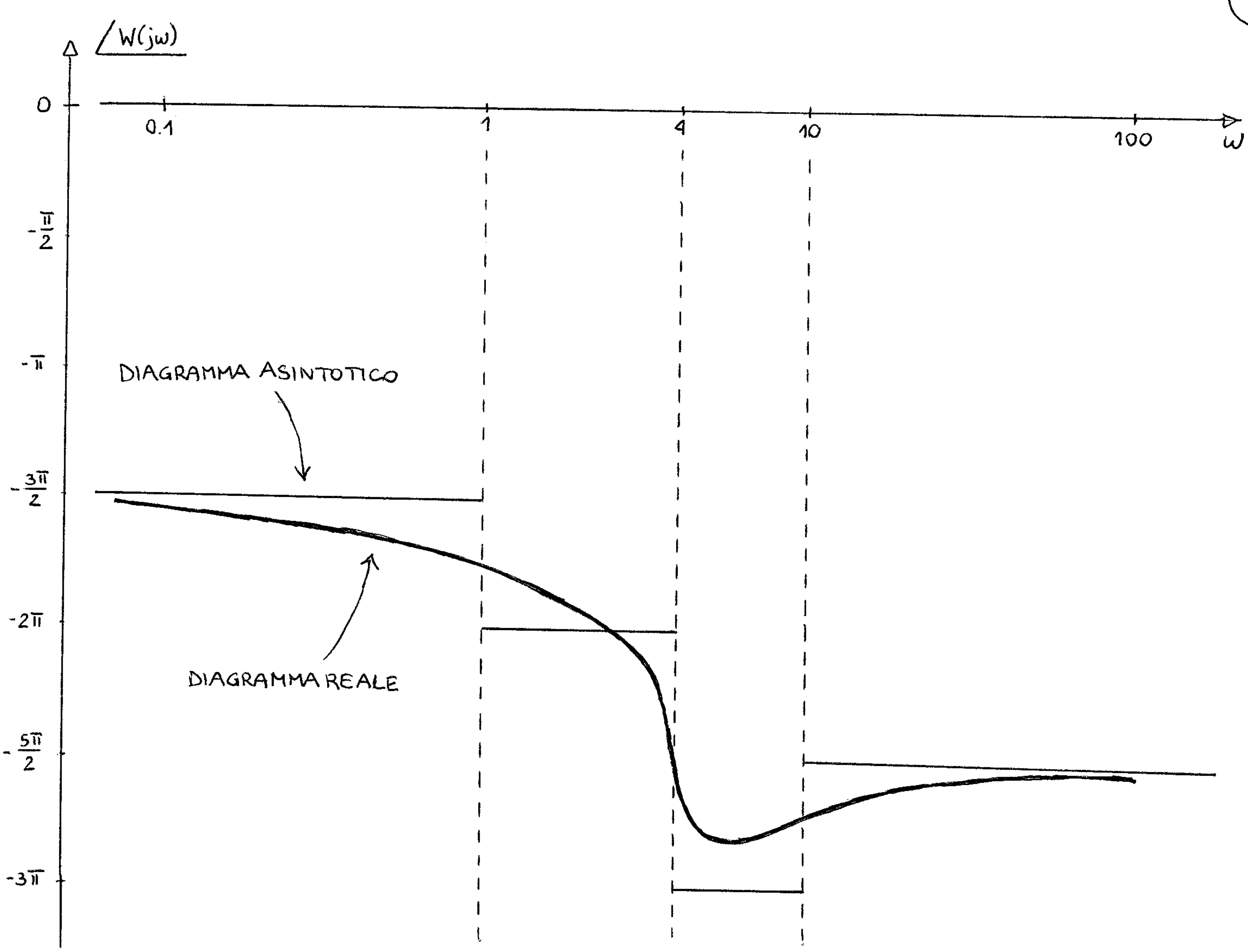
Abbiamo tracciato il DIAGRAMMA ASINTOTICO del modulo...

6. Correzione del diagramma

ATTENZIONE – In $\omega \simeq \omega_n$ dobbiamo considerare la "gobbetta" dovuta al coefficiente di smorzamento ζ...



⤳ TRACCIAMO ORA IL DIAGRAMMA DI BODE DELLA FASE, UTILIZZANDO LO STESSO METODO...



- Se $\omega < \frac{1}{\tau_1} = 1$,

$W_1(s) = \dfrac{\boxed{k_b}}{\boxed{S}}$ → $k_b < 0 \Rightarrow$ contributo $-\pi$

contributo $-\frac{\pi}{2}$

Il contributo complessivo è: $-\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}$

- Se $\frac{1}{\tau_1} \leq \omega < \omega_n$ $(1 \leq \omega < 4)$,

$W_2(s) = \boxed{W_1(S)}\,\boxed{(1-\tau_1 S)}$

contributo $-\frac{3\pi}{2}$

zero instabile $\Rightarrow$ contributo $-\frac{\pi}{2}$

Il contributo complessivo è: $-\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -2\pi$.

- Se $\omega_n \leq \omega < \dfrac{1}{\tau_2}$ $(4 \leq \omega < 10)$,

$$W_3(s) = \underbrace{W_2(s)}_{\text{contributo } -2\pi} \underbrace{\frac{1}{1+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}}}_{\text{coppia di poli complessi coniugati stabili} \Rightarrow \text{contributo } -\pi}$$

Il contributo complessivo è: $-2\pi - \pi = -3\pi$

- Se $\omega \geq \dfrac{1}{\tau_2} = 10$,

$$W(s) = \underbrace{W_3(s)}_{\text{contributo } -3\pi} \underbrace{(1+\tau_2 s)}_{\text{zero stabile} \Rightarrow \text{contributo } +\frac{\pi}{2}}$$

Il contributo complessivo è: $-3\pi + \dfrac{\pi}{2} = -\dfrac{5\pi}{2}$.

Esercizio 1

Data la funzione di trasferimento $W(s) = \dfrac{100\,(s-0.2)}{(s+0.8)(s^2-2s+100)}$,

tracciare i diagrammi di Bode di modulo e fase della corrispondente funzione di risposta armonica $W(i\omega)$.

Innanzi tutto, verifichiamo se $s^2-2s+100$ ha radici reali.

$$\downarrow \Delta = 4-400 = -396 < 0 \quad \Rightarrow \text{radici complesse}$$

Quindi $s^2-2s+100$ non può essere scomposto ulteriormente.

Portiamo $W(s)$ in forma di Bode:

$$W(s) = \underbrace{\boxed{\frac{100\cdot(-0.2)}{0.8\cdot 100}}}_{-0.25}\;\frac{1-\frac{s}{0.2}}{\left(1+\frac{s}{0.8}\right)\left(1-\frac{s}{50}+\frac{s^2}{100}\right)} = k_b\,\frac{1+\tau_1 s}{(1+\tau_2 s)\left(1+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}\right)}$$

dove:

$$k_b = -0.25,\quad \tau_1 = -\frac{1}{0.2} = -5,\quad \tau_2 = \frac{1}{0.8} = 1.25,\quad \omega_n^2 = 100 \Rightarrow \omega_n = 10$$

$$\frac{2\zeta}{\omega_n} = -\frac{1}{50} \quad \Rightarrow \quad \zeta = -\frac{\omega_n}{100} = -\frac{10}{100} = -0.1$$

I punti di rottura dei grafici sono, in ordine crescente:

$$\frac{1}{|\tau_1|} = 0.2\,,\quad \frac{1}{\tau_2} = 0.8\,,\quad \omega_n = 10.$$

Essi dividono i grafici in quattro settori:

1° settore: $\omega \leq \dfrac{1}{|\tau_1|}$

L'unico contributo è quello di k_b.

modulo: costante al valore $20\log_{10}|k_b| = 20\log_{10}(0.25) \simeq -12.04$

fase: $\underset{\nwarrow\ \text{contributo di } k_b<0}{-\pi}$

2° settore: $\frac{1}{|\tau_1|} < \omega \leq \frac{1}{\tau_2}$

Si aggiunge il contributo di $1+\tau_1 s$

modulo: pendenza +20dB/decade

fase: $\underbrace{-\pi}_{\text{contributo di } k_b} \underbrace{-\frac{\pi}{2}}_{\substack{\text{contributo} \\ \text{di } 1+\tau_1 s \\ \text{con } \tau_1<0}} = -\frac{3}{2}\pi$

3° settore: $\frac{1}{\tau_2} < \omega \leq \omega_n$

Si aggiunge il contributo di $\frac{1}{1+\tau_2 s}$

modulo: pendenza $\underbrace{+20}_{\substack{\text{contributo} \\ \text{di } k_b(1+\tau_1 s)}} \underbrace{-20}_{\text{contributo di } \frac{1}{1+\tau_2 s}} = 0$ dB/decade

fase: $\underbrace{-\frac{3}{2}\pi}_{\substack{\text{contributo} \\ \text{di } K_b(1+\tau_1 s)}} \underbrace{-\frac{\pi}{2}}_{\substack{\text{contributo di } \frac{1}{1+\tau_2 s} \\ \text{con } \tau_2>0}} = -2\pi$

4° settore: $\omega > \omega_n$

Si aggiunge il contributo di $\frac{1}{1+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}}$

modulo: pendenza $\underbrace{0}_{\substack{\text{contributo} \\ \text{di } \frac{k_b(1+\tau_1 s)}{1+\tau_2 s}}} \underbrace{-40}_{\text{contributo di } \frac{1}{1+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}}} = -40$ dB/decade

fase: $\underbrace{-2\pi}_{\substack{\text{contributo} \\ \text{di } \frac{k_b(1+\tau_1 s)}{1+\tau_2 s}}} \underbrace{+\pi}_{\text{contributo di } \frac{1}{1+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}} \text{ con } -1<\zeta<0} = -\pi$

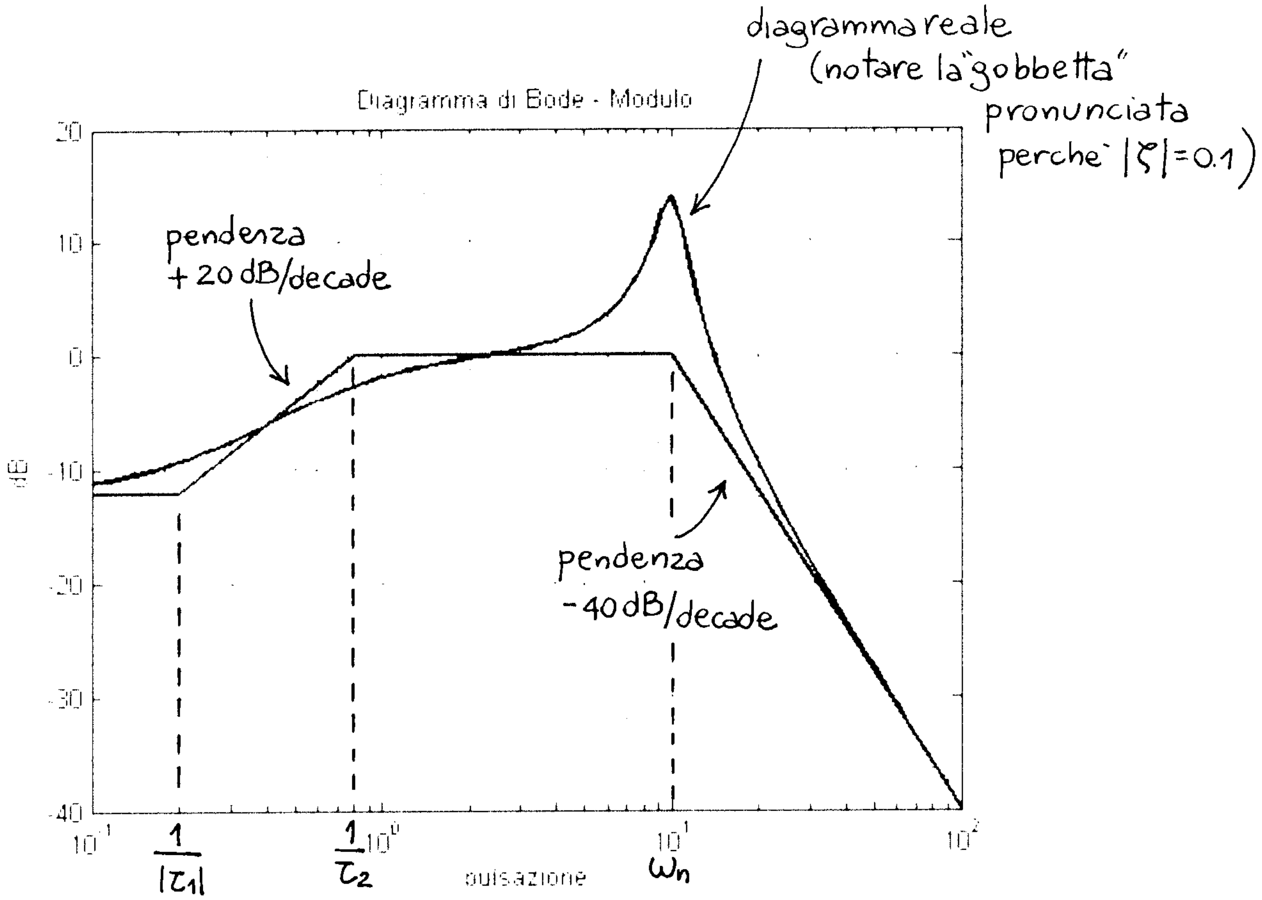


Diagramma di Bode - Modulo

diagramma reale (notare la "gobbetta" pronunciata perche' $|\zeta| = 0.1$)

pendenza +20 dB/decade

pendenza -40 dB/decade

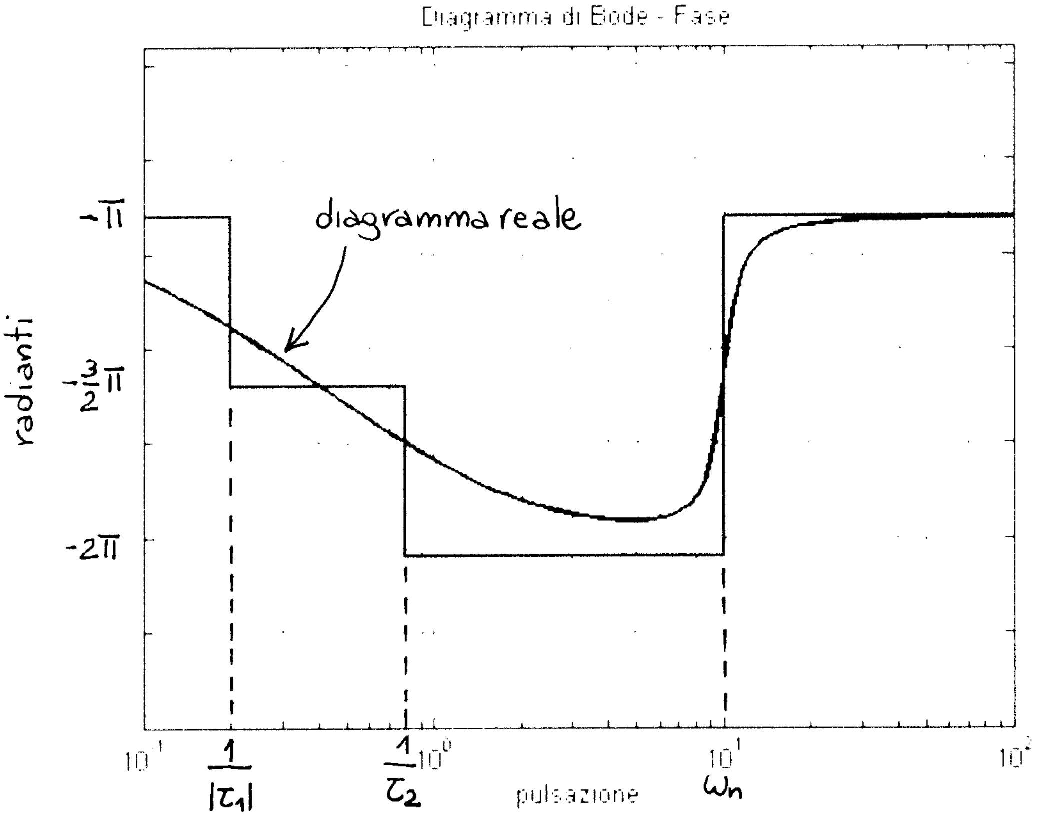


Diagramma di Bode - Fase

diagramma reale

Esercizio 2

Data la funzione di trasferimento $W(s) = \dfrac{s^2+3.2s+16}{s^2(s-40)}$,

tracciare i diagrammi di Bode di modulo e fase della corrispondente funzione di risposta armonica $W(i\omega)$.

Innanzi tutto, verifichiamo se $s^2+3.2s+16$ ha radici reali.

$$\downarrow \Delta = 10.24 - 64 = -53.76 < 0 \Rightarrow \text{radici complesse}$$

Quindi $s^2+3.2s+16$ non può essere scomposto ulteriormente.

Portiamo $W(s)$ in forma di Bode:

$$W(s) = \underbrace{\boxed{\frac{16}{-40}}}_{-0.4} \frac{1+\frac{s}{5}+\frac{s^2}{16}}{s^2\left(1-\frac{s}{40}\right)} = \frac{k_b}{s^2} \, \frac{1+\frac{2\zeta}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}}{1+\tau s}$$

dove:

$$k_b = -0.4, \quad \tau = -\frac{1}{40} = -0.025, \quad \omega_n^2 = 16 \Rightarrow \omega_n = 4,$$

$$\frac{2\zeta}{\omega_n} = \frac{1}{5} \Rightarrow \zeta = \frac{\omega_n}{10} = \frac{4}{10} = 0.4$$

I punti di rottura dei grafici sono, in ordine crescente:

$$\omega_n = 4, \quad \frac{1}{|\tau|} = 40$$

Essi dividono i grafici in tre settori:

1° settore: $\omega \leq \omega_n$

L'unico contributo è quello di $\dfrac{k_b}{s^2}$

modulo: la pendenza è -40 dB/decade. Tuttavia, per posizionare correttamente l'asintoto, ci occorre anche l'intersezione con l'asse delle ascisse (0 dB). Abbiamo:

$$\left|\frac{k_b}{(i\omega)^2}\right| = 1 \iff \frac{|k_b|}{\omega^2} = 1 \iff \omega = \sqrt{|k_b|} = 0.63 \triangleq \omega^*$$

fase: dato che $k_b<0$ e $h=2$, dalla tabella dei contributi asintotici ottenìamo il valore $-\pi-2\cdot\frac{\pi}{2}=-2\pi$.

2° settore: $\omega_n<\omega\leq\frac{1}{|\tau|}$

Si aggiunge il contributo di $1+\frac{2\xi}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}$

modulo: pendenza $\underbrace{-40}_{\text{contributo di } k_b/s^2}+\underbrace{40}_{\text{contributo di } 1+\frac{2\xi}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}}=0$ dB/decade

fase: $\underbrace{-2\pi}_{\text{contributo di } k_b/s^2}+\underbrace{\pi}_{\text{contributo di } 1+\frac{2\xi}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2} \text{ con } 0<\xi<1}=-\pi$

3° settore: $\omega>\frac{1}{|\tau|}$

Si aggiunge il contributo di $\frac{1}{1+\tau s}$

modulo: pendenza $\underbrace{0}_{\text{contributo di } \frac{k_b\left(1+\frac{2\xi}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}\right)}{s^2}}-\underbrace{20}_{\text{contributo di } \frac{1}{1+\tau s}}=-20$ dB/decade

fase: $\underbrace{-\pi}_{\text{contributo di } \frac{k_b\left(1+\frac{2\xi}{\omega_n}s+\frac{s^2}{\omega_n^2}\right)}{s^2}}+\underbrace{\frac{\pi}{2}}_{\text{contributo di } \frac{1}{1+\tau s} \text{ con } \tau<0}=-\frac{\pi}{2}$

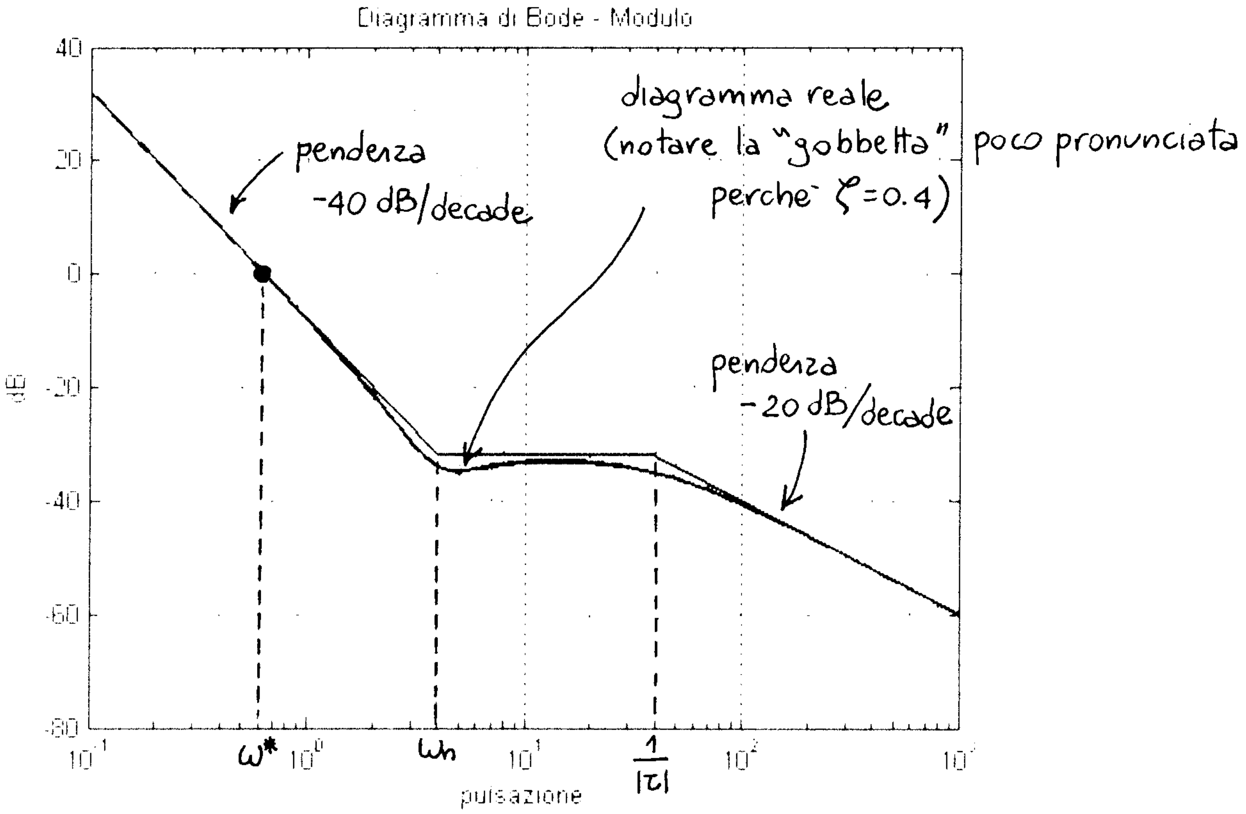


Diagramma di Bode - Modulo
40
20
0
-20
-40
-60
-80
dB
pendenza
-40 dB/decade
diagramma reale
(notare la "gobbetta" poco pronunciata
perche` ζ=0.4)
pendenza
-20 dB/decade
10^-1
ω*
10^0
ωn
10^1
1/|τ|
10^2
10^3
pulsazione

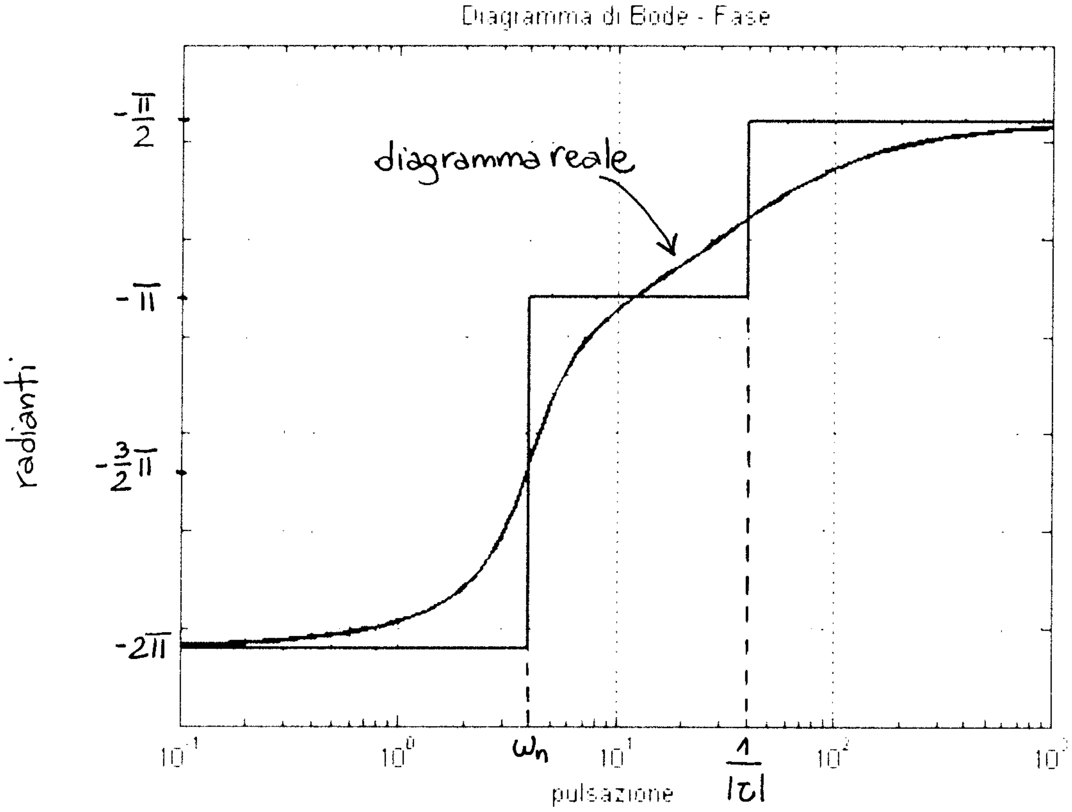


Diagramma di Bode - Fase
-π/2
-π
-3/2 π
-2π
radianti
diagramma reale
10^-1
10^0
ωn
10^1
1/|τ|
10^2
10^3
pulsazione

Esercizio 3

Data la funzione di trasferimento $W(s) = \dfrac{1000 \cdot s\,(s^2+0.04)}{(s+1)\,(s+8)^2}$,

tracciare i diagrammi di Bode di modulo e fase della corrispondente funzione di risposta armonica $W(i\omega)$.

Il fattore $s^2+0.04$ ha radici immaginarie pure, e non può essere scomposto ulteriormente.

Portiamo $W(s)$ in forma di Bode:

$$W(s) = \underbrace{\boxed{\frac{1000 \cdot 0.04}{8^2}}}_{0.625} \frac{s\left(1+\frac{s^2}{0.04}\right)}{(1+s)\left(1+\frac{s}{8}\right)^2} = k_b \frac{s\left(1+\frac{s^2}{\omega_n^2}\right)}{(1+\tau_1 s)\,(1+\tau_2 s)^2}$$

dove:

$$k_b = 0.625\,, \quad \tau_1 = 1\,, \quad \tau_2 = \frac{1}{8} = 0.125\,, \quad \omega_n^2 = 0.04 \Rightarrow \omega_n = 0.2\,, \quad \zeta = 0.$$

I <u>punti di rottura</u> dei grafici sono, in ordine crescente:

$$\omega_n = 0.2\,, \quad \frac{1}{\tau_1} = 1\,, \quad \frac{1}{\tau_2} = 8$$

Essi dividono i grafici in <u>quattro settori</u>:

<u>1° settore:</u> $\omega \leq \omega_n$

L'unico contributo è quello di $k_b s$.

<u>modulo</u>: la pendenza è +20 dB/decade. Tuttavia, per posizionare correttamente l'asintoto, ci occorre anche l'intersezione con l'asse delle ascisse (o dB). Abbiamo:

$$|k_b(i\omega)| = 1 \iff |k_b|\,\omega = 1 \iff \omega = \frac{1}{|k_b|} = 1.6 \triangleq \omega^*$$

<u>fase</u>: dato che $k_b > 0$ e $h=1$, dalla tabella dei contributi asintotici otteniamo il valore $+\frac{\pi}{2}$.

2° settore: $\omega_n < \omega \le \frac{1}{\tau_1}$

Si aggiunge il contributo di $1+\frac{s^2}{\omega_n^2}$.

modulo: pendenza $+20+40 = +60$ dB/decade

contributo di $k_b s$

contributo di $1+\frac{s^2}{\omega_n^2}$

fase: $+\frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2}$

contributo di $k_b s$

contributo di $1+\frac{s^2}{\omega_n^2}$.

3° settore: $\frac{1}{\tau_1} < \omega \le \frac{1}{\tau_2}$

Si aggiunge il contributo di $\frac{1}{1+\tau_1 s}$

modulo: pendenza $+60-20 = +40$ dB/decade

contributo di $k_b s\left(1+\frac{s^2}{\omega_n^2}\right)$

contributo di $\frac{1}{1+\tau_1 s}$

fase: $-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi$

contributo di $k_b s\left(1+\frac{s^2}{\omega_n^2}\right)$

contributo di $\frac{1}{1+\tau_1 s}$ con $\tau_1 > 0$

4° settore: $\omega > \frac{1}{\tau_2}$

Si aggiunge il contributo di $\frac{1}{(1+\tau_2 s)^2} \longrightarrow$ si "raddoppia" il contributo!

modulo: $+40 \underbrace{-20-20}_{\text{2 volte il contributo di } \frac{1}{1+\tau_2 s}} = 0$ dB/decade

fase: $-\pi \underbrace{-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}}_{\text{2 volte il contributo di } \frac{1}{1+\tau_2 s} \text{ con } \tau_2 > 0.} = -2\pi$

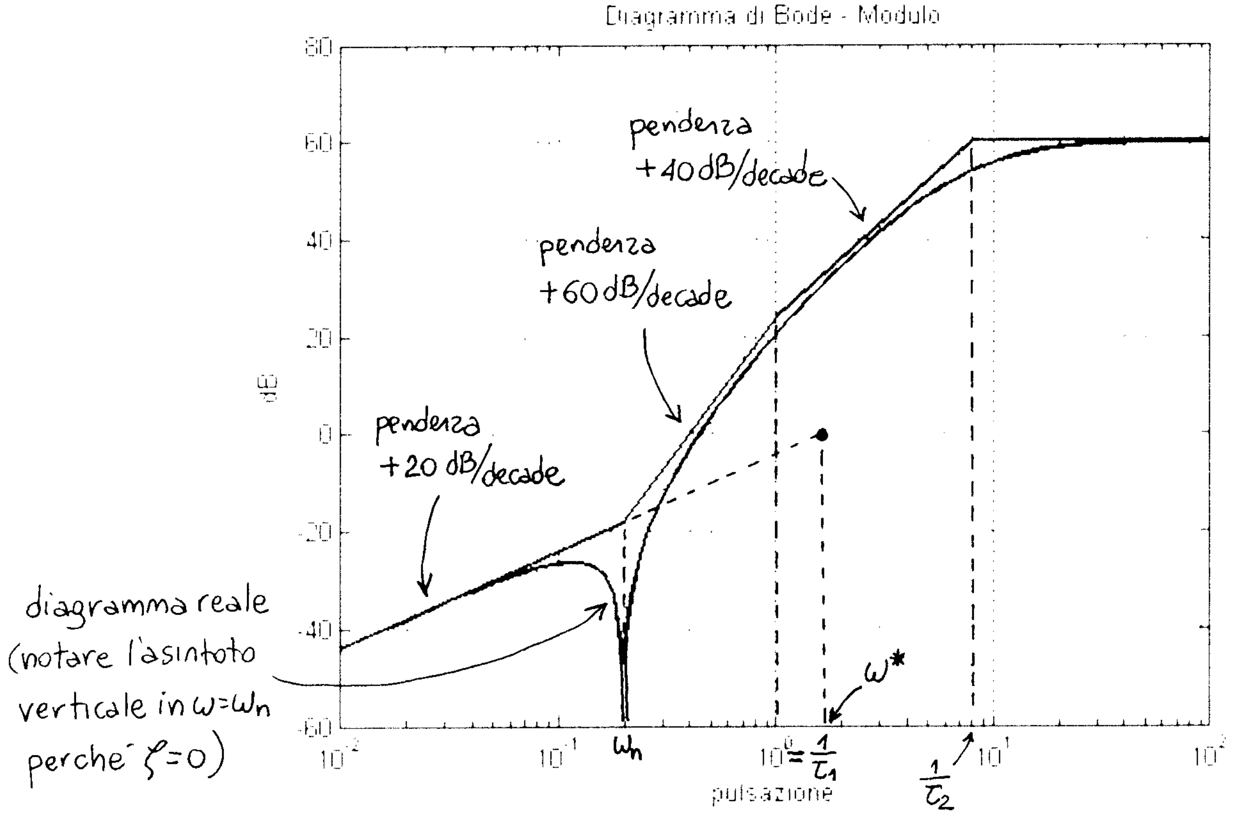


Diagramma di Bode - Modulo

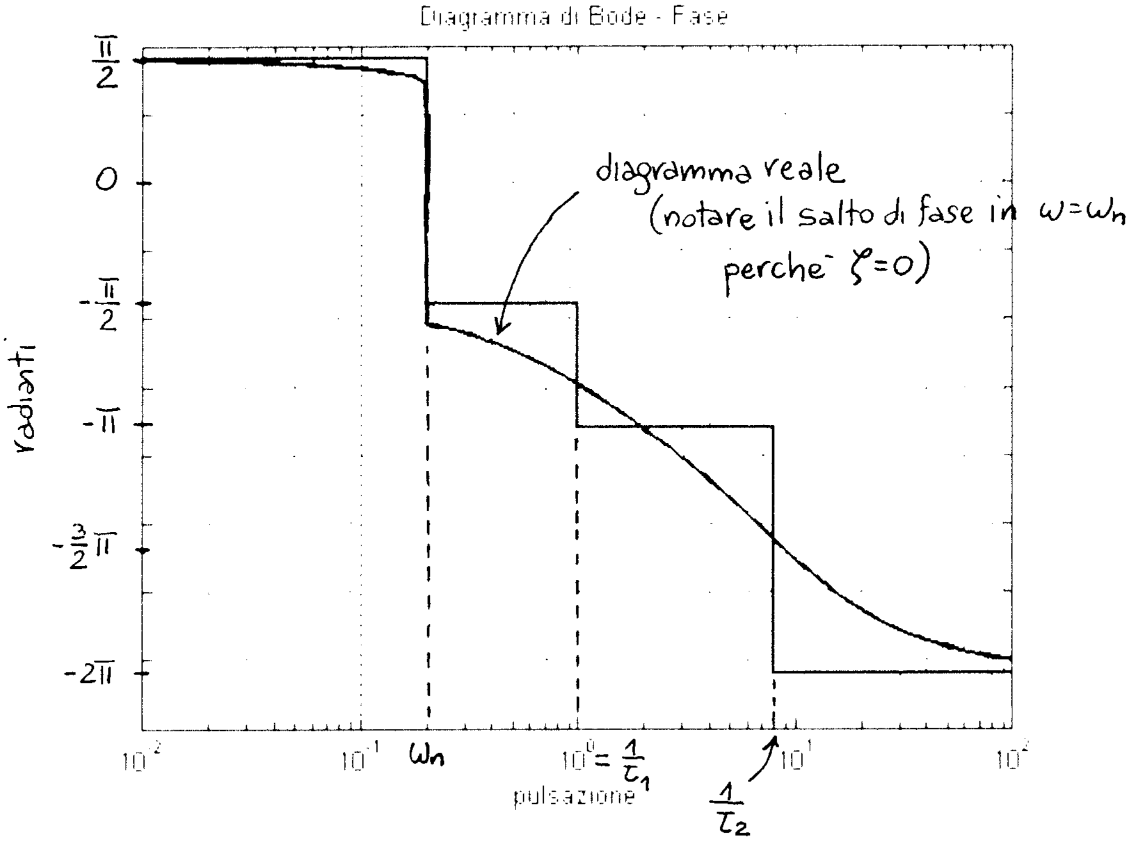
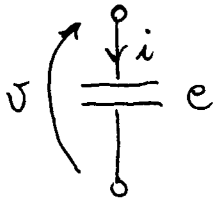
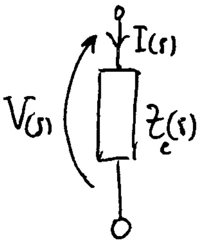


Diagramma di Bode - Fase

IMPEDENZA EQUIVALENTE IN S

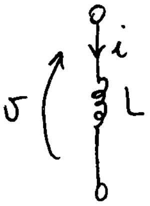


$$i = \frac{d}{dt}(Cv) \underset{\substack{\uparrow \\ C\ \text{cost.}}}{=} C\dot{v} \xrightarrow{\mathcal{L}} I(s) = CsV(s) \Rightarrow V(s) = \frac{1}{sC} I(s)$$

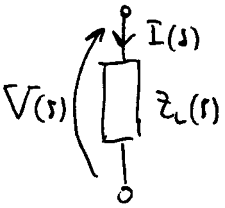


$$V(s) = Z_C(s) I(s)$$

$$Z_C(s) = \frac{1}{sC}$$



$$v = \frac{d}{dt}(Li) \underset{\substack{\uparrow \\ L\ \text{cost.}}}{=} L\dot{i} \xrightarrow{\mathcal{L}} V(s) = LsI(s)$$

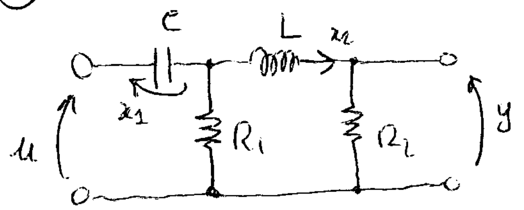


$$V(s) = Z_L(s) I(s)$$

$$Z_L(s) = sL$$

ⓣ

IMPEDENZA EQUIVALENTE IN S



$$u = x_1 + L\dot{x}_2 + R_2 x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{L}x_1 - \frac{R_2}{L}x_2 + \frac{1}{L}u$$

$$u = x_1 + R_1(C\dot{x}_1 - x_2)$$

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{R_1C}x_1 + \frac{1}{C}x_2 + \frac{1}{R_1C}u$$

$$y = R_2 x_2$$

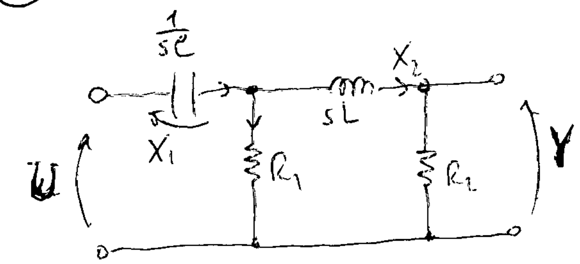
$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1C} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1/R_1C \\ 1/L \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & R_2 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

$$R_1 = R_2 = L = C = 1 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

$$W(s) = C(sI-A)^{-1}B + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{D}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+1 & -1 \\ 1 & s+1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc} s+1 & 1 \\ \multicolumn{2}{c}{\boxed{-1 \quad s+1}} \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{(s+1)^2 + 1} =$$

$$= \frac{s}{s^2 + 2s + 2}$$

Ⓢ



$$U = X_1 + sLX_2 + Y$$

$$Y = R_2 X_2$$

$$U = X_1 + R_1(sCX_1 - X_2) = X_1 + R_2 sC X_1 - Y R_1/R_2$$

$$U = X_1 + \frac{sL}{R_2}Y + Y$$

$$U = (1 + R_2 sC)X_1 - \frac{R_1}{R_2}Y \Rightarrow X_1 = \frac{1}{1+sR_2C}\left(U + \frac{R_1}{R_2}Y\right)$$

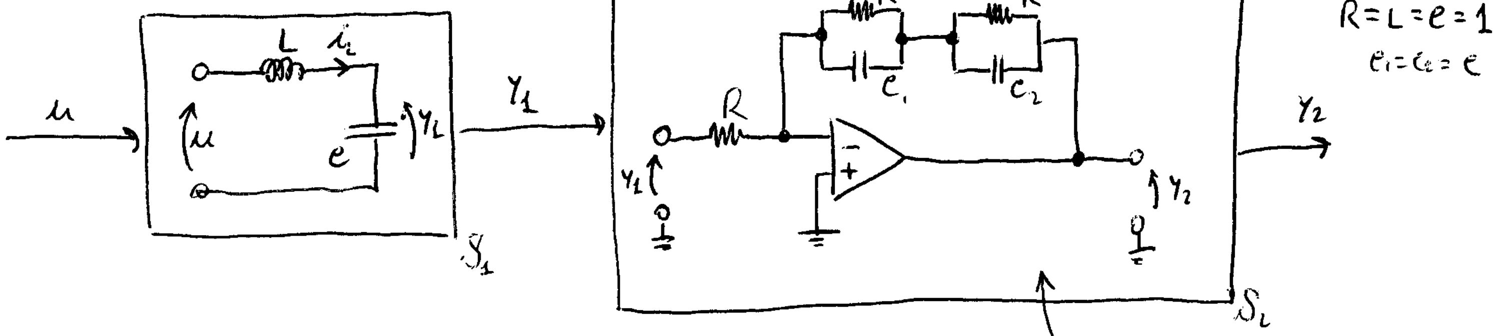
$$U = \frac{1}{1+sR_2C}\left(U + \frac{R_1}{R_2}Y\right) + \left(1 + s\frac{L}{R_2}\right)Y$$

$$R_1 = R_2 = C = L = 1 \quad \Rightarrow \quad U = \frac{1}{1+s}(U+Y) + (1+s)Y = \frac{1}{1+s}U + \frac{1}{1+s}Y + (1+s)Y$$

$$(1+s)U - U = Y + (1+s)^2 Y \quad \Rightarrow \quad sU = (s^2+2s+2)Y$$

$$Y = \frac{s}{s^2+2s+2}U \quad \Rightarrow \quad W(s) = \frac{s}{s^2+2s+2}$$

IMPEDENZA EQUIVALENTE IN S



$R = L = C = 1$

$C_1 = C_2 = C$

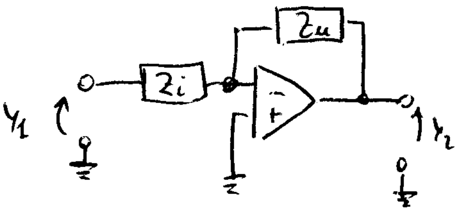
(!) SISTEMA NON RAGGIUNGIBILE E NON CONTROLLABILE SE $x_1 = v_{C1}$, $x_2 = v_{C2}$.
FORMA MINIMA SE $x' = x_1 + x_2$

1) I-S-U

2) RISPOSTA $u(t) = 10\,\delta(t)$

3) STUDIARE STAB., RAGG. E OSS. DI S_2

1) $$u = L\frac{d}{dt}(C\dot{y}_1) + \qquad = LC\ddot{y}_1 + \qquad \Rightarrow G_1(s) = \frac{Y_1(s)}{U(s)} = \frac{1}{1+s^2}$$



$$G_2(s) = \frac{Y_2(s)}{Y_1(s)} = -\frac{Z_u(s)}{Z_i(s)} = -\frac{2\,\frac{R\cdot\frac{1}{sC}}{R+\frac{1}{sC}}}{R} = -\frac{2R}{1+RCs} = -\frac{2}{s+1}$$

(!) DENOMINATORE GRADO 1
⇓
CANCELLAZIONI SE SI SCELGONO LE TENSIONI SULLE C COME VAR. DI STATO

$$G(s) = G_1(s)\,G_2(s) = \frac{1}{s^2+1}\left(-\frac{2}{s+1}\right) = -\frac{2}{(s^2+1)(s+1)} = \frac{-2}{s^3+s^2+s+1}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

FORMA CANONICA DI OSSERVAZIONE

2) $$u(t) = 10\,\delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U(s) = 10 \Rightarrow Y(s) = G(s)U(s) = \frac{-20}{(s^2+1)(s+1)} = \frac{\overset{10}{\overset{\shortparallel}{A}}s + \overset{-10}{\overset{\shortparallel}{B}}}{s^2+1} + \frac{\overset{-10}{\overset{\shortparallel}{C}}}{s+1}$$

$$Y(s) = 10\left(\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s+1}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(t) = 10\left(\cos(t) - \mathrm{sen}(t) - e^{-t}\right)\delta_{-1}(t)$$

3) PER COSTRUIRE LA ISU DI S_2 PROVIAMO A SCEGLIERE COME VAR. DI STATO LE TENSIONI AI CAPI DELLE DUE CAPACITA'

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{1}{RC}(-x_1 + u) \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{RC}(-x_2 + u) \\ y = -x_1 - x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

CANCELLAZIONI !

- $$W(s) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+\frac{1}{RC} & 0 \\ 0 & s+\frac{1}{RC} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s+\frac{1}{RC}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+\frac{1}{RC}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{-2}{s+\frac{1}{RC}}$$

- VERIFICHIAMO LA RAGGIUNGIBILITA' E CONTROLLABILITA':

$M_R = \begin{pmatrix} B & AB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho(M_R) = 1 < 2 \Rightarrow$ SISTEMA NON COMPLETAM. RAGGIUNGIBILE

$M_O = \begin{pmatrix} C^T & A^TC^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho(M_O) = 1 < 2 \Rightarrow$ SISTEMA NON COMPLETAMENTE OSSERVABILE

- EVIDENTE <u>ERRORE DI MODELLAZIONE</u> ⇒ CAMBIAMO SCELTA VAR. DI STATO:

$$x = v_{C1} + v_{C2} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = \frac{1}{RC}(-x + 2u) \\ y = -x \end{cases}$$ ← SISTEMA IN FORMA MINIMA

- IL SISTEMA S_2 E' ASINTOTICAMENTE STABILE

Esercizio

Studiare la stabilità del sistema $\dot{x}(t) = Ax(t)$, dove

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}a^2 & a^2-1 & \frac{1}{2}a^2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

e $a \in \mathbb{R}$ è un parametro.

Calcoliamo gli autovalori della matrice A.

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \left[\lambda - (a^2-1)\right] \det\begin{pmatrix} \lambda + \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \lambda + \frac{3}{2} \end{pmatrix} =$$

sviluppando il calcolo del determinante rispetto alla seconda colonna

$$= \left[\lambda - (a^2-1)\right]\left[\left(\lambda + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] = \left[\lambda - (a^2-1)\right]\left(\lambda^2 + 3\lambda + 2\right) =$$

$$\Delta = 9 - 8 = 1$$

$$\lambda = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{matrix} -2 \\ -1 \end{matrix}$$

$$= \left[\lambda - (a^2-1)\right](\lambda+1)(\lambda+2)$$

Gli autovalori della matrice A sono:

$\lambda_1 = a^2 - 1$

$\lambda_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 < 0$

$\lambda_3 = -2 \quad \Rightarrow \quad \lambda_3 < 0$

Procediamo ora allo studio della stabilità del sistema al variare del parametro a, ricordando che il sistema è a tempo continuo, e quindi ci interessa il segno [della parte reale] degli autovalori.

Abbiamo tre casi:

1) $\lambda_1 < 0 \iff a^2 - 1 < 0 \iff -1 < a < 1$

Dato che $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$, il sistema è asintoticamente stabile.

2) $\lambda_1 > 0 \iff a^2 - 1 > 0 \iff a < -1$ oppure $a > 1$

Dato che $\lambda_1 > 0$, il sistema è instabile.

3) $\lambda_1 = 0 \iff a^2 - 1 = 0 \iff a = \pm 1$

In questo caso, $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$.

↙

Per questo autovalore, verifichiamo se vale $\mu_1 = \nu_1$.

In effetti, $\mu_1 = 1$ implica $\nu_1 = 1$, e quindi $\mu_1 = \nu_1$.

Dunque, il sistema è semplicemente stabile.

STABILITA' CONDIZIONATA'

$$\varphi(s) = \alpha s^3 + \beta s^2 + 6s + \gamma \qquad , \quad \alpha \in [3,4] \ , \ \beta \in [2,3] \ , \ \gamma \in [1,2]$$

- KHARITONOV

$$\varphi_a = \alpha^+ s^3 + \beta^+ s^2 + 6s + \gamma^- = 4s^3 + 3s^2 + 6s + 1 \longrightarrow \text{ok}$$

$$\varphi_b = \alpha^- s^3 + \beta^- s^2 + 6s + \gamma^+ = 3s^3 + 2s^2 + 6s + 2 \longrightarrow \text{ok}$$

$$\varphi_c = \alpha^+ s^3 + \beta^- s^2 + 6s + \gamma^- = 4s^3 + 2s^2 + 6s + 1 \longrightarrow \text{ok}$$

$$\varphi_d = \alpha^- s^3 + \beta^+ s^2 + 6s + \gamma^+ = 3s^3 + 3s^2 + 6s + 2 \longrightarrow \text{ok}$$

φ_a

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 14/3 & \\ 0 & 1 & \end{array}$$

φ_b

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 2 \\ \hline 1 & 3 & \\ 0 & 2 & \end{array}$$

φ_c

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 4 & \\ 0 & 1 & \end{array}$$

φ_d

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ \hline 1 & 4 & \\ 0 & 2 & \end{array}$$

- ROUTH

$$\begin{array}{c|cc} 3 & \alpha & 6 \\ 2 & \beta & \gamma \\ \hline 1 & \ell_1 & \\ 0 & \gamma & \end{array}$$

$$\ell_1 = -\frac{1}{\beta}\begin{vmatrix} \alpha & 6 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} = -\frac{1}{\beta}\left(\alpha\gamma - 6\beta\right)$$

$$\begin{cases} \alpha > 0 & \rightarrow \text{ok} \\ \beta > 0 & \rightarrow \text{ok} \\ \ell_1 > 0 & \longrightarrow \quad \alpha\gamma - 6\beta < 0 \\ \gamma > 0 & \rightarrow \text{ok} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha\gamma - 6\beta \geq \alpha^-\gamma^- - 6\beta^+ = 3 - 18 = -15 \\ \alpha\gamma - 6\beta \leq \alpha^+\gamma^+ - 6\beta^- = 8 - 12 = -4 \end{cases}$$

$$-15 \leq \alpha\gamma - 6\beta \leq -4$$

$$\downarrow$$

ok

CONTROLLABILITÀ e OSSERVABILITÀ

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & k \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} u$$

Per quali valori di K il sistema è completamente controllabile ?

$$\mathcal{C} = (b \;\; Ab \;\; A^2b) = \begin{pmatrix} 0 & 2k & -4k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\rho(\mathcal{C}) \leq 2$ xchè due righe dipendenti

$\Rightarrow$ MAI completam. controllabile

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & k \\ 0 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} h \\ 1 \end{pmatrix} u$$

Per quali K e h il sistema è completam. controll.?

$$\mathcal{C} = (b \;\; Ab) = \begin{pmatrix} h & 3h+k \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$\det(\mathcal{C}) = -k \Rightarrow$ Completam. controllabile $\forall h$ e $\forall k \neq 0$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} x$$

Discutere le proprietà strutturali (stabilità, controllabilità, osservabilità)

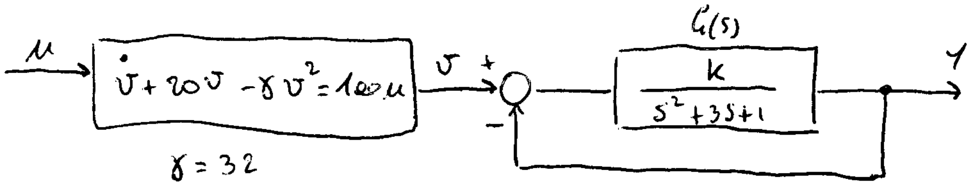
1) Poli del sistema: $sI - A = \begin{pmatrix} s & -1 & -1 \\ 1 & s+2 & 0 \\ 0 & 0 & s+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(sI-A) = (s+1)^3 \Rightarrow$ 3 poli reali coincidenti in $-1 \Rightarrow$ A.S

2) Controllabilità: $\mathcal{C} = (b \;\; Ab \;\; A^2b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho(\mathcal{C}) = 2 \Rightarrow$ N.C.C.

3) Osservabilità: $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} c^T \\ c^T A \\ c^T A^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \rho(\mathcal{O}) = 3 \Rightarrow$ C.O.

LINEARIZZAZIONE

①



1) i-s-u
2) Punti di equilibrio per $u = cost$
3) Modello linearizzato per $u = 0$
4) Valori di k per cui asint. stabilità e $W(s)$
5) Diagrammi di Bode; valutare ω_3 [con $k = 32$]
6) Controllabilità e Osservabilità mod. linearizzato

1)

$$W_1(s) = \frac{V(s)}{U(s)} \qquad W_2(s) = \frac{Y(s)}{V(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{k}{s^2+3s+1+k}$$

$$\begin{cases} \ddot{y} + 3\dot{y} + (1+k)y = kv & (i-u)_2 \\ \dot{v} + 20v - \gamma v^2 = 100u & (i-u)_1 \end{cases}$$

$x_1 = v \quad , \quad x_2 = y \quad , \quad x_3 = \dot{y}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -20x_1 + 32x_1^2 + 100u \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -3x_3 - (1+k)x_2 + kx_1 \\ y = x_2 \end{cases} \qquad (i-s-u)$$

2)

$$\begin{cases} 0 = -20x_1 + 32x_1^2 + 100u \\ 0 = x_3 \\ 0 = kx_1 - (1+k)x_2 - 3\cancel{x_3} \end{cases} \rightarrow \quad 8x_1^2 - 5x_1 + 25u = 0$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5 \pm \sqrt{25-800u}}{16} = \frac{5 \pm 5\sqrt{1-32u}}{16} \\ x_2 = \frac{k}{k+1} \cdot \frac{5 \pm 5\sqrt{1-32u}}{16} \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$\Delta > 0 \Rightarrow 2$ sol.
$\Delta = 0 \Rightarrow 1$ sol.
$\Delta < 0 \Rightarrow \nexists$ sol.

$$u = 0 \Rightarrow \quad x_1 = 0,\ 5/8 \quad ; \quad x_2 = \frac{k}{k+1}x_1 \quad ; \quad x_3 = 0 \qquad x_{e1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad x_{e2} = \begin{pmatrix} 5/8 \\ \frac{5}{8}\frac{k}{k+1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

3) Punto di equil. x_{e1}

$$\begin{cases} \delta\dot{x} = A\,\delta x + b\,\delta u \\ \delta y = c^T\delta x + d\,\delta u \end{cases} \qquad A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_{e1} \\ u=0}} = \left.\begin{pmatrix} -20+64\overset{0}{\overset{\shortparallel}{x_1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & -1-k & -3 \end{pmatrix}\right|_{x=x_{e1}}$$

$$b = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_{e1} \\ u=0}} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad c^T = \left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_{e1} \\ u=0}}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad d = \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{\substack{x=x_{e1} \\ u=0}} = 0$$

$$u = \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{\hat{u}} + \delta u = \delta u \quad , \qquad x = \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{\hat{x}} + \delta x = \delta x \quad , \quad y = \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{\hat{y}} + \delta y = \delta y$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ k & -1-k & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ \\ y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

4) $$W(s) = c^T (sI-A)^{-1} b + d = (0 \; 1 \; 0) \begin{pmatrix} s+20 & 0 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ -k & k+1 & s+3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{(0 \; 1 \; 0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}^{\#} \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{(s+20)(s^2+3s+k+1)}$$

$$W(s) = \frac{100 \, \overset{\overset{k}{\shortparallel}}{a_{12}}}{(s+20)(s^2+3s+k+1)} = \frac{100 k}{(s+20)(s^2+3s+k+1)}$$

stabile $\iff k+1 > 0 \iff k > -1$

5) $$k = 32 \Rightarrow W(s) = \frac{3200}{(s+20)(s^2+3s+33)} \longrightarrow W(j\omega) = W(s)\big|_{s=j\omega} = \frac{\cancel{3200}^{\cancel{160}\;4.85}}{\cancel{20}(1+0.05j\omega)\cancel{33}\left(1+\frac{1}{11}j\omega - \frac{\omega^2}{33}\right)}$$

$$\begin{cases} \tau_1 = 0.05 \\ \omega_n = \sqrt{33} \simeq 5.24 \\ \frac{2\zeta}{\omega_n} = \frac{1}{11} \Rightarrow \zeta = 0.26 \end{cases}$$

$\frac{1}{\tau_1} = 20$ rad/s , $\omega_n = 5.24$ rd/s

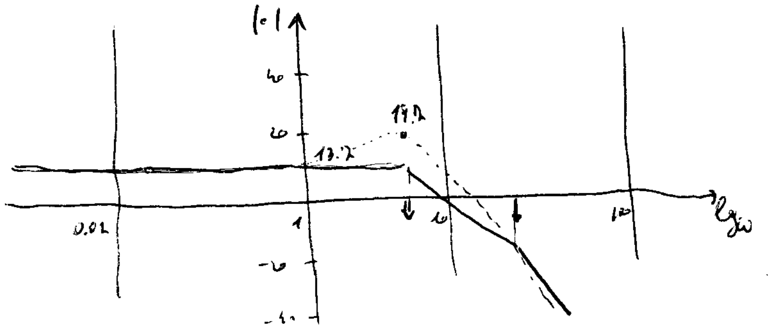
$[4.85]_{dB} = 13.7 = [\mu]_{dB}$

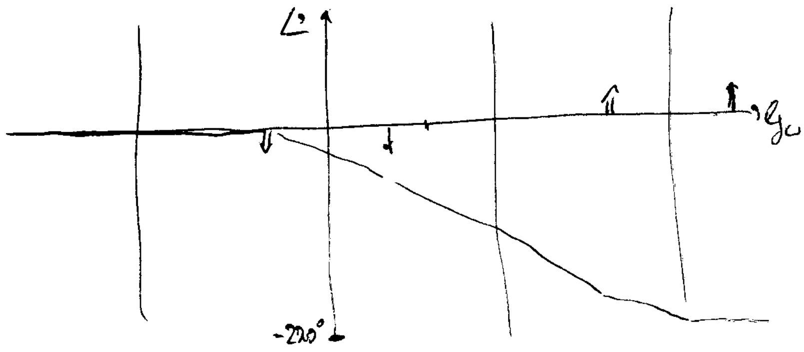
$\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2} \simeq 5,34$ rad/s

$M_r = (2|\zeta|\sqrt{1-\zeta^2})^{-1} \simeq 5.98 \rightarrow |W(j\omega_r)|_{dB} = \overset{[M]dB}{13.7} + 5.98 = 19.7$ dB

$W(\overset{\overset{5.24}{\shortparallel}}{\sqrt{33}}) = -2.46 - j8.58 = 8.92\, e^{-j106°}$

$[W(\overset{\omega_n}{5.24})]_{dB} = 19$ dB





CONTROLLABILITA' ED OSSERVABILITA'

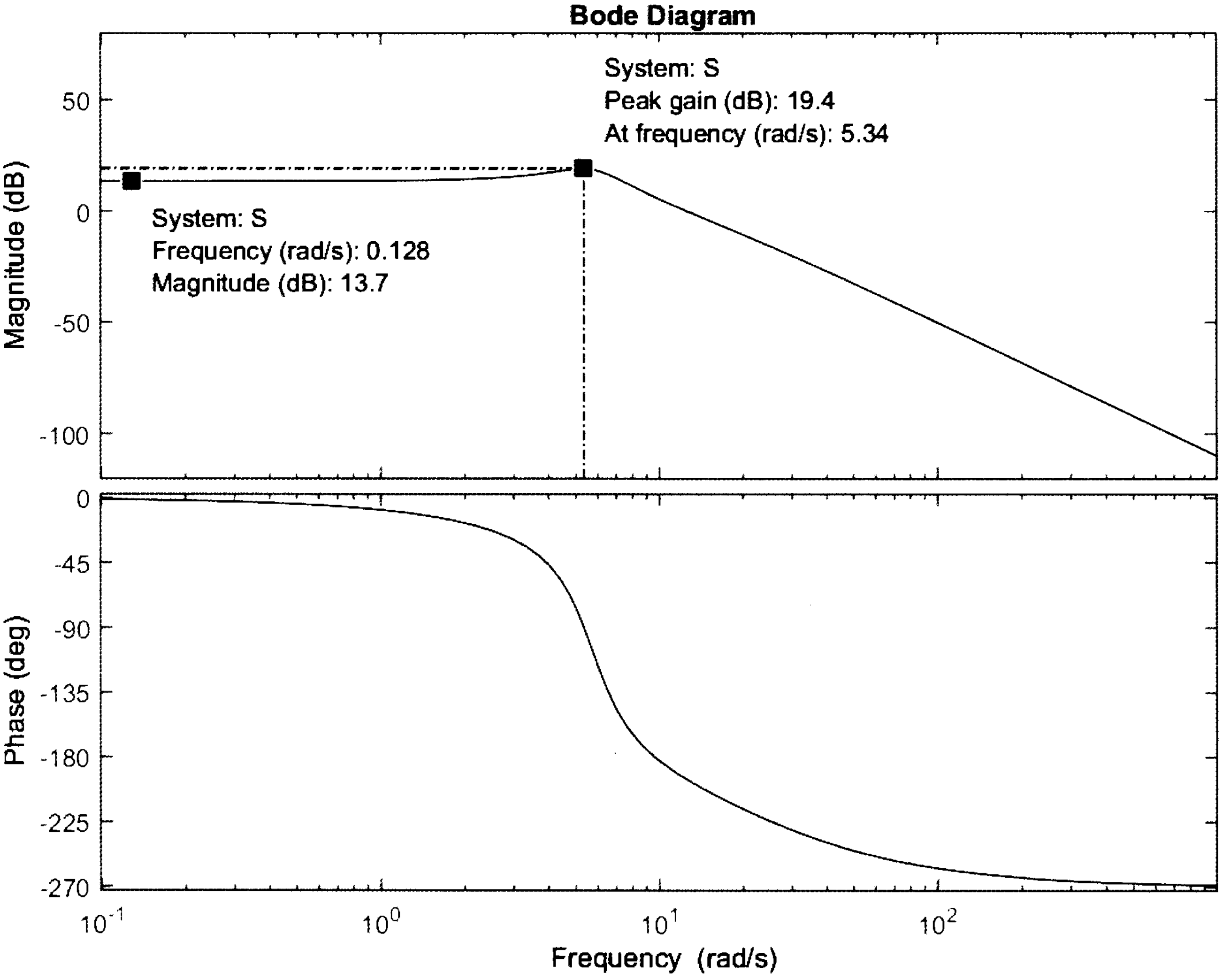
$$\mathcal{C} = (b \;\; Ab \;\; A^2 b) = 100 \begin{pmatrix} 1 & -20 & 400 \\ 0 & 0 & 32 \\ 0 & 32 & -736 \end{pmatrix}$$

$\rho(\mathcal{C}) = 3 \Rightarrow$ Completamente Controll.

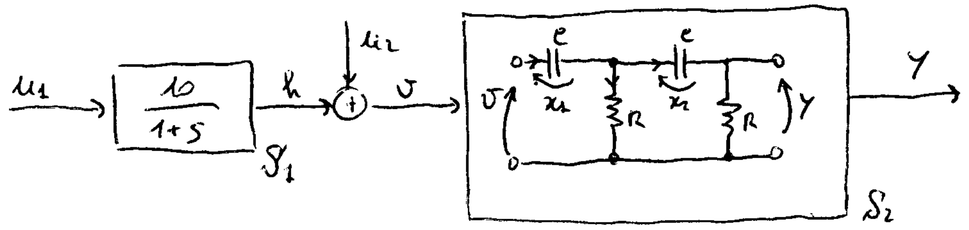
$$O = \begin{pmatrix} c^T \\ c^T A \\ c^T A^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 32 & -33 & -3 \end{pmatrix}$$

$\rho(O) = 3 \Rightarrow$ completam. Osservabil

③


Bode Diagram
System: S
Peak gain (dB): 19.4
At frequency (rad/s): 5.34
System: S
Frequency (rad/s): 0.128
Magnitude (dB): 13.7
Magnitude (dB)
50
0
-50
-100
Phase (deg)
0
-45
-90
-135
-180
-225
-270
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Frequency (rad/s)

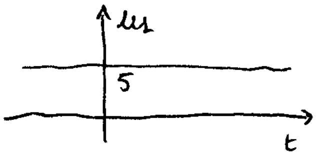
RISPOSTA A INGRESSO COMPLESSO (MISO)

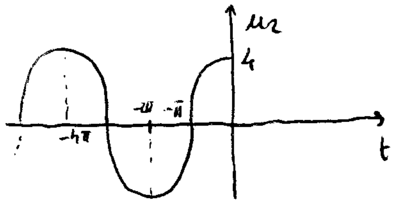


$R = C = 1$

1) i-s-u

2) Risposta al regime:





3) Diagrammi di Bode e banda passante per Y/U_1.

4) Osservabilità e Controllabilità

1) S_1: $W_1 = \frac{10}{1+s} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_3 + x_3 = 10\, u_1 \\ h = x_3 \end{cases}$

S_2: $\begin{cases} v = x_1 + x_2 + RC\dot{x}_2 \\ CR(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = x_2 + RC\dot{x}_2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + v \\ \dot{x}_1 = 2\dot{x}_2 + x_2 = -2x_1 - 2x_2 + 2v + x_2 = -2x_1 - x_2 + 2v \end{cases}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - x_2 + 2v \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + v \\ Y = -x_1 - x_2 + v \end{cases} \qquad v = \overset{x_3}{\overset{\parallel}{h}} + u_2 \Rightarrow \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2u_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_3 + u_2 \\ \dot{x}_3 = -x_3 + 10\, u_1 \\ Y = -x_1 - x_2 + x_3 + u_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} u \qquad , \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ y = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} u \end{cases}$$

2) Principio di sovrapposizione degli effetti: $Y = Y_1 + Y_2$

$$S_2: \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} v \\ Y = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} + (1)\, v \end{cases}$$

$$W_2(s) = c^T (sI - A)^{-1} b + d = \frac{\begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+1 & -1 \\ -1 & s+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{(s+2)(s+1) - 1} + 1$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} -s & 1-s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{s^2 + 3s + 1} + 1 = \frac{1 - 3s}{s^2 + 3s + 1} + 1 = \frac{s^2}{s^2 + 3s + 1}$$

$$= \frac{s^2}{(s + 2.62)(s + 0.382)} \qquad \Rightarrow \text{Poli } Re < 0 \,!$$

$$u_2(t) = \overset{u_{21}(t)}{4\cos(\tfrac{1}{2}t)} - \overset{u_{22}(t)}{4\cos(\tfrac{1}{2}t)\,\delta_{-1}(t)} = u_{21}(t) - u_{22}(t)$$

$$W_2(j0.5) = -0.0662 + 0.133j = 0.15\,e^{j2.03} \Rightarrow Y_{21}(t) = 0.60 \cdot \cos(0.5t + 2.03)$$

$$u_{22}(t) = 4\cos(0.5t)\,\delta_{-1}(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} U_{22}(s) = 4\,\frac{s}{s^2 + 1/4} \Rightarrow Y_{22}(s) = \frac{4s^3}{(s+2.62)(s+0.382)(s^2+0.25)}$$

$$Y_{22}(s) = \frac{\overset{4.52}{\overset{\shortparallel}{r_1}}}{s+2.62} + \frac{\overset{-0.252}{\overset{\shortparallel}{r_2}}}{s+0.382} + \frac{\overset{-0.177+j0.266}{\overset{\shortparallel}{r_3}}}{s-j0.5} + \frac{r_3^*}{s+j0.5} \quad ; \quad r_3 = 0.30\,e^{+j2.03}$$

$$y_{22}(t) = \left(4.52\,e^{-2.62t} - 0.252\,e^{-0.382t} + 0.60\cos(0.5t + 2.03)\right)\delta_{-1}(t)$$

$$W_{u1}(s) = W_1(s)\cdot W_2(s) = \frac{10\,s^2}{(s+1)(s^2+3s+1)} \Rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{GUADAGNO} \\ \text{STATICO}}}{W_{u1}(0) = 0} \Rightarrow Y_1(t) = 0$$

3) $$W_{u1}(j\omega) = \frac{10\,(j\omega)^2}{(1+j\omega)(2.62+j\omega)(0.382+j\omega)} = \overset{20dB}{\overset{\shortparallel}{10}}\,\frac{(j\omega)^2}{(1+j\omega)(1+j\omega 0.382)(1+j\omega 2.62)}$$

[→ VEDI DIAGRAMMI ALLEGATI]

4) Matrice di controllabilità:

$$C = [B \;\; AB \;\; A^2B] = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 20 & -5 & -30 & 13 \\ 0 & 1 & 10 & -3 & -20 & 8 \\ 10 & 0 & 10 & 0 & 10 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho(C) = 3 \Rightarrow S.\ c.c.$$

Matrice di osservabilità:

$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -8 & -5 & 6 \end{pmatrix}, \quad \rho(O) = 3 \Rightarrow S.\ c.o.$$

2bis) SOLUZIONE ALTERNATIVA

$$W(s) = \begin{bmatrix} \underset{\overset{\uparrow}{u_1 \to y}}{W_{11}(s)} & \underset{\overset{\uparrow}{u_2 \to y}}{W_{12}(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1(s)\,W_2(s) & W_2(s) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{10\,s^2}{(s+1)(s+2.62)(s+0.382)} & \dfrac{s^2}{(s+2.62)(s+0.382)} \end{bmatrix}$$

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4\cos(\tfrac{1}{2}t) - 4\cos(\tfrac{1}{2}t)\delta_{-1}(t) \end{bmatrix} = \underset{\underset{y'}{\overset{u'}{\downarrow}}}{\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}} + 4\underset{\underset{y''}{\overset{u''}{\downarrow}}}{\begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\tfrac{1}{2}t) \end{bmatrix}} - 4\underset{\underset{y'''}{\overset{u'''}{\downarrow}}}{\begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\tfrac{1}{2}t)\delta_{-1}(t) \end{bmatrix}}$$

$$y(t) = y' + 4y'' - 4y'''$$

(u') $u' = \text{cost}$, S' è A.S. $\Rightarrow$ GUADAGNO STATICO

$$y' = W(0)\,u' = \begin{bmatrix} W_{11}(0) & W_{12}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} = 5 \underset{\underset{0}{\shortparallel}}{W_{11}(0)} = 0$$

(u'') u'' SEGNALE PERIODICO , S' è A.S. $\Rightarrow$ TH. RISPOSTA ARMONICA

$$y'' = |W_{12}(j\tfrac{1}{2})| \cos\left(\tfrac{1}{2}t + \angle W_{12}(j\tfrac{1}{2})\right) \underset{\underset{W(j\frac{1}{2}) = 0.15\,e^{j2.03}}{\uparrow}}{=} 0.15 \cos\left(\tfrac{1}{2}t + 2.03\right)$$

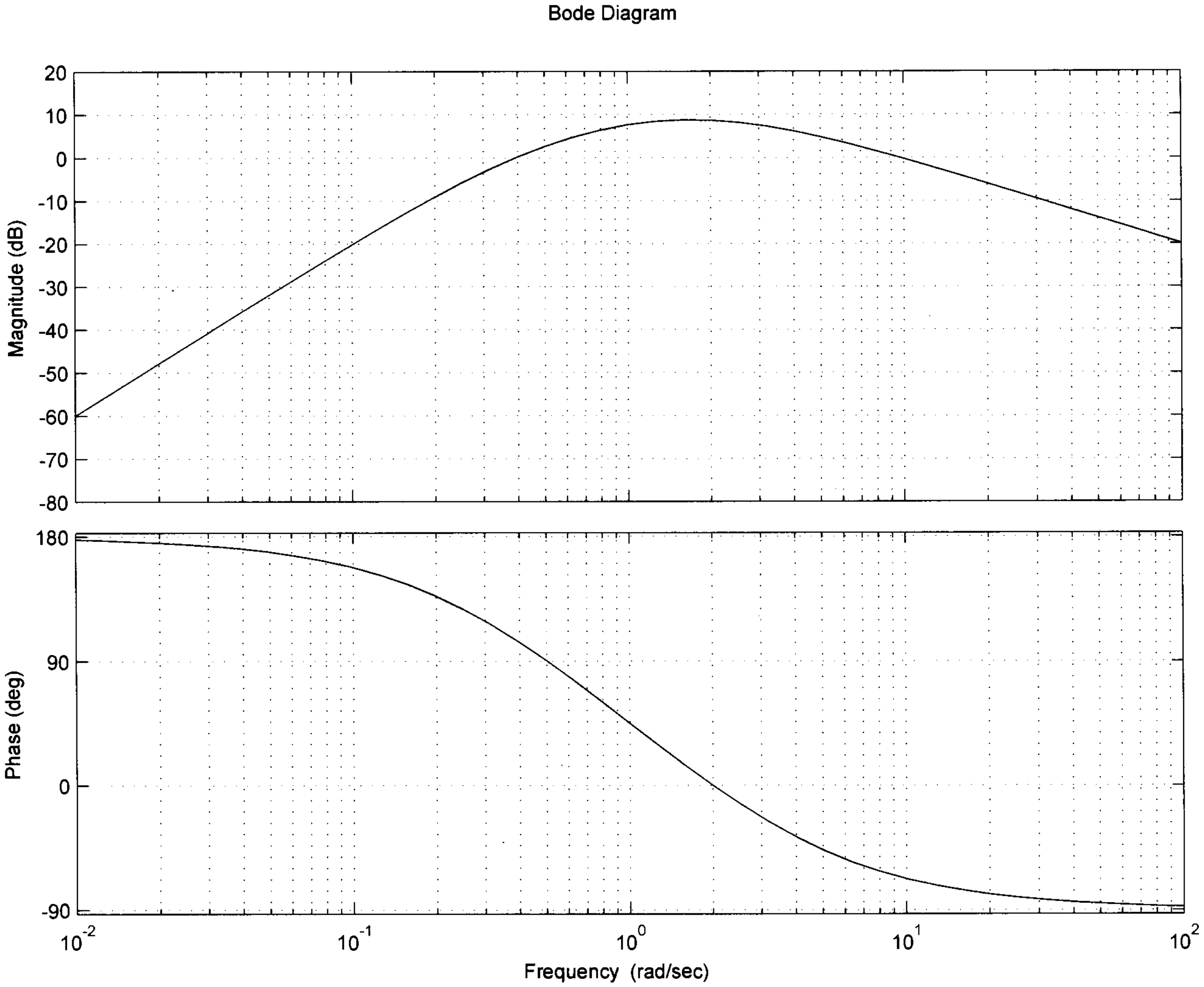
(u''') u''' SEGNALE NULLO PER $t<0$ $\Rightarrow$ TRASF. DI LAPLACE

$$y''' = \mathcal{L}^{-1}\left[W(s)\, \underset{\underset{\frac{s}{s^2+1/4}}{\uparrow}}{U'''(s)} \right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s^3}{(s+2.62)(s+0.382)(s^2+0.25)} \right] =$$

$$\left[\frac{\overset{1.13}{R_1''}}{s+2.62} + \frac{\overset{0.063}{R_2}}{s+0.382} + \frac{\overset{0.025\,e^{j2.03}}{R_3''}}{s-j0.5} + \frac{\overset{0.025\,e^{-j2.03}}{R_3^{*''}}}{s+j0.5} \right] =$$

$$= \left(1.13\, e^{-2.62t} - 0.063\, e^{-0.382t} + 0.15\cos\left(\tfrac{1}{2}t + 2.03\right) \right) \delta_{-1}(t)$$

3) DIAGRAMMI DI BODE



ESERCIZIO

①

Dato un sistema lineare stazionario a tempo discreto descritto dalla funzione di trasferimento da $u(k)$ a $y(k)$:

$$W(z) = \frac{1 - \frac{5}{2} z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}}$$

1) scrivere l'equazione alle differenze che descrive il sistema

2) studiare la stabilità ILUL del sistema

3) calcolare la risposta forzata $y(k)$ corrispondente all'ingresso $u(k) = \mathbb{1}(k)$

gradino unitario

---

1) Essendo $Y(z) = W(z)U(z)$, abbiamo:

$$Y(z) = \frac{1 - \frac{5}{2} z^{-1}}{1 - \frac{1}{2} z^{-1}} U(z)$$

Da cui:

$$\left(1 - \frac{1}{2} z^{-1}\right) Y(z) = \left(1 - \frac{5}{2} z^{-1}\right) U(z)$$

$$\Rightarrow Y(z) - \frac{1}{2} z^{-1} Y(z) = U(z) - \frac{5}{2} z^{-1} U(z)$$

(✱) Sfruttiamo la seguente proprietà delle trasformate $\mathcal{Z}$:

$$\mathcal{Z}\left[f(k-h)\right] = z^{-h} F(z)$$

Antitrasformando:(✱)

$$y(k) - \frac{1}{2} y(k-1) = u(k) - \frac{5}{2} u(k-1) \quad \Rightarrow \underline{\text{equazione alle differenze}}$$

2) La funzione di trasferimento $W(z)$ ha un unico polo $p_1 = \frac{1}{2}$

radice del denominatore

$$1 - \frac{1}{2} z^{-1} = 0 \iff \frac{1}{2z} = 1 \iff z = \frac{1}{2}.$$

Dato che $|p_1| < 1$, il sistema è <u>ILUL stabile</u>.

3) Dalla tabella delle trasformate $\mathcal{Z}$ notevoli, osserviamo che

$$\mathcal{Z}\left[\mathbb{1}(k)\right] = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

Dunque $U(z) = \dfrac{1}{1-z^{-1}}$.

Ricaviamo $Y(z)$:

$$Y(z) = W(z)U(z) = \frac{1-\frac{5}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{1-\frac{5}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)}$$

Scomponiamo $Y(z)$ in fratti semplici:

$$Y(z) = \frac{A}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1-z^{-1}}$$

dove:

$$A = \lim_{z\to\frac{1}{2}} Y(z)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right) = \lim_{z\to\frac{1}{2}} \frac{1-\frac{5}{2}z^{-1}}{1-z^{-1}} = \frac{1-5}{1-2} = 4$$

↳ $\frac{1}{2}$ è la radice del binomio $1-\frac{1}{2}z^{-1}$

$$B = \lim_{z\to 1} Y(z)\left(1-z^{-1}\right) = \lim_{z\to 1} \frac{1-\frac{5}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{1-\frac{5}{2}}{1-\frac{1}{2}} = -3$$

↳ 1 è la radice del binomio $1-z^{-1}$

Dunque:

$$Y(z) = 4 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - 3 \cdot \frac{1}{1-z^{-1}} = 4 \cdot \frac{z}{z-\frac{1}{2}} - 3 \cdot \frac{z}{z-1}$$

Antitrasformando utilizzando la tabella delle trasformate $\mathcal{Z}$ notevoli:

$$y(k) = \left[4\left(\tfrac{1}{2}\right)^k - 3\right]\mathbb{1}(k).$$

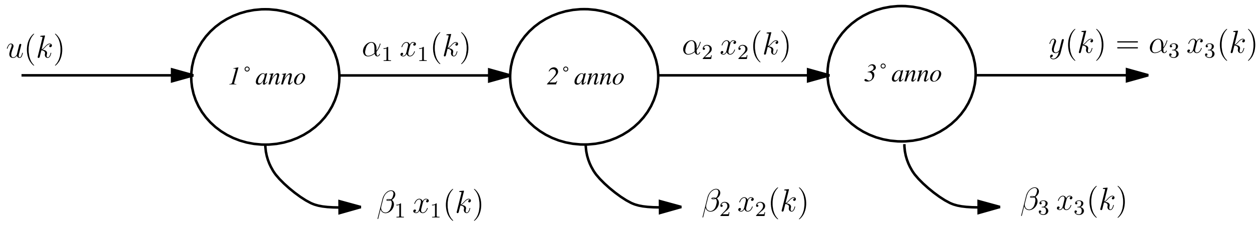
Esercizio di modellistica a tempo discreto

Si consideri un corso di laurea triennale, e si indichi con $k = 0, 1, 2, \ldots$ *l'anno accademico dall'attivazione del corso. Si indichi con* $x_i(k)$ *il numero di studenti frequentanti l'*i*-esimo anno di corso,* $i = 1, 2, 3$*, durante l'anno accademico* k*. Sia* $y(k)$ *il numero di laureati nell'anno accademico* k*, e* $u(k)$ *il numero di nuovi iscritti al primo anno di corso nell'anno accademico successivo.*

Sia α_i*,* $i = 1, 2$*, la frazione di studenti che passa dall'*i*-esimo all'*$(i+1)$*-esimo anno di corso, e* α_3 *la frazione di laureati. Infine sia* β_i*,* $i = 1, 2, 3$*, la frazione di abbandoni durante l'*i*-esimo anno di corso.*

1. *Scrivere un modello del sistema, evidenziandone gli ingressi, lo stato, e le uscite.*
2. *Posto* $\alpha_1 = \alpha_2 = \dfrac{3}{4}$*,* $\alpha_3 = \dfrac{5}{6}$*,* $\beta_1 = \dfrac{1}{8}$*,* $\beta_2 = \dfrac{1}{12}$ *e* $\beta_3 = \dfrac{1}{24}$*:*
   - *(a) Studiare la stabilità e i modi del sistema.*
   - *(b) Calcolare l'evoluzione del numero di laureati con condizioni iniziali* $x_1(0) = 0$*,* $x_2(0) = 20$*,* $x_3(0) = 10$*, e assumendo non ci siano nuovi iscritti.*
   - *(c) Quali modi sono eccitati dalle condizioni iniziali?*
   - *(d) Quali modi sono osservabili nell'uscita?*

Soluzioni. Il flusso di studenti tra i diversi anni di corso è illustrato dal seguente grafo:



dal quale si ricavano le equazioni del sistema:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= x_1(k) - \alpha_1\,x_1(k) - \beta_1\,x_1(k) + u(k) \\ &= \underbrace{(1 - \alpha_1 - \beta_1)}_{\substack{\text{frazione di studenti} \\ \text{che rimangono} \\ \text{al } 1^o \text{ anno di corso}}}\; x_1(k) + u(k) \\ x_2(k+1) &= x_2(k) - \alpha_2\,x_2(k) - \beta_2\,x_2(k) + \alpha_1\,x_1(k) \\ &= \alpha_1\,x_1(k) + \underbrace{(1 - \alpha_2 - \beta_2)}_{\substack{\text{frazione di studenti} \\ \text{che rimangono} \\ \text{al } 2^o \text{ anno di corso}}}\; x_2(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3(k+1) &= x_3(k) - \alpha_3\, x_3(k) - \beta_3\, x_3(k) + \alpha_2\, x_2(k) \\ &= \alpha_2\, x_2(k) + \underbrace{(1-\alpha_3-\beta_3)}_{\substack{\text{frazione di studenti} \\ \text{che rimangono} \\ \text{al } 3^o \text{ anno di corso}}} x_3(k) \\ y(k) &= \alpha_3\, x_3(k) \end{aligned}$$

Ricapitolando:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= (1-\alpha_1-\beta_1)\, x_1(k) + u(k) \\ x_2(k+1) &= \alpha_1\, x_1(k) + (1-\alpha_2-\beta_2)\, x_2(k) \\ x_3(k+1) &= \alpha_2\, x_2(k) + (1-\alpha_3-\beta_3)\, x_3(k) \\ y(k) &= \alpha_3\, x_3(k) \end{aligned}$$

che sono le equazioni di un sistema lineare stazionario a tempo discreto in forma di spazio di stato. L'ingresso è $u(k)$, l'uscita è $y(k)$, mentre lo stato è $\mathrm{x}(k) = [\ x_1(k) \quad x_2(k) \quad x_3(k)\ ]'$. Per scrivere il sistema nella forma matriciale

$$\begin{aligned} \mathrm{x}(k+1) &= A\,\mathrm{x}(k) + B\,u(k) \\ y(k) &= C\,\mathrm{x}(k) + D\,u(k) \end{aligned}$$

osserviamo che:

$$\begin{aligned} \mathrm{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\alpha_1-\beta_1)\, x_1(k) + u(k) \\ \alpha_1\, x_1(k) + (1-\alpha_2-\beta_2)\, x_2(k) \\ \alpha_2\, x_2(k) + (1-\alpha_3-\beta_3)\, x_3(k) \end{bmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1-\alpha_1-\beta_1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1-\alpha_2-\beta_2 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 1-\alpha_3-\beta_3 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} u(k) \\ &= A\,\mathrm{x}(k) + B\,u(k) \\ y(k) &= \alpha_3\, x_3(k) \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D} u(k) \\ &= C\,\mathrm{x}(k) + D\,u(k) \end{aligned}$$

Posto $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{3}{4}$, $\alpha_3 = \frac{5}{6}$, $\beta_1 = \frac{1}{8}$, $\beta_2 = \frac{1}{12}$ e $\beta_3 = \frac{1}{24}$, le matrici A e C del sistema diventano

$$A = \begin{bmatrix} 1-\alpha_1-\beta_1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 1-\alpha_2-\beta_2 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 1-\alpha_3-\beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

Calcolo degli autovalori di A

La matrice A è in forma triangolare inferiore. Dunque, i suoi autovalori coincidono con gli elementi sulla diagonale:

- $\lambda_1 = \frac{1}{6}$ con molteplicità algebrica $\mu_1 = 1$
- $\lambda_2 = \frac{1}{8}$ con molteplicità algebrica $\mu_2 = 2$

Stabilità

Dato che $|\lambda_1| < 1$ e $|\lambda_2| < 1$, il sistema è *asontoticamente stabile*.

Modi del sistema

- per λ_1:
  $0 < \nu_1 \leq \mu_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \nu_1 = \mu_1 = 1$

- per λ_2:
  $$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{24} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{rango}(A - \lambda_2 I) = 2 \quad \text{(perché ci sono due righe lin. indip.)}$$
  $$\nu_2 = \dim(\ker(A - \lambda_2 I)) = n - \text{rango}(A - \lambda_2 I) = 3 - 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \nu_2 = 1 < 2 = \mu_2$$

La matrice A non è dunque diagonalizzabile, ma solo jordanizzabile. Dalla teoria si conosce l'esistenza di una matrice T non singolare (che non è ancora necessario calcolare) tale che

$$\tilde{A} = T^{-1} A T = \left[\begin{array}{c|cc} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{array}\right]$$

e quindi

$$\tilde{A}^k = \left[\begin{array}{c|cc} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda_2^k & k\lambda_2^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda_2^k \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{6}\right)^k & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{8}\right)^k & k\left(\frac{1}{8}\right)^{k-1} \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{8}\right)^k \end{bmatrix}$$

I modi del sistema sono $\left(\dfrac{1}{6}\right)^k$, $\left(\dfrac{1}{8}\right)^k$ e $k\left(\dfrac{1}{8}\right)^{k-1}$.

Calcolo della risposta

Non essendoci nuovi iscritti, risulta $u(k) = 0 \; \forall k$, e quindi la dinamica del sistema si riduce a quella di un sistema autonomo (cioè senza ingressi):

$$\begin{aligned} \mathrm{x}(k+1) &= A\,\mathrm{x}(k) \\ y(k) &= C\,\mathrm{x}(k) \end{aligned}$$

L'evoluzione del numero di laureati coincide dunque con la *risposta libera* in $y(k)$ del sistema, data dall'espressione $y(k) = C\,A^k\,\mathrm{x}_0$. La condizione iniziale x_0 si ricava dai dati dell'esercizio, essendo

$$\mathrm{x}_0 = \mathrm{x}(0) = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Ricordando che $A^k = T\,\tilde{A}^k\,T^{-1}$, abbiamo:

$$y(k) = (C\,T)\,\tilde{A}^k\,(\underbrace{T^{-1}\mathrm{x}_0}_{\mathrm{z}_0}) = (C\,T)\,\tilde{A}^k\,\mathrm{z}_0$$

Occorre calcolare la matrice non singolare T.

- Autovettore v_1 relativo a λ_1

  Dobbiamo determinare una soluzione non nulla v del sistema omogeneo $(A - \lambda_1\,I)\mathrm{v} = 0$. Essendo

  $$A - \lambda_1\,I = \begin{bmatrix} -\frac{1}{24} & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{24} \end{bmatrix}$$

  si ha

  $$\left.\begin{aligned} -\tfrac{1}{24}\,v_1 = 0 \\ \tfrac{3}{4}\,v_1 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad v_1 = 0$$

  $$\left.\frac{3}{4}\,v_2 - \frac{1}{24}\,v_3 = 0 \;\right\} \qquad v_2 = \frac{1}{18}\,v_3$$

  Posto arbitrariamente $v_3 = 1$, risulta $v_2 = \frac{1}{18}$. Quindi,

  $$\mathrm{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{18} \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Autovettore v_2 relativo a λ_2

  Dobbiamo determinare una soluzione non nulla v del sistema omogeneo $(A-\lambda_2\,I)\mathrm{v}=0$. Essendo

$$A-\lambda_2\,I=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{24} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

  si ha

$$\begin{array}{rlr} 0=0 & \} & \text{sempre verificata} \\ \dfrac{3}{4}\,v_1+\dfrac{1}{24}\,v_2=0 & \Big\} & v_1=-\dfrac{1}{18}\,v_2=0 \\ \dfrac{3}{4}\,v_2=0 & \Big\} & v_2=0 \end{array}$$

  Posto arbitrariamente $v_3=1$ (il sistema è in tre incognite, anche se v_3 non compare nelle equazioni), abbiamo

$$\mathrm{v}_2=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Autovettore generalizzato v_3 relativo a λ_2

  Dobbiamo determinare una soluzione v del sistema non omogeneo $(A-\lambda_2\,I)\mathrm{v}=\mathrm{v}_2$. Si ha

$$\begin{array}{rlr} 0=0 & \} & \text{sempre verificata} \\ \dfrac{3}{4}\,v_1+\dfrac{1}{24}\,v_2=0 & \Big\} & v_1=-\dfrac{1}{18}\,v_2=-\dfrac{2}{27} \\ \dfrac{3}{4}\,v_2=1 & \Big\} & v_2=\dfrac{4}{3} \end{array}$$

  Posto arbitrariamente $v_3=0$ (il sistema è in tre incognite, anche se v_3 non compare nelle equazioni), abbiamo

$$\mathrm{v}_3=\begin{bmatrix} -\frac{2}{27} \\ \frac{4}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matrice T si costruisce nel seguente modo:

$$T=\left[\begin{array}{c|cc} \mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \mathrm{v}_3 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{2}{27} \\ \frac{1}{18} & 0 & \frac{4}{3} \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Per evitare di invertire T, il vettore $\mathrm{z}_0 = T^{-1}\mathrm{x}_0$ si ricava risolvendo il sistema lineare $T\,\mathrm{z}_0 = \mathrm{x}_0$. Si ha

$$\begin{array}{rl} -\dfrac{2}{27}\,z_3 = 0 & \Big\} \qquad z_3 = 0 \\ \dfrac{1}{18}\,z_1 + \dfrac{4}{3}\,z_3 = 20 & \Big\} \qquad z_1 = 360 \\ z_1 + z_2 = 10 & \} \qquad z_2 = 10 - z_1 = -350 \end{array}$$

Quindi,

$$\mathrm{z}_0 = \begin{bmatrix} 360 \\ -350 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ritornando al calcolo di $y(k)$:

$$\begin{aligned} y(k) &= (C\,T)\,\tilde{A}^k\,\mathrm{z}_0 \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{5}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{6}\right)^k & 0 & * \\ 0 & \left(\frac{1}{8}\right)^k & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 360 \\ -350 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 360\,\left(\frac{1}{6}\right)^k \\ -350\,\left(\frac{1}{8}\right)^k \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= 300\left(\frac{1}{6}\right)^k - \frac{875}{3}\left(\frac{1}{8}\right)^k \end{aligned}$$

Sono stati indicati con $*$ alcuni elementi non necessari per il calcolo, viste le strutture di C e z_0.

Modi eccitati da x_0

Dall'espressione dell'evoluzione libera dello stato si ottiene

$$\begin{aligned} \mathrm{x}(k) &= A^k\,\mathrm{x}_0 = T\,\tilde{A}^k\,T^{-1}\,\mathrm{x}_0 = T\,\tilde{A}^k\,\mathrm{z}_0 \\ &= \begin{bmatrix} \mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 & \mathrm{v}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & k\lambda_2^{k-1} \\ 0 & 0 & \lambda_2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \\ &= z_1\,\lambda_1^k\,\mathrm{v}_1 + (z_2\,\lambda_2^k + z_3\,k\lambda_2^{k-1})\,\mathrm{v}_2 + z_3\,\lambda_2^k\,\mathrm{v}_3 \end{aligned}$$

Nel caso della x_0 considerata, risulta $z_1 = 360 \neq 0$, $z_2 = -350 \neq 0$ e $z_3 = 0$. Dunque

$$\mathrm{x}(k) = z_1\,\lambda_1^k\,\mathrm{v}_1 + z_2\,\lambda_2^k\,\mathrm{v}_2 = 360\left(\frac{1}{6}\right)^k - 350\left(\frac{1}{8}\right)^k$$

I modi $\left(\frac{1}{6}\right)^k$ e $\left(\frac{1}{8}\right)^k$ sono eccitati da x_0. Il modo $k\left(\frac{1}{8}\right)^{k-1}$ non è eccitato da x_0.

Modi osservabili nell'uscita

Dall'espressione dell'uscita si ottiene

$$\begin{aligned} y(k) &= C\,\mathrm{x}(k) \\ &= C\,[z_1\,\lambda_1^k\,\mathrm{v}_1 + (z_2\,\lambda_2^k + z_3\,k\lambda_2^{k-1})\,\mathrm{v}_2 + z_3\,\lambda_2^k\,\mathrm{v}_3] \\ &= z_1\,\lambda_1^k\,C\,\mathrm{v}_1 + (z_2\,\lambda_2^k + z_3\,k\lambda_2^{k-1})\,C\,\mathrm{v}_2 + z_3\,\lambda_2^k\,C\,\mathrm{v}_3 \end{aligned}$$

Nel caso del sistema considerato risulta $C\,\mathrm{v}_1 = \frac{5}{6} \neq 0$, $C\,\mathrm{v}_2 = \frac{5}{6} \neq 0$ e $C\,\mathrm{v}_3 = 0$. Dunque

$$\begin{aligned} y(k) &= z_1\,\lambda_1^k\,C\,\mathrm{v}_1 + (z_2\,\lambda_2^k + z_3\,k\lambda_2^{k-1})\,C\,\mathrm{v}_2 \\ &= \frac{5}{6}\left[z_1\left(\frac{1}{6}\right)^k + z_2\left(\frac{1}{8}\right)^k + z_3\,k\left(\frac{1}{8}\right)^{k-1}\right] \end{aligned}$$

e tutti i modi del sistema sono osservabili nell'uscita al variare dei coefficienti z_1, z_2 e z_3.

Nota. Nel caso della condizione iniziale x_0 considerata, risulta $z_3 = 0$, ed il modo $k\left(\frac{1}{8}\right)^{k-1}$ non compare nell'espressione dell'uscita. Tuttavia, il modo compare nell'espressione dell'uscita se si sceglie una differente condizione iniziale x_0 per la quale risulti $z_3 \neq 0$, ed è quindi osservabile.

- PASSAGGIO $p(z) \rightarrow p'(s)$ ONEROSO MEDIANTE CAMBIO DI VARIABILE

- MATRICE DI TRASFORMAZIONE :

$$p(z) = a_0 z^v + a_1 z^{v-1} + \dots + a_v \xrightarrow{T_z^s} p'(s) = \alpha_v s^v + \alpha_{v-1} z^{v-1} + \dots + \alpha_0$$

$$T_z^s = \begin{pmatrix} \binom{v}{0} & \cdots & 1 & 1 & \cdots & \binom{v}{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \iddots & \\ \binom{v}{i} & \cdots & x_1 & x_2 & \cdots & (-1)^i \binom{v}{i} \\ \binom{v}{i-1} & \cdots & x_3 & x_4 & \cdots & (-1)^{i-1} \binom{v}{i+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ \binom{v}{v} & \cdots & & & \cdots & \binom{v}{v} \end{pmatrix}$$

— RIEMPITA MEDIANTE PROCEDURA RICORSIVA

$$x_4 = x_3 - (x_1 + x_2)$$

A PARTIRE DAGLI ELEMENTI DELLA PRIMA RIGA E COLONNA

— GLI ELEMENTI DELLA PRIMA RIGA SONO TUTTI 1, MENTRE LA PRIMA COLONNA

$$\binom{v}{i} = \frac{v!}{i!(v-i)!}$$

COINCIDONO CON LA v-MA RIGA DEL TRIANGOLO DI TARTAGLIA

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_v \end{pmatrix} = T_z^s \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_v \end{pmatrix}$$

- ESEMPIO $v = 4$

— TRIANGOLO DI TARTAGLIA DI ORDINE 4

$$\begin{matrix} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{matrix} \Longrightarrow T_z^s = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & x_{22} & & & \\ 6 & x_{32} & & \dots & \\ 4 & x_{42} & & & \\ 1 & x_{52} & & & \end{pmatrix}$$

$$x_{22} = 4 - (1+1) = 2$$
$$x_{32} = 6 - (4+2) = 0$$
$$x_{42} = 4 - (6+0) = -2$$
$$x_{52} = 1 - (4-2) = -1$$

$$\Longrightarrow T_z^s = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & x_{23} & & \\ 6 & 0 & x_{33} & \dots & \\ 4 & -2 & x_{43} & & \\ 1 & -1 & x_{53} & & \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 6 & 0 & -2 & 0 & 6 \\ 4 & -2 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

DISCRETIZZAZIONE (SISTEMI A DATI CAMPIONATI)

ES. #1 $g_y(t) = e^{-t} + e^{-5t}$: VIENE ASSEGNATA LA RISPOSTA ALL'IMPULSO

SAPPIAMO CHE LA F.d.T CORRISPONDENTE SARA' $G(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+5}$

- METODO 1 : IMPONIAMO CHE LA MATRICE A SIA DIAGONALE ($\exists \infty$ i-s-u !)

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ DA CUI IMPONIAMO CHE $G(s) = c^T (sI - A)^{-1} b + \overset{\overset{\emptyset}{\shortparallel}}{d}$ " d=0 PERCHE' S. E' STRETT. PROP. "

$$G(s) = (c_1 \quad c_2) \frac{\begin{pmatrix} s+5 & 0 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}}{(s+1)(s+5)} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{c_1 b_1}{s+1} + \frac{c_2 b_2}{s+5} \Rightarrow c_1 b_1 = c_2 b_2 = 1$$

SCEGLIENDO $c_1 = c_2 = b_1 = b_2 = 1 \Rightarrow S: \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} u \\ y = (1 \quad 1) x \end{cases}$

SISTEMA A DATI CAMPIONATI : $S_d: \begin{cases} x(k+1) = A_d\, x(k) + b_d\, u(k) \\ y(k) = c\, x(k) \end{cases}$

$T \ll \overset{\overset{1}{\shortparallel}}{\tau_1}, \overset{\overset{0.2}{\shortparallel}}{\tau_2}$

ES. $\underline{\underline{T = 0.02\ s}}$

$$A_d = e^{AT} = \begin{pmatrix} e^{-0.02} & 0 \\ 0 & e^{-0.1} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0.98 & 0 \\ 0 & 0.90 \end{pmatrix}$$

$$b_d = A^{-1}(e^{AT} - I) b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.02 & 0 \\ 0 & -0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} -1.98 \\ -1.90 \end{pmatrix} \frac{1}{100}$$

- METODO 2 : DIAGONALIZZO LA MATRICE A OTTENUTA CON LE FORME CANONICHE

CALCOLO GLI AUTOVETTORI : $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -5 \longleftarrow G(s) = \frac{2s+6}{s^2+6s+5}$

F.C. RAGG. : $\begin{cases} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ c^T = (6 \quad 2) \quad d = \emptyset \end{cases}$

$\exists \infty$ SOLUZIONI !

$v_1 : (\lambda_1 I - A) v_1 = \underline{0} \Rightarrow \left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} v_{11} + v_{12} = 0 \\ 5(v_{11} + v_{12}) = \emptyset \end{cases}$ $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$v_2 : (\lambda_2 I - A) v_2 = \underline{0} \Rightarrow \left(\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 5 v_{21} + v_{22} = 0 \\ 5 v_{21} + v_{22} = 0 \end{cases}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

DA CUI $T_D^{-1} = [v_1 \ v_2] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}$, $T_D = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{4}$

$A = T_D^{-1} A_D T_D$ DA CUI $A_D = T_D A T_D^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow A_d = T_D^{-1} e^{A_D T} T_D \overset{\sim}{=} \begin{pmatrix} 0.999 & 0.0185 \\ -0.0942 & 0.886 \end{pmatrix}$

● METODO 3: SOLUZIONE DI $\Phi(t) = e^{At}$ MEDIANTE LAPLACE

$$\Phi(t) = e^{At} \xrightarrow{\mathcal{L}} \Phi(s) = (sI-A)^{-1} = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 5 & s+6 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} s+6 & 1 \\ -5 & s \end{pmatrix}}{\underset{(s+5)(s+1)}{s^2+6s+5}} =$$

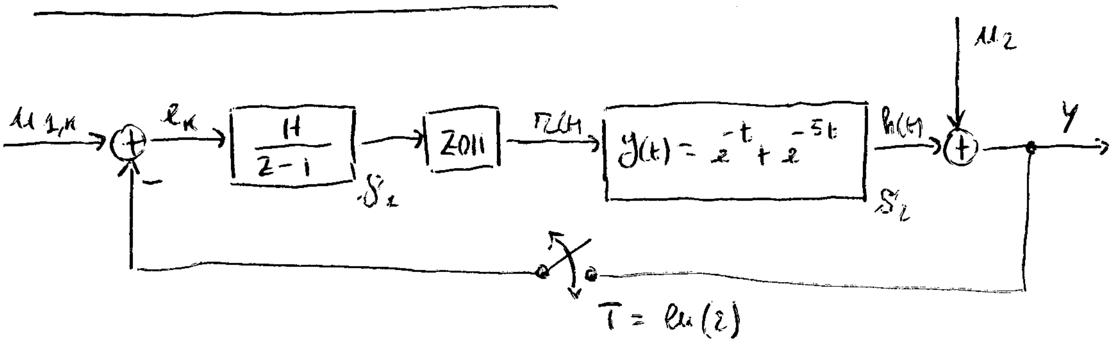
$$= \begin{pmatrix} \frac{s+6}{(s+5)(s+1)} & \frac{1}{(s+5)(s+1)} \\ \frac{-5}{(s+5)(s+1)} & \frac{s}{(s+5)(s+1)} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \frac{-1}{(s+5)} + \frac{5}{(s+1)} & \frac{-1}{(s+5)} + \frac{1}{(s+1)} \\ \frac{5}{(s+5)} + \frac{-1}{(s+1)} & \frac{5}{(s+5)} + \frac{-1}{(s+1)} \end{pmatrix}$$

DA CUI

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \Phi(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -e^{-5t} + 5e^{-t} & -e^{-5t} + e^{-t} \\ 5e^{-5t} - e^{-t} & 5e^{-5t} - e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$A_d = e^{AT} = \Phi(T) = \begin{pmatrix} 0.999 & 0.0188 \\ -0.0942 & 0.886 \end{pmatrix}$$

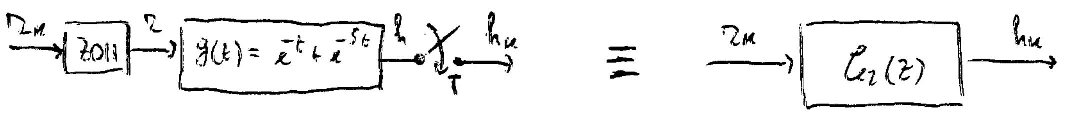
SISTEMI A DATI CAMPIONATI



1) ISU
2) H PER ASINTOTICA STABILITA'
3) RISPOSTA $u_1 = u_2 = 5$
4) RISPOSTA FREQUENZIALE PER $f = 2$ Hz

NOTA: $T = \ln(2)$
NON È CONFORME
AL VINCOLO SUL T_{max}

1)



⇙ 3 METODI (VEDI FASCICOLO ALLEGATO)

$$G_2(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+5} = C\,(sI-A)^{-1}B \qquad \text{SCEGLIAMO } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$G_2(s) = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix} \frac{\begin{pmatrix} s+5 & 0 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix}}{(s+1)(s+2)} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{\overset{1}{\overset{\shortparallel}{c_1 b_1}}}{s+1} + \frac{\overset{1}{\overset{\shortparallel}{c_2 b_2}}}{s+2}$$

SCEGLIAMO $c_1 = b_1 = c_2 = b_2 = 1$;

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} r \\ h = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(k+1) = A_D\, x(k) + B_d\, r(k) \\ h(k) = C_D\, x(k) \end{cases} \qquad \begin{cases} A_D = e^{AT} \\ B_D = A^{-1}(e^{AT} - I)B \\ C_D = C \end{cases}$$

$$A_D = e^{AT} = \begin{pmatrix} e^{-T} & 0 \\ 0 & e^{-5T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/32 \end{pmatrix} \quad ; \quad B_d = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/2 & 0 \\ 0 & -31/32 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 31/80 \end{pmatrix}$$

DA CUI
$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/32 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 31/160 \end{pmatrix} r(k) \\ h(k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x(k) \end{cases}$$

LA fdt : $G_2(z) = C_d\,(zI - A_D)^{-1} B_d = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z - 1/2 & 0 \\ 0 & z - 1/32 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 31/160 \end{pmatrix} = \dfrac{111\, z - 18}{160\,(z - 1/2)(z - 1/32)}$

LA fdt COMPLESSIVA : $G(z) = \begin{pmatrix} G_{11}(z) & G_{12}(z) \end{pmatrix}$

$$G_{11}(z) = \frac{G_1(z)\, G_2(z)}{1 + G_1(z)\, G_2(z)} = \ldots = \frac{0{,}59H\, z - 0.11}{\underbrace{z^3 - 1.53\, z^2 + (0.55 + 0.59H)\, z + (-0.015 - 0.11H)}_{P(z)}}$$

$$G_{12}(z) = \frac{1}{1 + G_1(z)\,G_2(z)} = \dots = \frac{z^3 - 1.53z^2 + 0.55z - 0.16}{P(z)}$$

LA ISU COMPLESSIVA DALLA FORMA CANONICA DI OSSERVAZIONE:

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.16 + 0.4H \\ 1 & 0 & -0.55 - 0.69H \\ 0 & 1 & 1.53 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} -0.4 & 0.4H \\ 0.69 & -0.69H \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} u(k)$$

2)

$$P(z) = z^3 - 1.53z^2 + (0.55 + 0.69H)z - (0.016 + 0.4H)$$

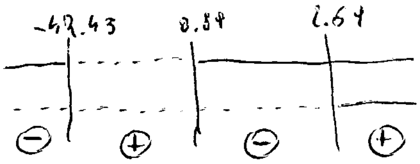
$$\varphi(s) = \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1.53 \\ 0.55 + 0.69H \\ 0.016 + 0.4H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.004 + 0.58H \\ 0.968 - 0.36H \\ 3.932 - 1.02H \\ 3.096 + 0.8H \end{pmatrix}$$

APPLICO ROUTH:

$$\begin{array}{c|ll} 3 & -0.004 + 0.58H & 3.932 - 1.02H \\ 2 & 0.968 - 0.36H & 3.096 + 0.8H \\ \hline 1 & \dfrac{0.093H^2 + 4.19H - 3.806}{0.36H - 0.968} & \\ 0 & 3.096 + 0.8H & \end{array}$$

$$\begin{cases} 0.58H > 0.004 \Rightarrow H \overset{\sim}{>} 0 \\ 0.968 - 0.36H > 0 \Rightarrow H < 2.69 \\ \dfrac{0.09H^2 + 4.19H - 3.81}{0.36H - 0.92} > 0 \Rightarrow \begin{cases} 0.09H^2 + 4.19H - 3.81 \geq 0 & \Rightarrow H < -42.45,\ H > 0.89 \\ 0.36H - 0.92 > 0 & \Rightarrow H > 2.69 \end{cases} \\ 3.096 + 0.8H > 0 \Rightarrow H > -3.82 \end{cases}$$



$$\begin{cases} H > 0 \\ H < 2.69 \\ H > 2.69 \ \cup \ -42.45 < H < 0.89 \\ H > -3.82 \end{cases} \Rightarrow \underline{0 < H < 0.89}$$

3) RISPOSTA $u_1 = u_2 = 5$ $\Rightarrow$ GUADAGNO STATICO XCHÈ S. ASINT. STABILE

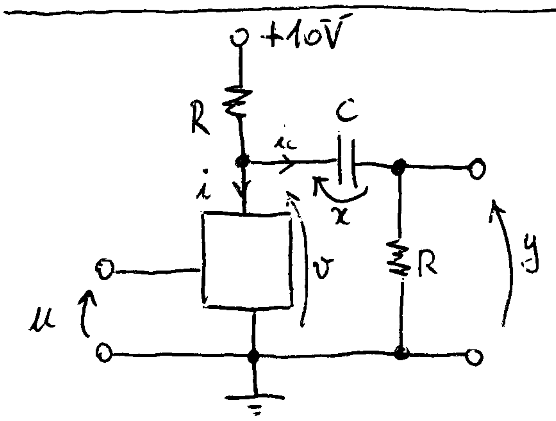
$$y(k) = G(z)\Big|_{z=1} \bar{u} = \begin{pmatrix} G_{11}(1) & G_{12}(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = \dots$$

4) $f = 2 \Rightarrow \omega = 2\pi f = 4\pi \Rightarrow u_1 = u_2 = \sin(\underbrace{4\pi \overset{u(2)}{\overset{\shortparallel}{T}}}_{8.71 = \bar{\omega}} \cdot k)$ RISPOSTA ARMONICA

$$y(k) = \left|G_{11}(z)\right|_{z=e^{j\bar{\omega}}} \overset{1}{\overset{\shortparallel}{U_0}} \sin\left(4\pi T k + \angle G_{11}(z)\big|_{z=e^{j\bar{\omega}}}\right) + \left|G_{12}(e^{j\bar{\omega}})\right| U_0 \sin\left(4\pi T k + \angle G_{12}(e^{j\bar{\omega}})\right)$$

LINEARIZZAZIONE FORMA IMPLICITA

①



$$i = \left(u + \frac{v}{10}\right)^2$$

$$R = C = 1$$

1) i-s-u
2) MODELLO LINEARIZZATO PER $u=1$
3) RISPOSTA AL SEGNALE
$u(t) = 1 + 10^{-3}\left(\delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t-\pi)\right)\sin 10t$
4) FREQUENZE DI TAGLIO

1) $v = x + RC\dot{x}$

$$10 = v + R(i + i_c) = x + RC\dot{x} + R\left(u + \frac{v}{10}\right)^2 + RC\dot{x} =$$

$$= x + 2RC\dot{x} + R\left(u + \frac{x + RC\dot{x}}{10}\right)^2$$

POSTO $R = C = 1$ SI HA:

$$10 = x + 2\dot{x} + \frac{1}{100}\left(10u + x + \dot{x}\right)^2 = x + 2\dot{x} + u^2 + \frac{1}{5}ux + \frac{1}{5}u\dot{x} + \frac{1}{50}x\dot{x} + \frac{x^2}{100} + \frac{\dot{x}^2}{100}$$

$$y = \dot{x}$$

DA CUI

$$\begin{cases} 100x + 200\dot{x} + 100u^2 + 20ux + 20u\dot{x} + 2x\dot{x} + x^2 + \dot{x}^2 = 1000 \\ y = \dot{x} \end{cases}$$

↳ $F(x, \dot{x}, u) = 0$ FORMA IMPLICITA!

2) $u = \bar{u} = 1 \Rightarrow 10 = \bar{x} + \left(1 + \frac{\bar{x}}{10}\right)^2 \Rightarrow 1000 = 100\bar{x} + (10 + \bar{x})^2$

$$\bar{x}^2 + 120\bar{x} - 900 = 0 \Rightarrow \bar{x} = -60 \pm 30\sqrt{5} < \begin{matrix} -30(2+\sqrt{5}) \\ -30(2-\sqrt{5}) \end{matrix}$$

CONSIDERIAMO $\bar{x}$ POSITIVA : $\bar{x} = -30(2-\sqrt{5}) = 7.082$, $\bar{y} = 0$

MODELLO LINEARIZZATO

$$\begin{cases} \delta\dot{x} = A\delta x + B\delta u \\ \delta y = C\delta x + D\delta u \end{cases}$$

(*)

$$A = C = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = -\left.\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}}\right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = -\left.\frac{2x + 2\dot{x} + 20u + 100}{2\dot{x} + 2x + 20u + 200}\right|_{\substack{\bar{x}=7 \\ \bar{u}=1}} = -0.57$$

$$B = D = \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = -\left.\frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}}\right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}} = -\left.\frac{200u + 20x + 20\dot{x}}{2\dot{x} + 20x + 20u + 200}\right|_{\substack{x=7 \\ u=1}} = -1.45$$

QUINDI

$$\begin{cases} \delta\dot{x} = -0.52\,\delta x - 1.45\,\delta u \\ \delta y = -0.52\,\delta x - 1.45\,\delta u \end{cases} \quad \text{CON} \quad \begin{cases} x = \bar{x} + \delta x = 2 + \delta x \\ u = \bar{u} + \delta u = 1 + \delta u \\ y = \underset{\underset{0}{\shortparallel}}{\bar{y}} + \delta y = \delta y \end{cases}$$

3) $$u(t) = \bar{u} + \delta u(t) = \overset{\overset{\bar{u}}{\shortparallel}}{1} + \underbrace{10^{-3}\left(\delta_{-1}(t) - \delta_{-1}(t-4\pi)\right)\sin(10t)}_{\delta u(t)} \longrightarrow y(t) = \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{\bar{y}} + \delta y(t)$$

$$\delta Y(s) = G(s)\,\delta U(s) = \underbrace{\left(C\,(sI-A)^{-1}B + D\right)}_{G(s)} \cdot \mathcal{L}\left[10^{-3}\sin(10t)\delta_{-1}(t) - 10^{-3}\sin\left(10(t-4\pi)\right)\delta_{-1}(t-4\pi)\right]$$

$$- \quad G(s) = -0.52\,\frac{1}{s+0.52}(-1.45) + (-1.45) = \frac{0.822 - 1.45\,(s+0.52)}{s+0.52} = \frac{-1.45\,s}{s+0.52}$$

$$- \quad \delta U(s) = 10^{-3}\,\frac{10}{s^2+100} - 10^{-3}\,\frac{10}{s^2+100}\,e^{-4\pi s} = 10^{-3}\left(1 - e^{-4\pi s}\right)\frac{10}{s^2+100}$$

DA CUI

$$\delta Y(s) = G(s)\,\delta U(s) = -1.45\,\frac{s}{s+0.52} \cdot 10^{-3}\left(1 - e^{-4\pi s}\right)\frac{10}{s^2+100} =$$

$$= -1.45 \cdot 10^{-4}\left(1 - e^{-4\pi s}\right)\left(\frac{0.284-5j}{s-j10} + \frac{0.284+5j}{s+j10} + \frac{-0.52}{s+0.52}\right)$$

$$\begin{cases} |0.284 \pm j5| = 5 \\ \underline{/0.284 \pm j5} = \pm 1.51 \end{cases}$$

INFINE

$$y(t) = \delta y(t) = -1.45 \cdot 10^{-4}\left[\left(-0.52\,e^{-0.52t} + 2.5 \cdot \cos(10t \overset{+1.51}{\,})\right)\delta_{-1}(t) + \left(-0.52\,e^{-0.52(t-4\pi)} + 2.5\cos\left(10(t-4\pi)\overset{+1.51}{\,}\right)\right)\delta_{-1}(t-4\pi)\right]$$

4) POLI A PARTE REALE NEGATIVA $\Rightarrow$ FUNZ. DI RISP. ARMONICA $G(j\omega) = -1.45\,\dfrac{j\omega}{j\omega + 0.52}$

IL SISTEMA È PASSA ALTO : $f_s = \dfrac{1}{2\pi\tau} = \dfrac{0.52}{2\pi} \hat{=} 0.09$ Hz

---

(✱) $F(\dot{\bar{x}}, \bar{x}, \bar{u}) = 0$ $\quad \begin{cases} x = \bar{x} + \delta x \\ \dot{x} = \dot{\bar{x}} + \delta\dot{x} \\ u = \bar{u} + \delta u \end{cases} \quad \begin{matrix} \bar{x} = \text{cost} \\ \Downarrow \\ \dot{\bar{x}} = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow F(\dot{\bar{x}} + \delta\dot{x},\ \bar{x} + \delta x,\ \bar{u} + \delta u) = 0$

SVILUPPO SERIE DI TYLOR : $\underset{\underset{0}{\Downarrow}}{F(\dot{\bar{x}}, \bar{x}, \bar{u})} + \dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}(\dot{\bar{x}}, \bar{x}, \bar{u})\,\delta\dot{x} + \dfrac{\partial F}{\partial x}(\dot{\bar{x}}, \bar{x}, \bar{u})\,\delta x + \dfrac{\partial F}{\partial u}(\dot{\bar{x}}, \bar{x}, \bar{u})\,\delta u \simeq 0$

DA CUI $$\delta\dot{x} = \frac{-1}{\left.\dfrac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}}}\left(\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}}\delta x + \left.\frac{\partial F}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x} \\ u=\bar{u}}}\delta u\right) = A\,\delta x + B\,\delta u$$

SIA DATO IL SISTEMA LINEARIZZAZIONE I-U T.D. (1/1)

$$y(k+1) = -\frac{5}{9} y(k-1) + \sin\left(y(k-1)\right) + u(k)$$

1) VERIFICARE STABILITA' ASINTOTICA LOCALE

2) RISPOSTA AL SEGNALE $u(k) = 10^{-2} \delta_{-1}(k-5)$

---

1) PER PICCOLI SEGNALI $\sin(x) \simeq x$ DA CUI

$$y(k+1) = -\frac{5}{9} y(k-1) + y(k-1) + u(k) = \frac{4}{9} y(k-1) + u(k)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{Z}} \quad z\,Y(z) = \frac{4}{9}\frac{1}{z} Y(z) + U(z) \iff \left(z^2 - \frac{4}{9}\right) Y(z) = z\,U(z)$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{z}{z^2 - 4/9} = \frac{z}{(z-2/3)(z+2/3)}$$

AUTOVALORI MODULO < 1 $\Rightarrow$ SISTEMA LINEARIZZATO E' A.S. $\Rightarrow$ S. NON LINEARE A.S. LOC.

2) IPOTIZZANDO $|y(k)| \ll 1$, $u(k) = 10^{-2} \delta_{-1}(k-5)$

$$Y(z) = G(z)U(z) = \frac{z}{z^2 - 4/9}\, z^{-5} \,\frac{10^{-2} z}{z-1} = z^{-5} z \,\frac{z \cdot 10^{-2}}{(z^2 - 4/9)(z-1)} =$$

$$= 10^{-2} z^{-5} z \left(\frac{-9/4}{z - 2/3} + \frac{9/20}{z+2/3} + \frac{9/5}{z-1} \right) \xrightarrow{\mathcal{Z}^{-1}} y(k) = 10^{-2} \frac{9}{20}\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^{k-5} - 5\left(\frac{2}{3}\right)^{k-5} + 4\right)\delta_{-1}(k-5)$$

$\underline{\underline{k \geq 5}}$

ESERCIZIO

Scrivere una rappresentazione in forma di spazio di stato per il sistema descritto dall'equazione differenziale nonlineare

$$M\ell^2\ddot{\theta}(t) + \beta\dot{\theta}(t) + M\ell g\sin(\theta(t)) = 0$$

dove M, ℓ, β e g sono parametri positivi.

senza ingressi

Il sistema è autonomo, e cerchiamo una rappresentazione nella forma

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t)) & \text{equazione (dinamica) dello stato} \\ \theta(t) = g(x(t)) & \text{equazione (statica) dell'uscita} \end{cases}$$

è la nostra "y" in questo caso...

Definiamo lo stato

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \underbrace{\overset{\Delta}{=}}_{\text{uguale per definizione}} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}$$

Da cui:

$$\dot{x}_1(t) = \dot{\theta}(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{\theta}(t) = -\frac{1}{M\ell^2}\left[M\ell g\sin(\theta(t)) + \beta\dot{\theta}(t)\right] =$$

$$= -\frac{1}{M\ell^2}\left[M\ell g\sin(x_1(t)) + \beta x_2(t)\right]$$

Dunque

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad \text{con} \quad f(x) = f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -\frac{g}{\ell}\sin(x_1) - \frac{\beta}{M\ell^2}x_2 \end{bmatrix}$$

Inoltre:

$$\theta(t) = x_1(t) = g(x(t)) \quad \text{con} \quad g(x) = g(x_1, x_2) = x_1$$

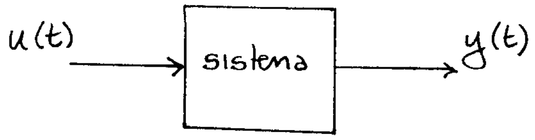
Si noti che $g(x)$ e' una funzione lineare (mentre $f(x)$ non lo e'), e puo' quindi essere scritta nella forma

$$g(x) = Cx \quad \text{con} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Infatti $Cx = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1$.

ESERCIZIO

Dato il sistema



descritto dall'equazione differenziale

$$\dddot{y}(t)+4\ddot{y}(t)+\dot{y}(t)-6y(t)=2u(t)$$

1) scrivere una rappresentazione del sistema in forma di spazio di stato;

2) calcolare la risposta libera nell'uscita con condizioni iniziali
$y(0)=0,\ \dot{y}(0)=3,\ \ddot{y}(0)=-3.$

1) Definiamo lo stato

$$x(t)=\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{bmatrix}$$

Abbiamo:

$$\dot{x}_1(t)=\dot{y}(t)=x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t)=\ddot{y}(t)=x_3(t)$$

dalla definizione di $x(t)$

$$\dot{x}_3(t)=\dddot{y}(t)=6y(t)-\dot{y}(t)-4\ddot{y}(t)+2u(t)$$

$$=6x_1(t)-x_2(t)-4x_3(t)+2u(t)$$

dall'equazione differenziale del sistema

Dunque:

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -4 \end{bmatrix}}_{A} x(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

<u>equazione dello stato</u>

Per quanto riguarda l'uscita:

$$y(t) = x_1(t)$$ —— dalla definizione di $x(t)$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C} x(t) + \underbrace{0}_{D} \cdot u(t)$$

<u>equazione dell'uscita</u>

2) Dobbiamo calcolare:

$$y_\ell(t) = Ce^{At}x_0$$

<u>risposta libera nell'uscita</u>

Innanzi tutto, ricaviamo x_0 dai dati del problema:

$$x_0 = x(0) = \begin{bmatrix} y(0) \\ \dot{y}(0) \\ \ddot{y}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

dalla definizione di $x(t)$

Procediamo ora al calcolo di e^{At}, partendo dagli autovalori di A:

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -6 & 1 & \lambda+4 \end{bmatrix}$$

$p_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) =$ —— sviluppiamo il calcolo del determinante rispetto alla prima colonna

$$= \lambda \det\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda+4 \end{pmatrix} - 6 \det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \lambda & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda\left[\lambda(\lambda+4)+1\right] - 6 \cdot 1 =$$

$$= \lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda - 6$$

Per il calcolo delle radici di $p_A(\lambda)$, proviamo ad applicare il metodo di Ruffini, cercando le radici tra i divisori interi del termine noto -6, ossia $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

Proviamo con $\lambda = 1$:

$$p_A(1) = \lambda^3+4\lambda^2+\lambda-6\Big|_{\lambda=1} = 1+4+1-6 = 0$$

Quindi $\lambda=1$ e' radice di $p_A(\lambda)$. Per abbassare il polinomio di grado:

$$\begin{array}{c|ccc|c} & 1 & 4 & 1 & -6 \\ 1 & & 1 & 5 & 6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & // \end{array}$$

← coefficienti del polinomio

radice ↘

$$\Rightarrow p_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda^2+5\lambda+6) = (\lambda-1)(\lambda+2)(\lambda+3)$$

$$\Delta = 25-24 = 1$$

$$\lambda = \frac{-5 \pm 1}{2} = \begin{cases} -2 \\ -3 \end{cases}$$

La matrice A ha tre radici distinte :

$\lambda_1 = 1$ con $\mu_1 = 1$ $\Rightarrow$ $\nu_1 = 1$

$\lambda_2 = -2$ con $\mu_2 = 1$ $\Rightarrow$ $\nu_2 = 1$

$\lambda_3 = -3$ con $\mu_3 = 1$ $\Rightarrow$ $\nu_3 = 1$

ed è quindi diagonalizzabile.

Procediamo al calcolo degli autovettori:

Per $\lambda_1 = 1$:

$$\lambda_1 I - A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -6 & 1 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sistema omogeneo: $\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

Ponendo $x_3 = \alpha$ (parametro libero), otteniamo:

$$x_2 = x_3 = \alpha \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$x_1 = x_2 = \alpha$$

v_1, autovettore relativo a λ_1

Per $\lambda_2 = -2$:

$$\lambda_2 I - A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ -6 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sistema omogeneo: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

Ponendo $x_3 = \alpha$ (parametro libero), otteniamo:

$$x_2 = -\frac{1}{2}x_3 = -\frac{1}{2}\alpha \qquad \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\alpha \\ -\frac{1}{2}\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{4}\alpha$$

v_2, autovettore relativo a λ_2

Per $\lambda_3 = -3$:

$$\lambda_3 I - A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 \\ -6 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sistema omogeneo: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

Ponendo $x_3 = \alpha$ (parametro libero), otteniamo:

$$x_2 = -\frac{1}{3}x_3 = -\frac{1}{3}\alpha \qquad \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9}\alpha \\ -\frac{1}{3}\alpha \\ \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = -\frac{1}{3}x_2 = \frac{1}{9}\alpha$$

v_3, autovettore relativo a λ_3

Definiamo la matrice T:

$$T = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{9} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

tale che

$$\tilde{A} = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Da cui:

$$e^{\tilde{A}t} = \begin{bmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

Ricordiamo che $e^{At} = T e^{\tilde{A}t} T^{-1}$. Sostituendo in

$$y_e(t) = C e^{At} x_0$$

otteniamo:

$$y_e(t) = C T e^{\tilde{A}t} T^{-1} x_0$$

Per evitare di invertire T, definiamo $\alpha = T^{-1} x_0$, con $\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$.

α è soluzione del sistema lineare $T\alpha = x_0$.

Applicando il metodo della riduzione a scala per risolvere il sistema, abbiamo:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{9} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{T} \underbrace{\begin{matrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{matrix}}_{x_0} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{9} \\ 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{4}{9} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{8}{9} \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{9} \\ 0 & -\frac{3}{4} & -\frac{4}{9} \\ 0 & 0 & \frac{4}{9} \end{bmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \frac{1}{4}\alpha_2 + \frac{1}{9}\alpha_3 = 0 \\ -\frac{3}{4}\alpha_2 - \frac{4}{9}\alpha_3 = 3 \\ \frac{4}{9}\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\alpha_1 = 1$$

$$\Uparrow$$

$$-\frac{3}{4}\alpha_2 = 3 \Rightarrow \alpha_2 = -4$$

$$\Uparrow$$

$$\Rightarrow \alpha_3 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

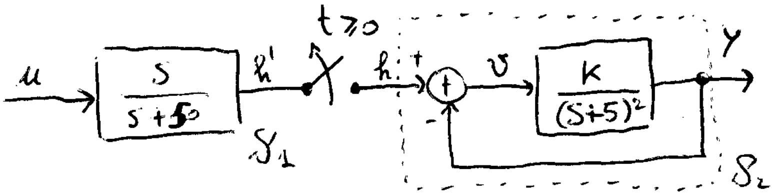
In conclusione:

$$y_e(t) = CTe^{\tilde{A}t}\alpha =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{t} \\ -4e^{-2t} \\ 0 \end{bmatrix} = e^{t} - e^{-2t}$$

TEMPO CONTINUO CON INTERRUTTORE



1) K : sistema con modi pseudoperiodici con $\zeta \geq 0.1$

2) Risposta all'ingresso $u(t)=\sin(2t)$

3) Diagrammi di Bode per $t<0$.

4) Controllabilità ed Osservabilità $^{t<0}$

1)

S_2 : $W_2(s)=\frac{K}{(s+5)^2+K}=\frac{K}{s^2+10s+25+K}=\frac{K}{P(s,K)}$ valutiamo le radici

$\lambda_{1,2}=-5\pm\sqrt{25-25-K}=-5\pm\sqrt{-K}$ ⇒ $K>0$ per aver radici complesse coniug.

posto $\alpha=5,\ \omega=\sqrt{K}$ ⇒ $\lambda_{1,2}=\alpha\pm j\omega$ da cui $\zeta=-\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}=\frac{5}{\sqrt{25+K}}\geq 0.1$

ovvero $\sqrt{25+K}\leq 50$ ⇔ $0<K\leq 2475$

OPPURE

$$P(s,K)=s^2+10s+25+K \Rightarrow 1+\frac{10}{25+K}s+\frac{s^2}{25+K} \Rightarrow \begin{cases}\omega_n=\sqrt{25+K}=\sqrt{\alpha^2+\omega^2}\\ \zeta=\frac{\omega_n}{2}\cdot\frac{10}{25+K}=\frac{5}{\sqrt{25+K}}\end{cases}$$

2) Scegliamo $K=75$: $W_2(s)=\frac{75}{s^2+10s+100}$ $\left(\omega_n=10,\ \zeta=\overset{0.5}{5/\sqrt{100}},\ \alpha=5,\ \omega=\overset{8.66}{\sqrt{75}}\right)$

t<0 $W(s)=W_1(s)\cdot W_2(s)=\frac{75s}{(s+50)(s^2+10s+100)}$, $W(s)\big|_{s=j2}=0.03\,e^{j1.33}$

da cui $y(t)=0.03\sin(2t+1.33)$ $t<0$

t≥0 Sistema S_2 in evoluzione libera ⇒ occorre lo stato iniziale a $t=0$:

$W_2(s)=\frac{75}{s^2+10s+100}=\frac{Y(s)}{H(s)} \Rightarrow \ddot{y}+10\dot{y}+100y=75h$, posto $y=x_1$, $x_2=\dot{x}_1=\dot{y}$ $\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-100x_1-10x_2+25h\\ y=x_1\end{cases}$

$$\begin{cases}\dot{x}=\overset{A_2}{\begin{pmatrix}0 & 1\\ -100 & -10\end{pmatrix}}x+\overset{b_2}{\begin{pmatrix}0\\ 75\end{pmatrix}}h\\ y=(\underset{e_1^T}{1\quad 0})\,x\end{cases}$$

$W_1(s)=\frac{s}{s+50} \Rightarrow \dot{\ }+50=\dot{u}$, poniamo $x_3=h-u$ $\begin{cases}\dot{x}_3=-50x_3-50u\\ h=x_3+u\end{cases}$

da cui : $\begin{cases}\dot{x}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -100 & -10 & 75\\ 0 & 0 & -50\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0\\ 75\\ -50\end{pmatrix}u\\ y=(1\quad 0\quad 0)\,u\end{cases}$ $\Leftarrow$ $\begin{cases}\dot{x}_1=x_2\\ \dot{x}_2=-100x_1-10x_2+25x_3+75u\\ \dot{x}_3=-50x_3-50u\\ y=x_1\end{cases}$

②

Valutiamo la risposta nello stato.

$$H(s) = (sI-A)^{-1}b = \begin{pmatrix} s & -1 & 0 \\ 100 & s+10 & -25 \\ 0 & 0 & s+50 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 25 \\ -50 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} \overset{\times 0}{\times} & s+50 & 25 \\ \times & s(s+50) & 25s \\ \times & 0 & s^2+10s+100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 25 \\ -50 \end{pmatrix}}{(s+50)(s(s+10)+100)} = \frac{\begin{pmatrix} 25s \\ 25s^2 \\ -50(s^2+10s+100) \end{pmatrix}}{(s+50)(s^2+10s+100)}$$

$$H(s)\big|_{s=j2} = \begin{pmatrix} 0.031e^{j1.33} \\ 0.061e^{j2.90} \\ 1.00e^{j3.10} \end{pmatrix} \Rightarrow x(t) = \begin{pmatrix} 0.031 \sin(2t+1.33) \\ 0.061 \sin(2t+2.90) \\ 1.0 \sin(2t+3.10) \end{pmatrix} \qquad t \leq 0$$

$$x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} 0.030 \\ 0.0148 \\ 0.040 \end{pmatrix}$$

$$\uparrow \qquad x(t) = \overset{1}{U}|H(j2)| \sin(2t + \angle H(j2))$$

Da cui l'evoluzione libera del sistema S_2:

$$Y_\ell(s) = \Psi_2(s)x_0 = e_2^T(sI-A_2)^{-1}x_0 = (1 \;\; 0)\begin{pmatrix} s & -1 \\ 100 & s+10 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0.030 \\ 0.0148 \end{pmatrix} = \frac{(1 \;\; 0)\begin{pmatrix} s+10 & 1 \\ -100 & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.030 \\ 0.0148 \end{pmatrix}}{s^2+10s+100} =$$

$$= \frac{0.015 + 0.3 + 0.03s}{s^2+10s+100} = \frac{0.315 + 0.03s}{s^2+10s+100} = \frac{0.315 + 0.03s}{(s+5)^2+25} = \frac{0.315+0.03s}{(s+5+j8.66)(s+5-j8.66)}$$

$$y_\ell(t) = y(t)\big|_{t\geq 0} = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{0.315+0.03s}{(s+5)^2+25}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\overset{Q}{0.015-0.0075i}}{(s+5)+8.66i} + \frac{\overset{Q^*}{0.015+0.0075i}}{(s+5)-8.66i}\right] = 2\cdot\overset{|Q|}{0.018}\cos(8.66t+\overset{\angle Q}{0.565})e^{-5t}\,\delta_{-1}(t)$$

4) Matrice di controllabilità:

$$C = [B \;\; AB \;\; A^2B] = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 0 & 3 & -180 \\ 3 & -180 & 9000 \\ -2 & 100 & -5000 \end{pmatrix}, \qquad \rho(C) = 3 \Rightarrow S \text{ completamente controllabile}$$

Matrice di osservabilità:

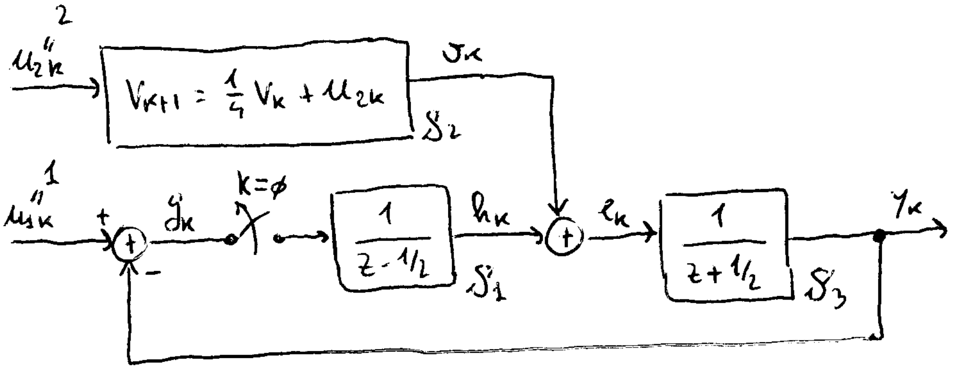
$$O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -100 & -10 & 25 \end{pmatrix}, \qquad \rho(O) = 3 \Rightarrow S \text{ completamente osservabile}$$

- **NOTE:** Calcolare $h'(t)$ in regime armonico come: $h(t) = |W_1(j2)| \sin(2t + \angle W_1(j2))$
Osservare che $h(t) = h'(t)\,\delta_{-1}(-t)$, procedere con regime armonico + Laplace per il sistema 2.

TEMPO DISCRETO

①

1) Valutare la risposta del sistema.



$$S_2 : \quad v_{k+1} = \frac{1}{4} v_k + u_{2k} \xrightarrow{\mathcal{Z}} zV(z) = \frac{1}{4} V(z) + U_2(z) \Rightarrow W_2(z) = \frac{1}{z - 1/4}$$

K<0 Sistema è in regime con forzamenti costanti in ingresso.

Principio di sovrapposizione degli effetti :

$$W(z) = \begin{pmatrix} W_{u1}(z) & W_{u2}(z) \end{pmatrix} \Longleftrightarrow Y(z) = W(z) \begin{pmatrix} U_1(z) \\ U_2(z) \end{pmatrix}$$

$$W_{u1}(z) = \left.\frac{Y(z)}{U_1(z)}\right|_{u_2=0} = \frac{W_1(z) W_3(z)}{1 + W_1(z) W_3(z)} = \frac{1}{(z-1/2)(z+1/2)+1} = \frac{1}{z^2 + 3/4}$$

$$W_{u2}(z) = \left.\frac{Y(z)}{U_2(z)}\right|_{u_1=0} = W_2(z) \cdot \frac{W_3(z)}{1 + W_1(z) W_3(z)} = \frac{z - 1/2}{(z^2+3/4)(z-1/4)}$$

da cui $$W(z) = \frac{\begin{pmatrix} z-1/4 & z-1/2 \end{pmatrix}}{(z^2+3/4)(z-1/4)}$$

Risposta all'ingresso costante $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$: $Y(k)\big|_{k<0} = W(z)\big|_{z=1} \cdot U =$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 1-1/4 & 1-1/2 \end{pmatrix}}{(1+3/4)(1-1/4)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 \end{pmatrix}}{7/4 \cdot 3/4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{3/4 + 4/4}{7/4 \cdot 3/4} = \frac{7}{21} \cdot 4 = 4/3$$

k ≥ 0 Calcoliamo la risposta del sistema S_2 non interessato dall'interruttor

$$v(k) = W_2(z)\big|_{z=1} \cdot u_{2k} = \frac{2}{1 - 1/4} = 8/3$$

Determiniamo la rappresentazione i-s-u dei due sottosistemi S_1 ed S_3:

$h_{k+1} - 1/2\, h_k = \delta_k$, posto $h_k = x_{1k}$: $S_1 \begin{cases} x_1(k+1) = \frac{1}{2} x_1(k) + \delta(k) \\ h(k) = x_1(k) \end{cases}$

$y_{k+1} + \frac{1}{2} y_k = e_k$, posto $y_k = x_{2k}$: $S_3 \begin{cases} x_2(k+1) = -\frac{1}{2} x_2(k) + e(k) \\ y(k) = x_2(k) \end{cases}$

Per $k<0$ si ha $\begin{cases} e_k = v_k + h_k = v_k + x_{1k} \\ \delta_k = u_{1k} - y_k = u_{1k} - x_{2k} \end{cases}$ $u(k) = \begin{pmatrix} u_1(k) \\ v(k) \end{pmatrix}$

da cui si ricava $\begin{cases} x_1(k+1) = \frac{1}{2} x_1(k) - x_2(k) + u_1(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) - \frac{1}{2} x_2(k) + v(k) \\ y(k) = x_2(k) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(k+1) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x(k) \end{cases}$

Occorre lo stato all'istante $k=0$:

$$H(z) = (zI-A)^{-1}B = \begin{pmatrix} z-1/2 & 1 \\ -1 & z+1/2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot I = \frac{\begin{pmatrix} z+1/2 & -1 \\ 1 & z-1/2 \end{pmatrix}}{z^2 + 3/4}$$

Risposta allo stato a regime per $k<0$ è: $x(k)\big|_{k<0} = H(z)\big|_{z=1} \cdot U =$

$= \frac{4}{7} \begin{pmatrix} 3/2 & -1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 8/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$ da cui $x_0 = x(0) = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$

Determiniamo la risposta per $k \geq 0$ del sottosistema S_1 che per $k \geq 0$ è in evoluzione libera:

$h(k)\big|_{k\geq 0} = e^T A^k x_{01} = 1 \cdot (1/2)^k \cdot (-2/3) = -\frac{2}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^k \qquad k \geq 0$

da cui ricaviamo $e(k)\big|_{k\geq 0} = v_k\big|_{k\geq 0} + h_k\big|_{k\geq 0} = \frac{8}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k$

Il sistema S_3 avrà una componente in evoluzione libera ed una in evoluzione forzata: $y(k) = y_\ell(k) + y_f(k) \qquad k \geq 0$

libera:

$$Y_l(k) = c^T A^k x_{02} = 1 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\right)^k \cdot \tfrac{4}{3} = \tfrac{4}{3}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^k \qquad k \geq 0$$

forzata:

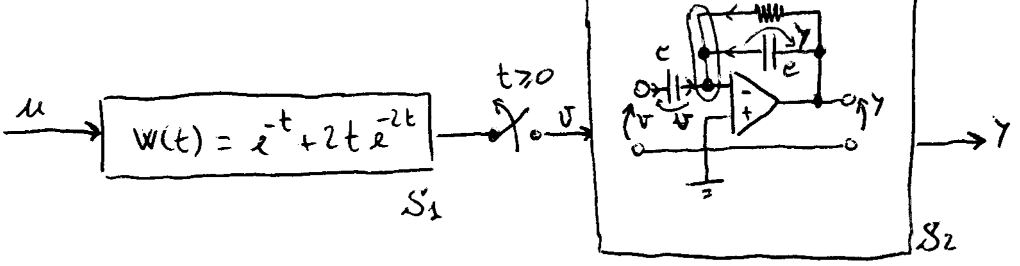
$Y_f(k)$: passiamo nel dominio Z: $Y_f(z) = W_3(z) \cdot E(z) = \frac{1}{z+1/2}\left(\frac{z}{z-1}\frac{8}{3} - \frac{2}{3}\frac{z}{z-1/2}\right) =$

$$= \frac{8}{3}\frac{z}{(z-1)(z+1/2)} - \frac{2}{3}\frac{z}{(z+1/2)(z-1/2)} = \frac{8}{3}z\left(\frac{-2/3}{z-1} + \frac{2/3}{z+1/2}\right) - \frac{2}{3}z\left(\frac{1}{(z-\frac{1}{2})} - \frac{1}{z+1/2}\right) =$$

$$= -\frac{10}{9}\frac{z}{z+1/2} - \frac{2}{3}\frac{z}{z-1/2} + \frac{16}{9}\frac{z}{z-1} \Rightarrow Y_f(k) = -\frac{10}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^k - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{16}{9}$$

infine $Y(k) = -\frac{2}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \frac{16}{9} = -\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \frac{16}{9} \qquad k \geq 0$

SISTEMA T.V. E RISPOSTA



$C = R = 1$

1) Risposta al segnale: $u(t) = 2\sin(2t)$
2) Tracciare il diagramma di Bode dei moduli (asintotico)
3) Il diagramma delle fasi

S_1: $W_1(s) = \mathcal{L}[w(t)] = \mathcal{L}[e^{-t} + 2te^{-2t}] = \frac{1}{s+1} + 2\frac{1}{(s+2)^2} = \frac{s^2+4s+4+2s+2}{(s+1)(s+2)^2} =$

$= \frac{s^2+6s+6}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{\overset{b_2}{s^2} + \overset{b_1}{6s} + \overset{b_0}{6}}{\underset{a_3}{s^3} + \underset{a_2}{5s^2} + \underset{a_1}{8s} + \underset{a_0}{4}}$

Forma canonica di osservazione: $[a_3 = 1!]$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_0 - b_3a_0 \\ b_1 - b_3a_1 \\ b_2 - b_3a_2 \end{pmatrix} u \overset{\downarrow}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} u \qquad i-s-u$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

S_2: Equazione al nodo: $C\dot{v} = -C\dot{y} - y/R \Rightarrow \dot{y} = -\frac{1}{RC}y - \dot{v} = -y - \dot{v}$

$\dot{y} + y = -\dot{v} \Rightarrow W_2(s) = \frac{-s}{s+1}$

$x = y + v \Rightarrow \dot{x} = \dot{y} + \dot{v} = -y = -x + v \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = -x + v \\ y = x - v \end{cases} \qquad i-s-u$

$S_1 \cdot S_2$: $W(s) = W_1(s)W_2(s) = \frac{-s(s^2+6s+6)}{(s+1)^2(s+2)^2}$ poli $-1, -2 \Rightarrow$ S. Asint. stabile

1) Per $t<0$ il sistema è in regime sinusoidale con l'ingresso $u(t) = 2\sin(2t)$

$W(\omega) = W(s)\Big|_{s=j\omega=j2} = -0.42 + j0.44 = 0.608\,e^{j2.33}$

$y(t) = 2 \cdot 0.608 \sin(2t + 2.33) = 1.22 \cdot \sin(2t + 2.33) \qquad t<0$

Per $t \geq 0$ l'interruttore si apre ed il sistema W_2 evolverà in modo libero a partire dalle condizioni iniziali raggiunte per $t=0$. ②

Valutiamo l'andamento di $v(t)$ per $t<0$:

$$W_1(j2) = 0.2 - j0.65 = 0.68\, e^{-j1.22} \Rightarrow v(t) = 1.36 \sin(2t - 1.22) \qquad t<0$$

Valutiamo la risposta a regime sinusoidale nello stato per $t<0$:

$$H_2(s) = (sI-A)^{-1} b = (s+1)^{-1} \cdot 1 = \frac{1}{s+1} \Rightarrow H_2(j2) = 0.2 - j0.4 = 0.45\, e^{-j1.11}$$

$$x(t) = 0.45 \cdot 1.36 \sin(2t - 1.22 - 1.11) = 0.612 \sin(2t - 2.322) \qquad t<0$$

$$x(0) = x_0 = -0.424$$

Valutiamo l'evoluzione libera nell'uscita del sistema per $t \geq 0$:

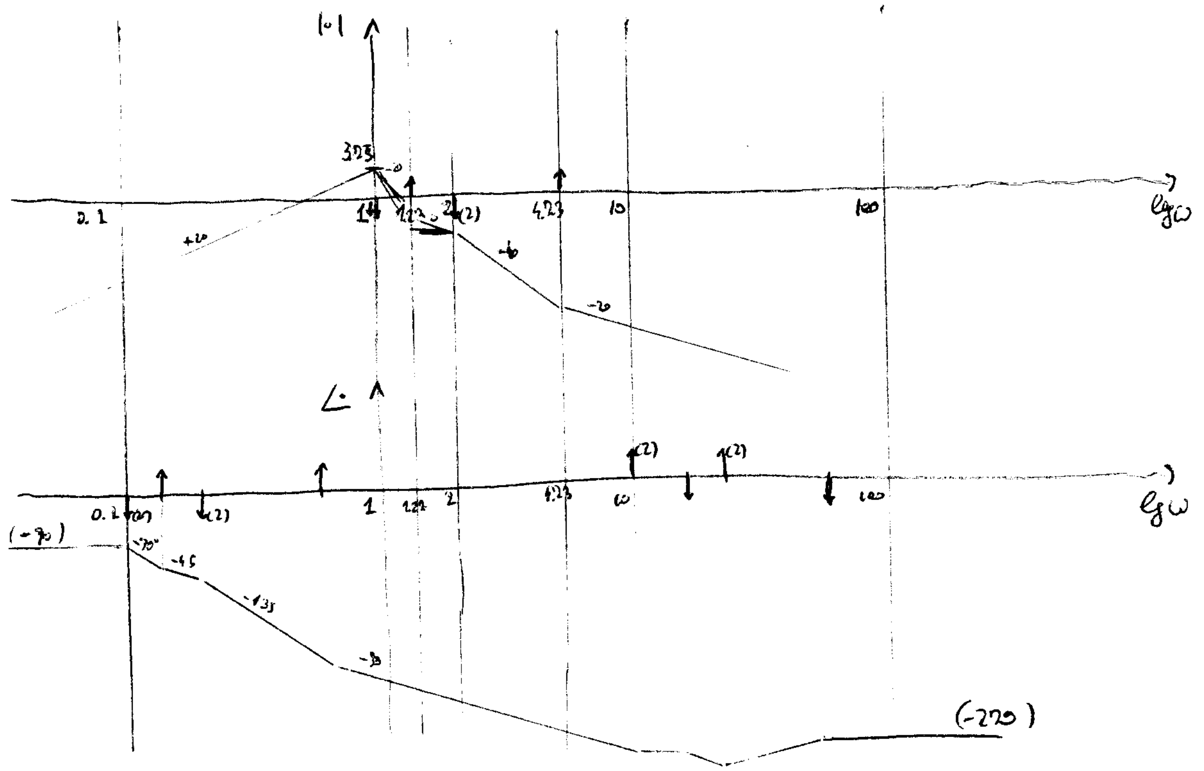
$$y_l(t) = \Psi(t)\, x_0 \quad , \quad Y_l(s) = \Psi(s)\, x_0 = c^T (sI-A)^{-1} x_0 = 1 \cdot (s+1)^{-1} (-0.424) = \frac{-0.424}{s+1}$$

$$y_l(t) = -0.424\, e^{-t} \qquad t \geq 0$$

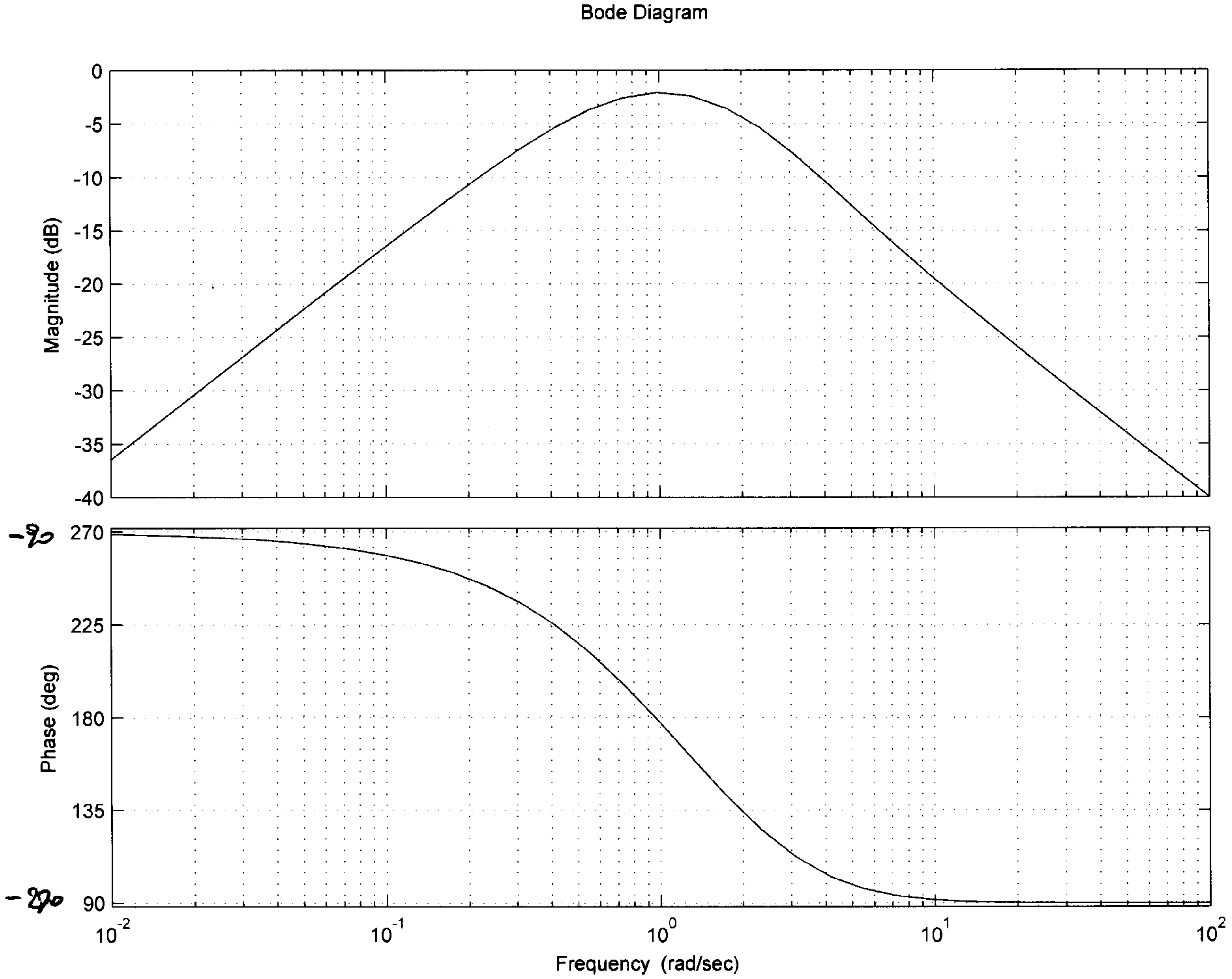
Da cui

$$y(t) = \begin{cases} 1.22 \sin(2t + 2.33) & t<0 \\ -0.424\, e^{-t} & t \geq 0 \end{cases}$$

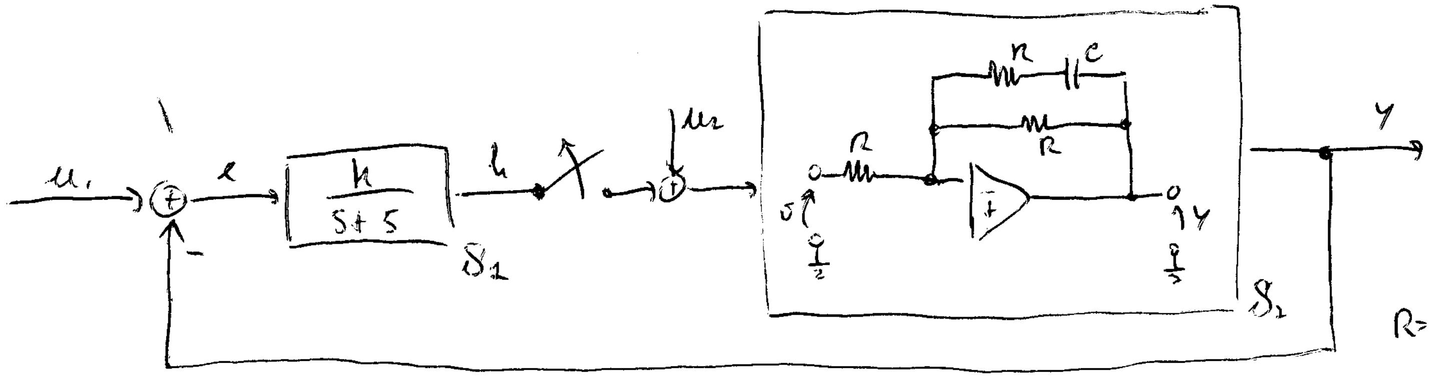
2) $$W(\omega) = \frac{-j\omega(j\omega+4.23)(j\omega+1.22)}{(j\omega+2)^2(j\omega+1)^2} = \underset{\substack{\shortparallel \\ 3.5\,dB}}{\left(-\frac{3}{2}\right)} \cdot \frac{(j\omega)(1+\overset{\tau_{z1}}{0.21}\,j\omega)(1+\overset{\tau_{z2}}{0.29}\,j\omega)}{(1+\underset{\tau_{p1}}{0.5}\,j\omega)^2(1+\underset{\tau_{p2}}{j\omega})^2}$$



3) DIAGRAMMI DI BODE



①



R=C=1

1) ISU

2) K x ASINTOTICA STAB.

3) RISPOSTA $u_1(t) = 2\sin(2t)$, $u_2(t) = \delta_{-1}(t)$

1)

$$G_2(s) = -\frac{Z_u(s)}{Z_i(s)} \quad \text{con} \quad Z_u(s) = \frac{R\left(R + \frac{1}{sC}\right)}{2R + \frac{1}{sC}} = \frac{CR^2 s + R}{2RCs + 1}, \quad Z_i(s) = R$$

DA CUI $G_2(s) = -\frac{s+1}{2s+1}$

$$S_2: \begin{cases} \dot{x}_2 = -\frac{x_2}{2} - \frac{v}{2} \\ y = \frac{x_2}{2} + \frac{v}{2} \end{cases}$$

PER IL PRIMO SOTTOSISTEMA:

$$S_1: \begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 + K e \\ h = x_1 \end{cases}$$

POSTO $e = u_1 - y$ e $v = h + u_2$ SI RICAVA LA ISU COMPLESSIVA

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \left(\frac{K}{2} - 5\right) x_1 - \frac{K}{2} x_2 + K u_1 + \frac{K}{2} u_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{2} x_1 - \frac{1}{2} x_2 - \frac{u_2}{2} \\ y = -\frac{1}{2} x_1 + \frac{1}{2} x_2 - \frac{u_2}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} \frac{K}{2} - 5 & -\frac{K}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} K & \frac{K}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} u \\ y = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \end{pmatrix} u \end{cases}$$

2) POLINOMIO CARATTERISTICO

$$p(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^2 - \frac{k-11}{2}\lambda + \frac{5-k}{2}$$

$$\Delta > 0 \iff \frac{(k-11)^2}{4} - 4\,\frac{5-k}{2} > 0 \Rightarrow k^2 - 14k + 81 > 0 \quad \text{VERO } \forall k\,!$$

INOLTRE $\quad -(k-11) > 0 \Rightarrow k < 11 \quad ; \quad 5-k > 0 \Rightarrow k < 5$

$$\boxed{k < 5}$$

SCEGLIAMO $k = 1$

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} -9/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & +1/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix} u \\ \\ y = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \end{pmatrix} u \end{cases}$$

$$G(s) = C(sI-A)^{-1}B + D = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s+9/2 & 1/2 \\ 1/2 & s+1/2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \ldots = -\frac{1}{2}\,\frac{\begin{pmatrix} s+1 & (s+1)(s+5) \end{pmatrix}}{s^2+5s+2} = \begin{pmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \end{pmatrix}$$

3) $t \leq 0$

RISPOSTA ARMONICA x $u_1(t) = 2\sin(2t)$

$$G_{11}(s)\Big|_{s=j2} \simeq 0.11\, e^{j2.48} \Rightarrow y(t) = 0.22 \sin(2t + 2.48) \qquad t \leq 0$$

NELLO STATO: $\quad H(s) = \begin{pmatrix} H_{11}(s) & H_{12}(s) \end{pmatrix}$

$$H_{11}(s) = (sI-A)^{-1}B_1 = \begin{pmatrix} s+9/2 & 1/2 \\ 1/2 & s+1/2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} s+1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}}{s^2+5s+2}$$

$$H_{11}(s)\Big|_{s=j2} = \begin{pmatrix} 0.202\, e^{-j0.442} \\ 0.0490\, e^{j1.323} \end{pmatrix} \Rightarrow x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.404 \sin(2t - 0.442) \\ 0.0981 \sin(2t + 1.323) \end{pmatrix}$$

PER $\quad t = 0 \Rightarrow \quad x_2(0) \simeq 0.1$

$t \geq 0$

$$y(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ x_2(0)}}{y_\ell(t)} + \underset{\substack{\uparrow \\ u_2}}{y_f(t)}$$ solo S_2 DA CONTRIBUTO

$$Y(s) = \underbrace{e_2 (sI - A_2)^{-1} x_2(0)}_{Y_\ell(s)} + \underbrace{e_2 (sI - A_2)^{-1} B_2 \frac{1}{s}}_{Y_f(s)} = \frac{1}{2} \frac{0.1}{s+1/2} - \frac{1}{2} \frac{s+1}{s+1/2} \cdot \frac{1}{s}$$

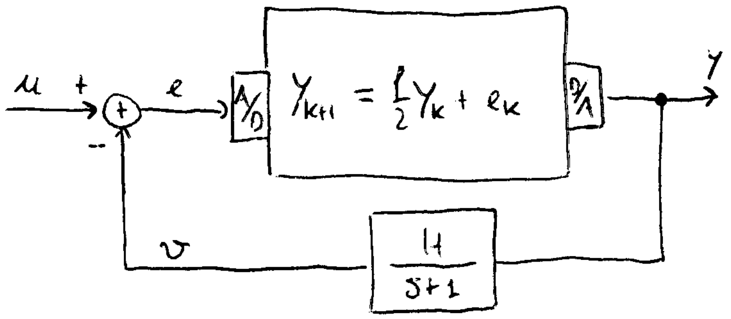
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{0.55}{s+1/2} - \frac{1}{s} \right] = 0.55\, e^{-\frac{1}{2}t} - 1 \qquad t \geq 0$$

IN CONCLUSIONE

$$y(t) = \begin{cases} 0.22 \sin(2t + 2.48) & t < 0 \\ 0.55\, e^{-\frac{1}{2}t} - 1 & t > 0 \end{cases}$$

SISTEMI A DATI CAMPIONATI

$T = 0.1\,s$



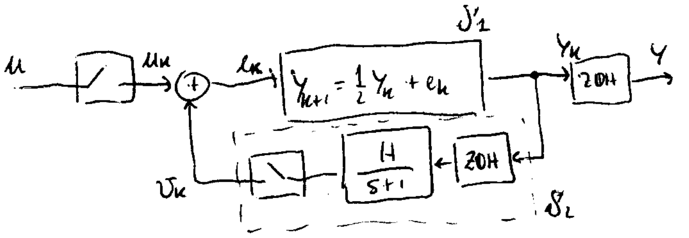
1) Valori di H per asintotica stabilità.

2) Fissato H (0.3), valutare le costanti di tempo del sistema e rapportarle a T

3) Risposta al segnale $u(t) = 5 \sin(5t+5)$.

/————/

1)



S_2 sistema a dati campionati:

$$\begin{cases} x(k+1) = A_T\, x(k) + b_T\, y(k) \\ v(k) = c^T x(k) + d\, y(k) \end{cases}$$

$$S_2 \begin{cases} \dot{x} = -x + H\,y \\ v = x \end{cases} \qquad \begin{cases} A_T = e^{AT} = e^{-0.1} = 0.905 \simeq 0.9 \\ b_T = \int_0^T e^{As} ds\, b = A^{-1}(e^{AT} - I)\, b = (-1)(e^{-0.1} - 1)\, H \hat{=} 0.1\, H \end{cases}$$

$$S_{2,T} \begin{cases} x(k+1) = 0.9\; x(k) + 0.1 H\; y(k) \\ v(k) = x(k) \end{cases} \Rightarrow W_2(z) = c^T (zI - A_T)^{-1} b_T + d = 1 \cdot (z - 0.9)^{-1}\, 0.1\, H + 0$$

$$W_2(z) = \frac{0.1H}{z - 0.9}$$

$$S_1: \quad W_1(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{1}{z - 0.5}$$

Sistema retroazionato:

$$W(z) = \frac{W_1(z)}{1 + W_1(z)\, W_2(z)} = \frac{\frac{1}{z - 1/2}}{1 + \frac{1}{z - 1/2} \cdot \frac{0.1H}{z - 0.9}} = \frac{z - 0.9}{(z - 1/2)(z - 0.9) + 0.1H}$$

$$W(z) = \frac{z - 0.9}{z^2 - 1.4z + 0.45 + 0.1H}$$

Polinomio caratteristico: $P(z) = z^2 - 1.4z + 0.45 + 0.1H$

Cond. necessarie:

$$\begin{cases} \left| \frac{1}{0.45 + 0.1H} \right| < 1 \Rightarrow |0.45 + 0.1H| > 1 \Rightarrow \begin{cases} 0.45 + 0.1H > 1 \Rightarrow H > -4.5 \\ 0.45 + 0.1H < -1 \Rightarrow H < -14.5 \end{cases} \\ P(1) / (0.45 + 0.2H) > 0 \Rightarrow \frac{0.05 + 0.1H}{0.45 + 0.1H} > 0 \\ (-1)^2 P(-1) / (0.45 + 0.1H) > 0 \Rightarrow \frac{2.85}{0.45 + 0.1H} > 0 \end{cases}$$

② $(1-\sigma)^2$

Routh: $\rho'(\sigma) = (1-\sigma)^2 \rho\left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\right) = (1-\sigma^2)\left(\left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\right)^2 - 1.4\left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\right) + 0.45 + 0.1H\right) = (1+\sigma)^2 - 1.4(1+\sigma)(1-\sigma) + 0.45 + 0.1H$

$\rho'(\sigma) = 1 + 2\sigma + \sigma^2 - 1.4(1-\sigma^2) + (0.45+0.1H)(1-2\sigma+\sigma^2) = (0.05+0.1H) \quad + (1.1-0.2H)\sigma + (2.85+0.1H)\sigma^2$

oppure: $\rho'(\sigma) = T_z^\sigma \rho(z)$ $\qquad T_z^\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1.4 \\ 0.45+0.1H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.05+0.1H \\ 1.1-0.2H \\ 2.85+0.1H \end{pmatrix}$

$\rho'(\sigma) = \alpha_\nu z^\nu + \dots + \alpha_0$ $\qquad \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_\nu \end{pmatrix} = T_z^\sigma \begin{pmatrix} a_\nu \\ \vdots \\ a_0 \end{pmatrix}$

$\rho(z) = a_\nu z^\nu + \dots + a_0$

$\rho'(\sigma) = (2.85+0.2H)\sigma^2 + (1.1-0.2H)\sigma + (0.05+0.1H)$

Con Cartesio: $\begin{cases} 2.85 + 0.1H > 0 \\ 1.1 - 0.2H > 0 \\ 0.05 + 0.1H > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} H > -28.5 \\ H < 5.5 \\ H > -0.5 \end{cases}$

/	/	ok	ok
ok	ok	ok	/
/	ok	ok	ok

-28.5 -0.5 5.5

$\Downarrow$

$-0.5 < H < 5.5$

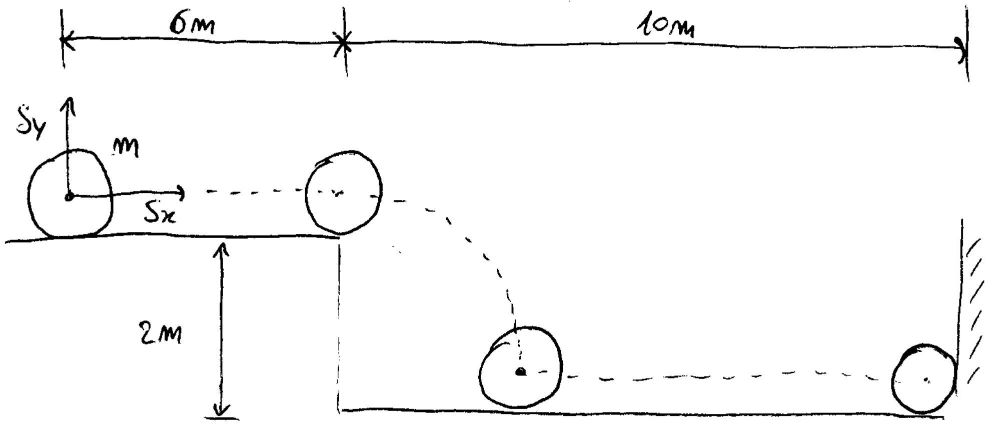
2) $H = 0.3 \Rightarrow \rho(z) = z^2 - 1.4z + 0.48 \Rightarrow z_{1,2} = 0.7 \pm \sqrt{0.04 - 0.1H} = 0.7 \pm 0.1 < \begin{matrix} 0.6 \\ 0.8 \end{matrix}$

da cui $\tau_1 = -\frac{1}{\ln(0.6)} = 1.96$, $\tau_2 = -\frac{1}{\ln(0.8)} = 4.48$ $\qquad \tau_1, \tau_2 \gg T$!

3) $W(z)\Big|_{z=e^{j\frac{1}{2}}} = \frac{z-0.9}{(z-0.8)(z-0.6)}\Big|_{z=e^{j1/2}}$ $\qquad \begin{cases} u(t) = 5 \sin(5t+5) & \text{ingresso campionato:} \\ u(kT) = 5 \sin(5\underset{\underset{0.1}{\parallel}}{T}k + 5) = 5 \sin(\tfrac{1}{2}k + 5) \end{cases}$

$W(e^{j1/2}) = 1.28\, e^{-0.84j}$

$y(k) = 5 \cdot 1.28 \sin(\tfrac{1}{2}k - 0.84 + 5) = 8.4 \sin(0.5k + 4.16)$



$m = 1\ \text{Kg}$

$b = 0.01\ \text{Ns/m}$

$g \simeq 9.81\ \text{m/s}^2$

$$\begin{cases} \dot{S}_x = 1\ \text{m/s} \\ \dot{S}_y = 0 \end{cases}$$

1) i - s - u

2) $S_x(t)$, $S_y(t)$

3) t_a : $S_x(t_a) = 6m$; t_b : $S_y(t_b) \overset{\substack{\text{(NUMERICAMENTE O} \\ \text{GRAFICAMENTE)}}}{=} -2m$; t_c : $S_x(t_c) = 16m$

---

1)' S_x indipendenti da S_y ; S_y dipende da S_x per gli istanti di transizione.

$\underline{\underline{S_x}}$

$$m\ddot{S}_x + b\dot{S}_x = 0 \quad \forall t, \quad \equiv \quad \begin{cases} x_1 = S_x \\ x_2 = \dot{S}_x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -b/m\, x_2 \\ y = S_x = x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1/100 \end{pmatrix} x \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \\ x_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^T \end{cases}$$

2)'

$$Y_\ell(s) = C\,(sI-A)^{-1}x_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\begin{pmatrix} s+\frac{1}{100} & 1 \\ 0 & s \end{pmatrix}}{s\left(s+\frac{1}{100}\right)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{s\left(s+\frac{1}{100}\right)} = \frac{\overset{\overset{100}{\shortparallel}}{A}}{s} + \frac{\overset{\overset{-100}{\shortparallel}}{B}}{s+\frac{1}{100}}$$

$$y_\ell(t) = 100\left(1 - e^{-t/100}\right)\delta_{-1}(t) = S_x(t)$$

3)'

t_a : $S_x(t_a) = 6 = 100\left(1 - e^{-\frac{t_a}{100}}\right) \longrightarrow t_a = -100 \ln(0.994) \simeq 6.2\ s$

t_c : $S_x(t_c) = 16 = 100\left(1 - e^{-\frac{t_c}{100}}\right) \longrightarrow t_c = -100 \ln(1-0.16) \simeq 12.4\ s$

1)'' S_y//

$$\begin{cases} m\ddot{S}_y + b\dot{S}_y = mg & t_a \leq t \leq t_b \\ S_y = 0 & 0 \leq t \leq t_a \\ S_y = -2 & t_b \leq t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \delta_y \\ x_2 = \dot{\delta}_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{100} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{\overset{g}{''}}{u} \\ \\ y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x \end{cases} \qquad x_0 = \emptyset$$

2)''

$$Y(s) = Y_f(s) = C(sI-A)^{-1}B \cdot \overset{\overset{TI}{\swarrow}}{\frac{g}{s}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\begin{pmatrix} s+\frac{1}{100} & 1 \\ 0 & s \end{pmatrix}}{s\left(s+\frac{1}{100}\right)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{g}{s} =$$

$$= -\frac{9.81}{s^2\left(s+\frac{1}{100}\right)} = \frac{\overset{\overset{98100}{}}{A''}}{s} + \frac{\overset{\overset{-981}{''}}{B}}{s^2} + \frac{\overset{\overset{-98100}{''}}{C}}{s+\frac{1}{100}}$$

$$\dot{y}(t) = 981\left(100 - t - 100\, e^{-t/100}\right)\delta_{-1}(t) \qquad \longleftarrow \text{TRASLAZIONE IN } t \Rightarrow t \to t - t_e$$

3)'' $t_b: \quad \delta_y(t_b') = -2 = 981\left(100 - t_b' - 100\, e^{-\frac{t_b'}{100}}\right)$

SOLUZIONE GRAFICA O NUMERICA:

METODO BISEZIONE

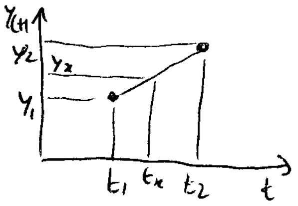
t	$\delta_y(t)$
0.5	−1.22
1.0	−4.89
0.75	−2.75
0.65	−2.07
$\boxed{0.64}$	−2.00

$$\underline{t_b = t_b' + t_e}$$

RICERCA LINEARE CON INTERPOLAZIONE

t	$\delta_y(t)$
0.1	−0.049
0.2	−0.196
0.3	−0.441
0.4	−0.784
0.5	−1.22
0.6	−1.76
0.7	−2.40

$$\begin{cases} Y_1 = Y(t_1) \\ Y_2 = Y(t_2) \end{cases} :$$

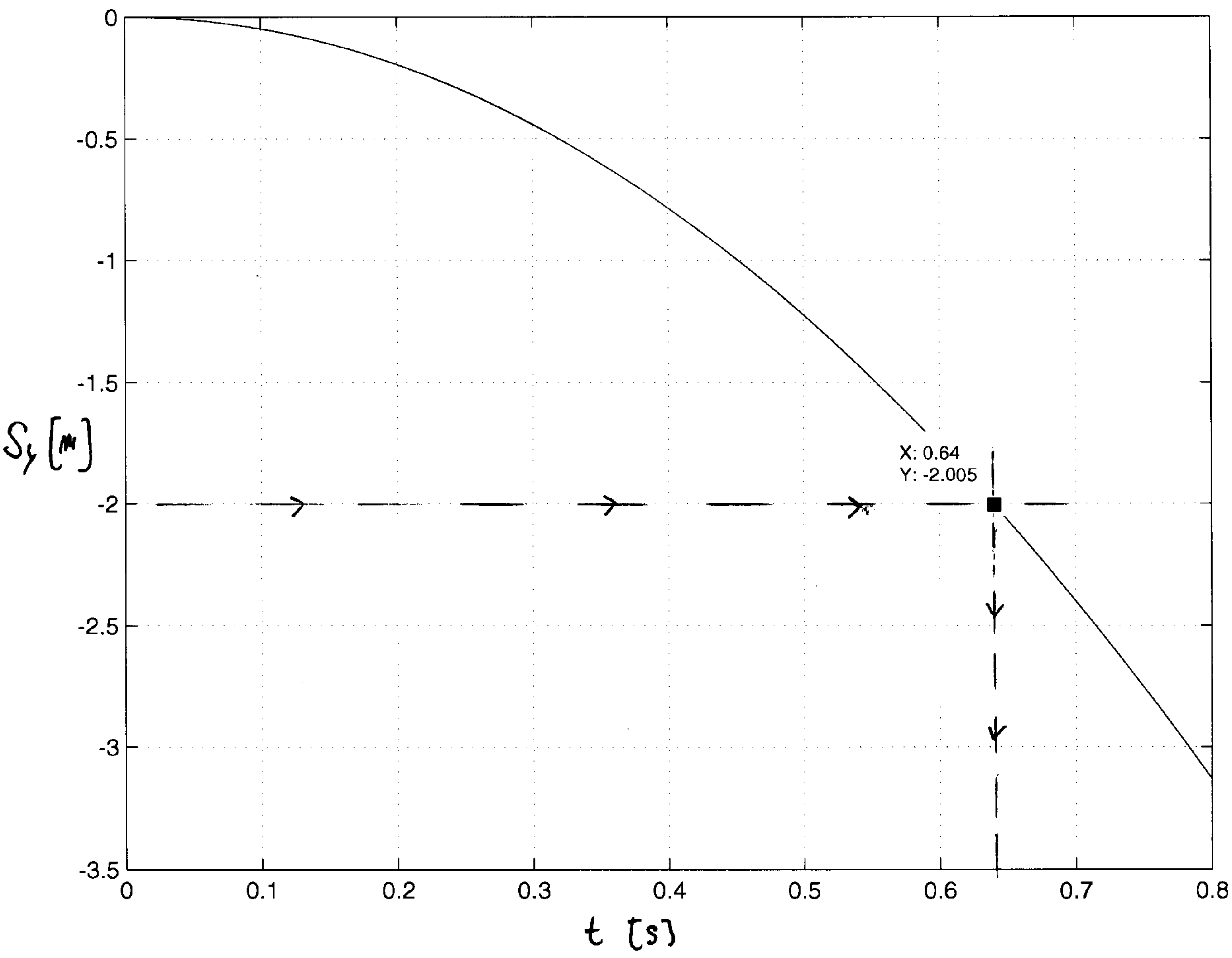


$$\begin{cases} Y_x = Y_1 + \dfrac{Y_2 - Y_1}{t_2 - t_1}(t_x - t_1) \\ \\ t_x = t_1 + \dfrac{t_2 - t_1}{Y_2 - Y_1}(Y_x - Y_1) \end{cases}$$

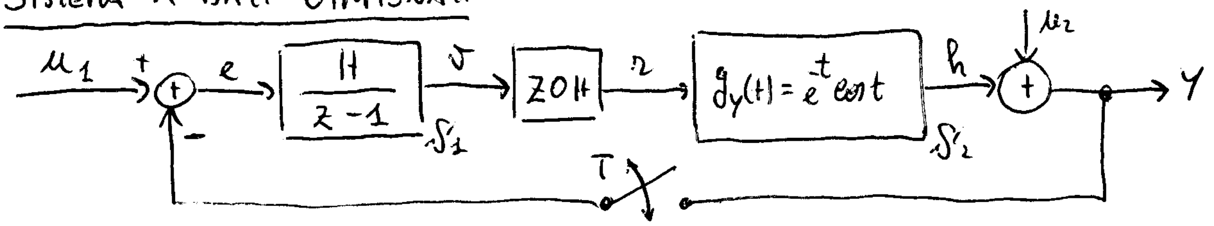
$$\begin{cases} t_1 = 0.6 \rightarrow Y_1 = -1.76 \\ t_2 = 0.7 \rightarrow Y_2 = -2.40 \end{cases}$$

$Y_x = -2.0 \rightarrow t_b' = 0.638$ s

$$S_y(t) = 981 \left(10 - t - 10\, e^{-\frac{t}{10}} \right)$$



SISTEMA A DATI CAMPIONATI



①

$T = \ln 2$
↓
NOTA: VALORE TROPPO GRANDE!

1) I-S-U
2) H TALE PER CUI IL SISTEMA RISULTA A.S.
3) $u_1(k) = \delta_{-1}(k)$ ∀k, REGIME PER $u_2(k) = \delta_{-1}(k)$ ← POLINOMIO 3° ORDINE!

---

1)
$$G_2(s) = \mathcal{L}\left[g_y(t)\right] = \frac{s+1}{(s+1)^2+1} = \frac{s+1}{s^2+2s+1} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} r(t) \\ h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x \end{cases}$$

VERSIONE A DATI CAMPIONATI:

$$\begin{cases} x(k+1) = A_d\, x(k) + B_d\, r(k) \\ h(k) = e\, x(k) \end{cases} \qquad A_d = e^{AT}, \quad B_d = \int_0^T e^{A\tau} d\tau\, B$$

AUTOVALORI DI A SONO: $\lambda_\pm = -1 \mp j = \alpha \pm j\omega$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \begin{pmatrix} s & 2 \\ -1 & s+2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} s+2 & -2 \\ 1 & s \end{pmatrix}}{s^2+2s+2} = \frac{\begin{pmatrix} s+2 & -2 \\ 1 & s \end{pmatrix}}{(s+1)^2+1}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \quad \Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\begin{pmatrix} s+2 & -2 \\ 1 & s \end{pmatrix}}{(s+1)^2+1}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\begin{pmatrix} \frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2+1} & -2\frac{1}{(s+1)^2+1} \\ \frac{1}{(s+1)^2+1} & \frac{s+1}{(s+1)^2+1} - \frac{1}{(s+1)^2+1} \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(t) + \sin(t) & -2\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) - \sin(t) \end{pmatrix} e^{-t}$$

DA CUI

$$A_d = e^{AT} = \begin{pmatrix} \cos T + \sin T & -2\sin T \\ \sin T & \cos T - \sin T \end{pmatrix} e^{-T} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1.41 & -1.28 \\ 0.64 & 0.13 \end{pmatrix}$$

$$B_d = A^{-1}(e^{AT} - I)B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{-1}\left(\begin{pmatrix} 0.205 & -0.64 \\ 0.32 & 0.055 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} 1.28 \\ 0.42 \end{pmatrix}$$

QUINDI

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{pmatrix} 0.205 & -0.64 \\ 0.32 & 0.055 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1.28 \\ 0.42 \end{pmatrix} u(k) \\ h(k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x(k) \end{cases}$$

$$G_{d2} = C_2 (zI - A_{d2})^{-1} B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z-0.705 & 0.64 \\ -0.32 & z-0.065 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1.28 \\ 0.47 \end{pmatrix} = \dots \qquad ②$$

$$= \frac{0.47z + 0.12}{z^2 - 0.77z + 0.25}$$

DUE INGRESSI :

$$G(z) = \begin{pmatrix} G_{12}(z) & G_{12}(z) \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 0.47Hz + 0.12H & z^3 - 1.77z^2 + 1.02z - 0.25 \end{pmatrix}}{z^3 - 1.77z^2 + (1.02 + 0.47H)z - 0.25 + 0.12H}$$

DA CUI

$$\begin{cases} x(k+1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.25-0.12H \\ 1 & 0 & -1.02-0.47H \\ 0 & 1 & 1.77 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0.12H & -0.12H \\ 0.47H & -0.47H \\ 0 & 0 \end{pmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} u(k) \end{cases}$$

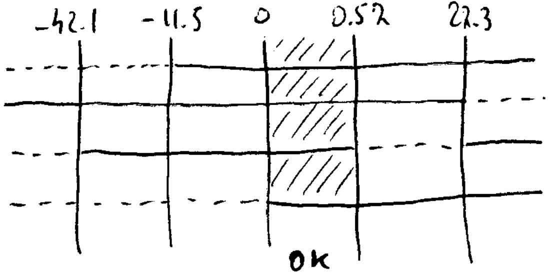
2) POLINOMIO CARATTERISTICO : $P(z) = z^3 - 1.77z^2 + (1.02 + 0.47H)z - 0.25 + 0.12H$

$$q(s) = \alpha_3 s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s^1 + \alpha_0$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1.77 \\ 1.02 + 0.47H \\ -0.25 + 0.12H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.59H \\ 0.96 - 0.83H \\ 3 - 0.11H \\ 4.04 + 0.35H \end{pmatrix}$$

ROUTH :

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 4.04 + 0.35H & 0.96 - 0.83H \\ 2 & 3 - 0.11H & 0.59H \\ \hline 1 & \frac{0.12H^2 + 4.98H - 2.88}{0.11H - 3} & \\ 0 & 0.59H & \end{array} \Longrightarrow \begin{cases} 4.04 + 0.35H > 0 \Rightarrow H > -11.5 \\ 3 - 0.11H > 0 \Rightarrow H < 22.22 \\ \frac{0.12H^2 + 4.98H - 2.88}{0.11H - 3} > 0 \Rightarrow (H > 22.22) \cup (-42.1 < H < 0.52) \\ 0.59H > 0 \rightarrow H > 0 \end{cases}$$



$$\boxed{0 < H < 0.52}$$

3) POSTO $H = 0.5 \longrightarrow P(z) = \underset{a}{z^3} - \underset{b}{1.22}z^2 + \underset{c}{1.225}z \underset{d}{-0.19}$

CAMBIO DI VARIABILE : $z = y - \frac{b}{3a} \xrightarrow[\text{DI F. VIÈTE}]{\text{SOSTITUZIONE}} y^3 + \underset{\underset{0.181}{\parallel}}{p}y + \underset{\underset{0.122}{\parallel}}{q} = 0$

DOVE $p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}$, $q = \frac{d}{a} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{2b^2}{27a^3}$.

VALUTIAMO IL DISCRIMINANTE : $\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0.00394 \quad > 0$

DATO CHE $\Delta > 0$, VALUTIAMO $u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\Delta}} = 0.121$, $v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\Delta}} = -0.498$

LE SOLUZIONI SONO

$$\begin{cases} y_1 = u + v = -0.3225 \\ y_2 = \frac{u}{2}(-1 + j\sqrt{3}) + \frac{v}{2}(-1 - j\sqrt{3}) = 0.189 + j0.442 \\ y_3 = \frac{u}{2}(-1 - j\sqrt{3}) + \frac{v}{2}(-1 + j\sqrt{3}) = 0.189 - j0.442 \end{cases} \xrightarrow{x = y - \frac{b}{3a}} \begin{cases} x_1 = 0.2125 \\ x_2 = 0.229 + j0.536 \\ x_3 = 0.229 - j0.536 \end{cases}$$

FdT COMPLESSIVA

$$G(z) = \begin{pmatrix} G_{11}(z) & G_{12}(z) \end{pmatrix} = \frac{\begin{pmatrix} 0.42z + 0.12 & z^3 - 1.72z^2 + 1.02z - 0.25 \end{pmatrix}}{(z - 0.213)(z - 0.229 - j0.536)(z - 0.229 + j0.536)}$$

$- u_1(k) = \delta_{-1}(k) \longrightarrow Y_1(z) = G_{11}(z)U_1(z) = \frac{0.42z + 0.12}{P(z)} \frac{z}{z-1} =$

$$= \left(\frac{2.23}{z-1} + \frac{-0.885 + j0.203}{z - 0.229 - j0.536} + \frac{-0.885 - j0.203}{z - 0.229 + j0.536} + \frac{-0.46}{z - 0.213} \right) z =$$

$$= \left(\frac{2.23}{z-1} + \frac{-1.22z + 0.625}{z^2 - 2 \cdot \underset{\rho}{0.946} \cdot \underset{\cos\theta}{0.842}\, z + \underset{\rho^2}{(0.946)^2}} - \frac{0.46}{z - 0.213} \right) z =$$

$$= \left(\frac{2.23}{z-1} - 1.22 \frac{z - \overset{\rho\cos\theta}{0.78}}{z^2 - 1.558z + 0.894} - 1.4 \frac{\overset{\rho\sin\theta}{0.536}}{z^2 - 1.558z + 0.894} - \frac{0.46}{z - 0.213} \right) z$$

$$y_1(k) = Z^{-1}\left[Y_1(z) \right] = \left(2.23 - \left(1.22 \cos(\underset{\theta}{0.602}\, k) + 1.41 \sin(\underset{\theta}{0.602}\, k) \right)(0.78)^k - 0.46 (0.213)^k \right) \delta_{-1}(k)$$

$- u_2(k) = \delta_{-1}(k) \longrightarrow Y_2(z) = G_{12}(z)U_2(z) = \dots$

Esercizio 1

Si consideri il sistema meccanico riportato in Figura 1, dove m_1 e m_2 sono le masse dei carrelli, z_1 e z_2 sono le rispettive posizioni, k_1 e k_2 sono i coefficienti elastici delle molle, e β è un coefficiente d'attrito viscoso. Siano inoltre u_1 e u_2 le forze esterne agenti rispettivamente sulle masse m_1 e m_2.

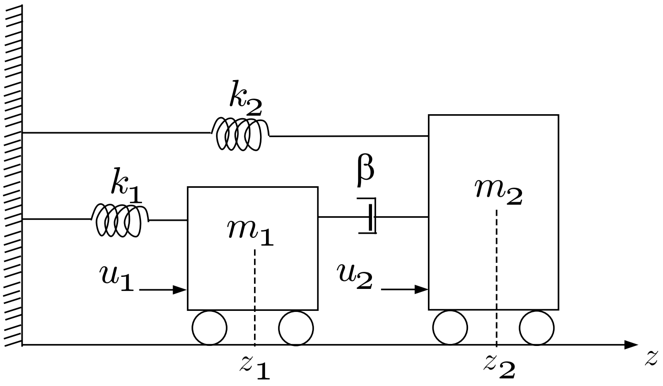


Figura 1

Si scriva un modello del sistema in forma di stato, considerando come uscite la posizione del centro di massa del sistema, e la velocità della massa m_2.

Soluzione

Si scrive il Secondo Principio della Dinamica per entrambe le masse:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{z}_1 &= -k_1 z_1 + \beta(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + u_1 \\ m_2\ddot{z}_2 &= -k_2 z_2 - \beta(\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + u_2 \end{aligned} \tag{1}$$

Le (1), riscritte in forma normale, diventano:

$$\begin{aligned} \ddot{z}_1 &= -\tfrac{k_1}{m_1} z_1 - \tfrac{\beta}{m_1}\dot{z}_1 + \tfrac{\beta}{m_1}\dot{z}_2 + \tfrac{1}{m_1}u_1 \\ \ddot{z}_2 &= \tfrac{\beta}{m_2}\dot{z}_1 - \tfrac{k_2}{m_2} z_2 - \tfrac{\beta}{m_2}\dot{z}_2 + \tfrac{1}{m_2}u_2 \end{aligned} \tag{2}$$

Si vuole trovare una rappresentazione del sistema in forma di stato del tipo:

$$\begin{aligned} \dot{\mathrm{x}} &= A\,\mathrm{x} + B\,\mathrm{u} \\ \mathrm{y} &= C\,\mathrm{x} + D\,\mathrm{u} \end{aligned} \tag{3}$$

dove $\mathrm{u} = [\ u_1\ u_2\ ]^T$, $\mathrm{y} = [\ y_1\ y_2\ ]^T$ con:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2} && \text{(posizione del centro di massa)} \\ y_2 &= \dot{z}_2 && \text{(velocità della massa } m_2\text{)} \end{aligned} \tag{4}$$

e lo stato x deve essere definito in maniera opportuna. Si ponga:

$$\mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} z_1 \\ \dot{z}_1 \\ z_2 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

(ossia, nello stato x si mettano posizione e velocità di entrambe le masse).

Utilizzando la (5) e le (2) si ha:

$$\begin{array}{l} \dot{x}_1 = \dot{z}_1 = 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{z}_1 = -\frac{k_1}{m_1} x_1 - \frac{\beta}{m_1} x_2 + 0 \cdot x_3 + \frac{\beta}{m_1} x_4 + \frac{1}{m_1} u_1 + 0 \cdot u_2 \\ \dot{x}_3 = \dot{z}_2 = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 + 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 \\ \dot{x}_4 = \ddot{z}_2 = 0 \cdot x_1 + \frac{\beta}{m_2} x_2 - \frac{k_2}{m_2} x_3 - \frac{\beta}{m_2} x_4 + 0 \cdot u_1 + \frac{1}{m_2} u_2 \end{array} \tag{6}$$

da cui si ottengono le matrici A e B:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{\beta}{m_1} & 0 & \frac{\beta}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\beta}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{\beta}{m_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Per quanto riguarda l'equazione di uscita, utilizzando le (4) si ha:

$$\begin{array}{l} y_1 = \frac{m_1}{m_1+m_2} x_1 + 0 \cdot x_2 + \frac{m_2}{m_1+m_2} x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 \\ y_2 = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 1 \cdot x_4 + 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 \end{array} \tag{8}$$

da cui si ottengono le matrici C e D:

$$C = \begin{bmatrix} \frac{m_1}{m_1+m_2} & 0 & \frac{m_2}{m_1+m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

Esercizio 2

Si consideri il sistema autonomo a tempo discreto ($\mathrm{x} \in \mathbb{R}^3$):

$$\begin{aligned} \mathrm{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \mathrm{x}(k) \triangleq A\,\mathrm{x}(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathrm{x}(k) \triangleq C\,\mathrm{x}(k) \end{aligned}$$

1. Elencare i modi del sistema.

2. Si calcoli la risposta libera $y(k) = CA^k\mathrm{x}_0$ con condizione iniziale $\mathrm{x}_0 = [\ 0\ 0\ 2\ ]^T$. Si calcoli inoltre il limite $\lim\limits_{k\to\infty} y(k)$, se esiste.

Soluzione

Il polinomio caratteristico della matrice A è:

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda\, I - A) = (\lambda - \frac{1}{2})(\lambda^2 + 4) \tag{10}$$

Gli autovalori di A sono dunque $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = 2\jmath$, e $\lambda_3 = \lambda_2^* = -2\jmath$. La matrice A ha tutti autovalori distinti, dunque è diagonalizzabile. Tuttavia, dato che λ_2 e λ_3 sono complessi, la forma diagonale di A non è reale. Si cerca quindi una forma diagonale reale a blocchi di A. Operando una riduzione a scala della matrice $A - \lambda_1\, I$, si ottiene:

$$A - \lambda_1\, I = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Il corrispondente sistema lineare omogeneo con equazioni:

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 &= 0 \\ x_2 &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

ha soluzioni (*Attenzione!* Il sistema è in tre incognite, anche se x_3 non compare nelle equazioni):

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= \alpha \end{aligned} \tag{13}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$ parametro arbitrario. Dunque, scegliendo $\alpha = 1$:

$$\ker(A - \lambda_1\, I) = \mathcal{L}\Big\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathrm{v}_1} \Big\} \tag{14}$$

Analogamente, operando una riduzione a scala della matrice $A - \lambda_2\, I$, si ottiene:

$$A - \lambda_2\, I = \begin{bmatrix} -2\jmath & 2 & 0 \\ -2 & -2\jmath & 0 \\ -2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} - 2\jmath \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \jmath & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

Il corrispondente sistema lineare omogeneo con equazioni:

$$\begin{aligned} x_1 + \jmath\, x_2 &= 0 \\ x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

ha soluzioni:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\alpha \jmath \\ x_2 &= \alpha \\ x_3 &= \alpha \end{aligned} \tag{17}$$

con $\alpha \in \mathbb{C}$ parametro arbitrario. Dunque, scegliendo $\alpha = \jmath$:

$$\ker(A - \lambda_2\, I) = \mathcal{L}\Big\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ \jmath \\ \jmath \end{bmatrix}}_{\mathrm{v}_2} \Big\} \tag{18}$$

Si scomponga v_2 nelle sue parti reale e immaginaria:

$$\mathrm{v}_2 = \mathrm{v}_2^{(1)} + \jmath\, \mathrm{v}_2^{(2)} \quad \text{dove} \quad \mathrm{v}_2^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathrm{v}_2^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

Costruendo la seguente matrice di cambio di coordinate nello spazio di stato:

$$T = \begin{bmatrix} \mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2^{(1)} & \mathrm{v}_2^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{20}$$

e scrivendo $\lambda_2 = \sigma_2 + \jmath\, \omega_2$ con $\sigma_2 = 0$ e $\omega_2 = 2$, risulta:

$$\tilde{A} = T^{-1} A T = \left[\begin{array}{c|cc} \lambda_1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \sigma_2 & \omega_2 \\ 0 & -\omega_2 & \sigma_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{array}\right] \tag{21}$$

Dunque, scrivendo ancora $\lambda_2 = M_2\, e^{\jmath\, \theta_2}$ con $M_2 = 2$ e $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$, si ha:

$$\tilde{A}^k = \left[\begin{array}{c|cc} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ \hline 0 & M_2^k \cos(k\theta_2) & M_2^k \sin(k\theta_2) \\ 0 & -M_2^k \sin(k\theta_2) & M_2^k \cos(k\theta_2) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} (\frac{1}{2})^k & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2^k \cos(k\frac{\pi}{2}) & 2^k \sin(k\frac{\pi}{2}) \\ 0 & -2^k \sin(k\frac{\pi}{2}) & 2^k \cos(k\frac{\pi}{2}) \end{array}\right] \tag{22}$$

I modi del sistema sono tutte le funzioni che compaiono in $\tilde{A}^k$, quindi:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad 2^k \cos(k\frac{\pi}{2})\,, \quad 2^k \sin(k\frac{\pi}{2})$$

Per il calcolo della risposta libera, si ha:

$$y(k) = CA^k \mathrm{x}_0 = CT\tilde{A}^k T^{-1}\mathrm{x}_0 = -2\left(\frac{1}{2}\right)^k \tag{23}$$

Per evitare il calcolo di T^{-1} in (23), il prodotto $T^{-1}\mathrm{x}_0$ può essere ricavato direttamente esprimendo x_0 come combinazione lineare dei vettori v_1, $\mathrm{v}_2^{(1)}$ e $\mathrm{v}_2^{(2)}$:

$$\mathrm{x}_0 = \alpha_1 \mathrm{v}_1 + \alpha_2 \mathrm{v}_2^{(1)} + \alpha_3 \mathrm{v}_2^{(2)} \tag{24}$$

Il sistema lineare risultante:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 0 \\ \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 &= 2 \end{aligned} \tag{25}$$

ha soluzione $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Dunque:

$$T^{-1}\mathrm{x}_0 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{26}$$

Infine:

$$\lim_{k\to\infty} y(k) = 0 \tag{27}$$

Esercizio 3

Dato il sistema nonlineare a tempo continuo:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1^2(t) + x_2^2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_2(t) \end{cases}$$

determinare i punti di equilibrio quando $u(t) = -1$ e discuterne la stabilità. Per ciascun punto di equilibrio, riportare le matrici A_{lin} e B_{lin} del corrispondente sistema linearizzato.

Soluzione

Il sistema è nella forma:

$$\dot{\mathrm{x}}(t) = f(\mathrm{x}(t), u(t)) \tag{28}$$

dove:

$$\mathrm{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad f(\mathrm{x}, u) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 + u \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix} \tag{29}$$

Per determinare i punti di equilibrio del sistema quando $u(t) = -1$, si risolve il sistema:

$$0 = f(\mathrm{x}, u) \tag{30}$$

cioè:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + u &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned} \tag{31}$$

con $u \triangleq u_{eq} = -1$. Si ha dunque:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{aligned} \tag{32}$$

Sostituendo $x_1 = -x_2$, ottenuto dalla seconda equazione, nella prima equazione, si trova:

$$x_2^2 = \frac{1}{2} \tag{33}$$

che ha soluzioni $x_2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, e quindi $x_1 = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$. I punti di equilibrio del sistema quando $u(t) = -1$, sono:

$$\mathrm{x}_{eq,1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{x}_{eq,2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{34}$$

Calcolando le matrici:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{x}, u) = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial f}{\partial u}(\mathrm{x}, u) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{35}$$

e valutandole nei punti $(\mathrm{x}_{eq,1}, u_{eq})$ e $(\mathrm{x}_{eq,2}, u_{eq})$, si ottengono le matrici dei sistemi linearizzati richieste. Si ha:

$$A_{lin,1} = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{x}_{eq,1}, u_{eq}) = \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_{lin,1} = \frac{\partial f}{\partial u}(\mathrm{x}_{eq,1}, u_{eq}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{lin,2} = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathrm{x}_{eq,2}, u_{eq}) = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_{lin,2} = \frac{\partial f}{\partial u}(\mathrm{x}_{eq,2}, u_{eq}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Per lo studio della stabilità dei punti di equilibrio, essendo il sistema a tempo continuo, si studia il *segno* della parte reale degli autovalori dei sistemi linearizzati. Il polinomio caratteristico della matrice $A_{lin,1}$ è:

$$p_1(\lambda) = (\lambda + \sqrt{2})(\lambda - 1) - \sqrt{2} = \lambda^2 + (\sqrt{2} - 1)\lambda - 2\sqrt{2} \tag{36}$$

Il polinomio $p_1(\lambda)$ ha coefficienti di segno discorde, e quindi ha almeno una radice con parte reale positiva. Il punto di equilibrio $(\mathrm{x}_{eq,1}, u_{eq})$ risulta *instabile*. Il polinomio caratteristico della matrice $A_{lin,2}$ è:

$$p_2(\lambda) = (\lambda - \sqrt{2})(\lambda - 1) + \sqrt{2} = \lambda^2 - (\sqrt{2} + 1)\lambda + 2\sqrt{2} \tag{37}$$

Il polinomio $p_2(\lambda)$ ha coefficienti di segno discorde, e quindi ha almeno una radice con parte reale positiva. Il punto di equilibrio $(\mathrm{x}_{eq,2}, u_{eq})$ risulta *instabile*.

Esercizio 4

Si consideri il sistema meccanico riportato in figura, dove M è la massa del carrello, k_1 e k_2 sono i coefficienti elastici delle molle, β è il coefficiente di attrito delle ruote con il terreno, e u è una forza esterna. La posizione del carrello è indicata con y. Le molle sono fissate a distanza L_1 e L_2, rispettivamente, dall'origine del sistema di riferimento.

1. Scrivere l'equazione dinamica del sistema. *Suggerimento.* L'allungamento della molla k_1 è $L_1 + y$, mentre l'allungamento della molla k_2 è $L_2 - y$. La forza di attrito è proporzionale alla velocità $\dot{y}$ del carrello.

2. Scrivere un modello del sistema nella forma di spazio di stato

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) + F \ ,$$

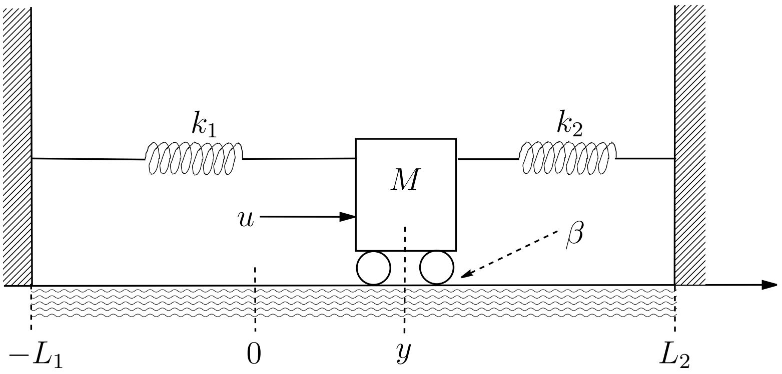
   dove $x(t) = [\ y(t)\ \dot{y}(t)\ ]^T$, e il vettore F tiene conto di eventuali termini di forzamento costanti.

3. E' il sistema asintoticamente stabile per tutti i valori k_1, k_2, β, $M > 0$?

Si considerino i seguenti valori per i parametri del sistema: $M = 2$ Kg, $k_1 = 3$ N/m, $k_2 = 7$ N/m, $\beta = 4$ Ns/m.

4. Elencare i modi del sistema.

5. Ponendo $u = k_1\,L_1 - k_2\,L_2$, determinare l'evoluzione $y(t)$ della posizione del carrello a partire dalla condizione iniziale $x_0 = [\ 1\ \ -1]^T$.



Soluzione

Domanda 1.

L'equazione dinamica del sistema è

$$\begin{aligned} M\ddot{y} &= -k_1(L_1+y)+k_2(L_2-y)-\beta\dot{y}+u \\ &= -(k_1+k_2)\,y-\beta\dot{y}+u+(k_2L_2-k_1L_1) \end{aligned}$$

Domanda 2.

Definendo

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

si ha

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = \dot{y} &= x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} &= -\frac{k_1+k_2}{M}\,y-\frac{\beta}{M}\,\dot{y}+\frac{1}{M}\,u+\frac{k_2L_2-k_1L_1}{M} \\ &= -\frac{k_1+k_2}{M}\,x_1-\frac{\beta}{M}\,x_2+\frac{1}{M}\,u+\frac{k_2L_2-k_1L_1}{M} \end{aligned}$$

da cui si ottiene un modello del sistema nella forma di spazio di stato

$$\dot{x}(t) = A\,x(t)+B\,u(t)+F$$

ponendo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k_1+k_2}{M} & -\dfrac{\beta}{M} \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M} \end{bmatrix} \quad , \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M}(k_2L_2-k_1L_1) \end{bmatrix}$$

Domanda 3.

Il polinomio caratteristico della matrice A è

$$p_A(\lambda) = \lambda^2+\frac{\beta}{M}\,\lambda+\frac{k_1+k_2}{M}$$

Dato che *condizione necessaria e sufficiente affinché un polinomio di secondo grado abbia tutte le radici con parte reale negativa, è che tutti i suoi coefficienti siano di segno concorde,* il sistema è asintoticamente stabile per tutti i valori k_1, k_2, β, $M > 0$.

Domanda 4.

Sostituendo i valori dei coefficienti, si ottiene

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

i cui autovalori sono $\lambda_1 = -1 + 2\jmath$ e $\lambda_2 = \lambda_1^* = -1 - 2\jmath$ (radici di $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 2\,\lambda + 5$).

Posto $\lambda_1 = \sigma + \jmath\omega$, con $\sigma = -1$ e $\omega = 2$, è noto *dalla teoria* che esiste un cambiamento di coordinate T tale che

$$\tilde{A} = T^{-1} A\, T = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Risultando

$$e^{\tilde{A}\,t} = \begin{bmatrix} e^{\sigma\,t}\cos(\omega\,t) & e^{\sigma\,t}\sin(\omega\,t) \\ -e^{\sigma\,t}\sin(\omega\,t) & e^{\sigma\,t}\cos(\omega\,t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}\cos(2\,t) & e^{-t}\sin(2\,t) \\ -e^{-t}\sin(2\,t) & e^{-t}\cos(2\,t) \end{bmatrix}$$

i modi del sistema sono $e^{-t}\cos(2\,t)$ e $e^{-t}\sin(2\,t)$.

Domanda 5.

Ponendo $u = k_1\, L_1 - k_2\, L_2$, l'equazione del sistema diventa

$$\dot{x}(t) = A\, x(t)$$

per cui l'evoluzione dello stato (con condizione iniziale x_0) è $x(t) = e^{A\,t}x_0$, e l'evoluzione $y(t)$ della posizione del carrello è

$$y(t) = C\, x(t) = C\, e^{A\,t}x_0$$

dove $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$.

La matrice $e^{A\,t}$ è calcolabile attraverso la relazione

$$e^{A\,t} = T\, e^{\tilde{A}t}\, T^{-1}$$

Per il calcolo della matrice di cambiamento di coordinate T, si procede calcolando un autovettore relativo all'autovalore λ_1, cioè un vettore $v \neq 0$ tale che $(A - \lambda_1\, I)v = 0$. Dato che le due righe della matrice

$$A - \lambda_1\, I = \begin{bmatrix} 1 - 2\jmath & 1 \\ -5 & -1 - 2\jmath \end{bmatrix}$$

sono linearmente dipendenti, consideriamo solo la prima equazione:

$$(1 - 2\jmath)v_1 + v_2 = 0$$

Posto arbitrariamente $v_1 = 1 + 2\jmath$, risulta $v_2 = -5$. Da cui

$$v = \begin{bmatrix} 1 + 2\jmath \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} + \jmath \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \triangleq w_1 + \jmath w_2$$

e

$$T = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad T^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

Infine

$$\begin{aligned} y(t) &= C\,e^{A\,t}x_0 = C\,T\,e^{\tilde{A}t}\,T^{-1}\,x_0 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} e^{\tilde{A}t} \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} \\ &= \frac{e^{-t}}{5} \begin{bmatrix} \cos(2\,t) - 2\,\sin(2\,t) & \sin(2\,t) + 2\,\cos(2\,t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= e^{-t}\cos(2\,t) \end{aligned}$$

Esercizio 5

Dato il sistema nonlineare a tempo discreto:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k)\left[x_2^2(k) - \alpha\right] + u^2(k) - 2 \\ x_2(k+1) = x_1(k) + x_2(k) + \dfrac{1}{4}\left(e^{x_2^2(k)-1} - 1\right) \end{cases} \quad , \qquad \alpha \in \mathbb{R},$$

1. Determinare i punti di equilibrio del sistema quando $u(k) = \sqrt{2}$, $\forall k$.
2. Discutere la stabilità di $x_{eq1} = [\ 0\ 1\ ]^T$ e $x_{eq2} = [\ 0\ \ -1\ ]^T$ al variare del parametro α, riportando le matrici A_{lin} e B_{lin} dei sistemi linearizzati.

Soluzione

Il sistema è nella forma

$$x(k+1) = f(x(k), u(k))$$

dove

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \quad , \quad f(x,u) = \begin{bmatrix} x_1\left(x_2^2 - \alpha\right) + u^2 - 2 \\ x_1 + x_2 + \dfrac{1}{4}\left(e^{x_2^2-1} - 1\right) \end{bmatrix}$$

Domanda 1.

Per determinare i punti di equilibrio del sistema quando $u(k) = \sqrt{2}$, si deve risolvere l'equazione

$$x = f(x,u)$$

cioè

$$\begin{cases} x_1 = x_1\left(x_2^2 - \alpha\right) + u^2 - 2 \\ x_2 = x_1 + x_2 + \dfrac{1}{4}\left(e^{x_2^2-1} - 1\right) \end{cases}$$

con $u \triangleq u_{eq} = \sqrt{2}$. Si ha dunque

$$\begin{cases} x_1\left(x_2^2 - 1 - \alpha\right) = 0 \\ x_1 + \dfrac{1}{4}\left(e^{x_2^2-1} - 1\right) = 0 \end{cases}$$

La prima equazione ha soluzioni $x_1 = 0$, e (se $\alpha \geq -1$) $x_2^2 = 1 + \alpha$.

Se $x_1 = 0$, la seconda equazione diventa

$$e^{x_2^2-1} - 1 = 0$$

che ha soluzione $x_2^2 - 1 = 0$, e quindi $x_2 = \pm 1$. Due punti di equilibrio del sistema sono

$$x_{eq1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad x_{eq2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Se $x_2^2 = 1 + \alpha$, la seconda equazione diventa

$$x_1 + \frac{1}{4}\,(e^{\alpha} - 1) = 0$$

che ha soluzione $x_1 = \dfrac{1}{4}\,(1 - e^{\alpha})$. Altri due punti di equilibrio del sistema sono dunque

$$x_{eq3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\,(1 - e^{\alpha}) \\ \sqrt{1+\alpha} \end{bmatrix} \quad , \quad x_{eq4} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}\,(1 - e^{\alpha}) \\ -\sqrt{1+\alpha} \end{bmatrix} \quad (\alpha \geq -1)$$

Domanda 2.

Calcolando le matrici

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,u) = \begin{bmatrix} x_2^2 - \alpha & 2x_1x_2 \\ 1 & 1 + \frac{1}{2}\,x_2\,e^{x_2^2-1} \end{bmatrix} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial u}(x,u) = \begin{bmatrix} 2u \\ 0 \end{bmatrix}$$

e valutandole in (x_{eq1}, u_{eq}) e (x_{eq2}, u_{eq}), si ottengono le matrici dei sistemi linearizzati richieste. Si ha

$$A_{lin1} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_{eq1}, u_{eq}) = \begin{bmatrix} 1-\alpha & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad , \quad B_{lin1} = \frac{\partial f}{\partial u}(x_{eq1}, u_{eq}) = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{lin2} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_{eq2}, u_{eq}) = \begin{bmatrix} 1-\alpha & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad , \quad B_{lin2} = \frac{\partial f}{\partial u}(x_{eq2}, u_{eq}) = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori della matrice A_{lin1} sono $1-\alpha$ e $\dfrac{3}{2}$. In particolare, dato che $\left|\dfrac{3}{2}\right| > 1$, si conclude che il punto di equilibrio x_{eq1} è sempre *instabile* al variare di α.
Gli autovalori della matrice A_{lin2} sono $1-\alpha$ e $\dfrac{1}{2}$. Dato che $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$, occorre discutere $|1-\alpha|$:

$$|1-\alpha| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < 1-\alpha < 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \alpha < 2$$

Si conclude che il punto di equilibrio x_{eq2} è *asintoticamente stabile* per $0 < \alpha < 2$, e *instabile* per $\alpha < 0$ e $\alpha > 2$. Se $\alpha = 0$ o $\alpha = 2$, non si può dire niente sulla stabilità di x_{eq2} utilizzando il metodo del sistema linearizzato.

Esercizio 6

Calcolare la risposta libera quando la condizione iniziale è $x_0 = [111]^{\mathrm{T}}$ per il sistema

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

Soluzione

Si deve calcolare

$$x(k) = A^k\, x_0$$

Per il calcolo di A^k, si procede trovando gli autovalori della matrice A. Il polinomio caratteristico della matrice A è

$$p_A(\lambda) \triangleq \det(\lambda\, I - A) = \lambda(\lambda - 2)^2$$

Gli autovalori di A sono dunque $\lambda_1 = 0$ con molteplicità algebrica $\nu_1 = 1$, e $\lambda_2 = 2$ con molteplicità algebrica $\nu_2 = 2$.

La matrice A è *diagonalizzabile* se e solo se, per ciascun autovalore λ_i, molteplicità algebrica ν_i e molteplicità geometrica μ_i coincidono. Si ricordi che la molteplicità geometrica di un autovalore λ_i è la dimensione di $\ker(A - \lambda_i\, I)$. Per l'autovalore λ_1, operando una riduzione a scala di Gauss-Jordan:

$$A - \lambda_1\, I = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

risulta $\mu_1 = n - \text{rango}(A - \lambda_1\, I) = 3 - 2 = 1$. Per il calcolo di una base di $\ker(A - \lambda_1\, I)$, si trova una soluzione v_1 non nulla del sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ -2\, x_2 + x_3 &= 0 \end{cases}$$

Posto arbitrariamente $x_3 = 2$, risulta $x_2 = 1$ e $x_1 = 1$. Da cui $v_1 = [\ 1\ 1\ 2\ ]^T$. Per l'autovalore λ_2, operando una riduzione a scala di Gauss-Jordan:

$$A - \lambda_2\, I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

risulta $\mu_2 = n - \text{rango}(A - \lambda_2\, I) = 3 - 1 = 2$. Per il calcolo di una base di $\ker(A - \lambda_2\, I)$, si trovano due soluzioni v_2 e v_3 linearmente indipendenti del sistema

$$x_1 - x_2 - x_3 = 0$$

Posto arbitrariamente $x_3 = 1$ e $x_2 = -1$, risulta $x_1 = 0$. Da cui $v_2 = [\ 0\ \ -1\ 1\ ]^T$. Inoltre, posto $x_3 = 0$ e $x_2 = 1$, risulta $x_1 = 1$. Da cui $v_3 = [\ 1\ 1\ 0\ ]^T$.

Dato che $\mu_1 = \nu_1$ e $\mu_2 = \nu_2$, la matrice A è diagonalizzabile. Una forma diagonale di A è

$$\Lambda = T^{-1} A\, T = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

dove

$$T = \left[\ v_1 \quad v_2 \quad v_3\ \right] = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad , \quad T^{-1} = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{ccc} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

La matrice A^k è ora calcolabile attraverso la relazione

$$A^k = T\, \Lambda^k\, T^{-1}$$

dove

$$\Lambda^k = \left[\begin{array}{c|cc} 0^k & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{array}\right] \qquad \textbf{Nota:} \quad 0^k = \begin{cases} 1 & \text{se } k = 0 \\ 0 & \text{se } k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Risulta

$$x(k) = A^k\, x_0 = T\, \Lambda^k\, T^{-1}\, x_0 = \frac{1}{2}\, T\, \Lambda^k \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right] = \frac{1}{2}\, T \left[\begin{array}{c} 0^k \\ 0 \\ 2^k \end{array}\right] = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{c} 0^k + 2^k \\ 0^k + 2^k \\ 2 \cdot 0^k \end{array}\right]$$

Esercizio 7

Sia dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1^2(t) + 2x_2^2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_2(t) - u(t) \end{cases}$$

determinare i punti di equilibrio quando $u(t) = 0$ e discutere la stabilità dei punti di equilibrio, riportando le matrici A_{lin} e B_{lin} del sistema linearizzato.

Soluzione

Il sistema è nella forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

dove

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad , \quad f(x, u) = \begin{bmatrix} x_1^2 + 2\,x_2^2 \\ x_1 + x_2 - u \end{bmatrix}$$

Per determinare i punti di equilibrio del sistema quando $u(t) = 0$, si risolve il sistema

$$0 = f(x, u)$$

cioè

$$\begin{cases} 0 = x_1^2 + 2\,x_2^2 \\ 0 = x_1 + x_2 - u \end{cases}$$

con $u \triangleq u_{eq} = 0$. Si ha dunque

$$\begin{cases} x_1^2 + 2\,x_2^2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione ha soluzione $x_2 = -x_1$. Sostituendo nella prima equazione:

$$x_1^2 + 2\,(-x_1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3\,x_1^2 = 0$$

che ha soluzione $x_1 = 0$, e quindi $x_2 = 0$. L'unico punto di equilibrio del sistema è

$$x_{eq} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calcolando le matrici

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, u) = \begin{bmatrix} 2\,x_1 & 4\,x_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e valutandole in (x_{eq}, u_{eq}), si ottengono le matrici del sistema linearizzato richieste. Si ha

$$A_{lin} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_{eq}, u_{eq}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B_{lin} = \frac{\partial f}{\partial u}(x_{eq}, u_{eq}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori della matrice A_{lin} sono 0 e 1. In particolare, dato che esiste un autovalore di A_{lin} con parte reale positiva, si conclude che il punto di equilibrio (x_{eq}, u_{eq}) è *instabile*.

Esercizio 8

Si consideri il sistema lineare a tempo continuo ($x \in \mathbb{R}^3$)

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} k & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3+k \\ 1 & 0 & k \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \triangleq A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} x(t) \triangleq C\,x(t)\end{aligned}$$

nel quale k è un parametro reale.

1. Studiare la stabilità e i modi propri del sistema al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.
2. Assumendo ingresso nullo, determinare per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ e per quali condizioni iniziali $x_0 = [\ \alpha\ \beta\ \gamma\ ]^T$ si hanno soluzioni periodiche (non identicamente nulle) in uscita.

Soluzione

Il polinomio caratteristico della matrice A è

$$p_A(\lambda) \triangleq \det(\lambda\,I - A) = (\lambda + 2)(\lambda^2 - 2\,k\,\lambda + k^2 + 1)$$

Gli autovalori del sistema sono dunque

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = k + \jmath \\ \lambda_3 = \lambda_2^* = k - \jmath \end{cases}$$

Dallo studio del segno della parte reale degli autovalori, risulta che il sistema è

- *asintoticamente stabile* se $k < 0$;
- *stabile* se $k = 0$;
- *instabile* se $k > 0$.

I modi propri del sistema sono $e^{-2\,t}$ (relativo all'autovalore reale λ_1), $e^{k\,t}\cos(t)$ e $e^{k\,t}\sin(t)$ (relativi agli autovalori complessi e coniugati λ_2 e λ_3).

Domanda 2.

Il sistema ha modi periodici se $k = 0$. Per tale valore di k risulta

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e gli autovalori del sistema sono

$$\begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = \jmath \\ \lambda_3 = \lambda_2^* = -\jmath \end{cases}$$

L'uscita $y(t)$ in funzione della generica condizione iniziale x_0 è data dall'espressione

$$y(t) = C\, e^{At}\, x_0 = C\,(T\, e^{\tilde{A}t}\, T^{-1})\, x_0 = (C\, T)\, e^{\tilde{A}t}\, (T^{-1}\, x_0)$$

Calcoliamo la matrice di cambio di coordinate T.

Per l'autovalore λ_1, operando una riduzione a scala di Gauss-Jordan:

$$A - \lambda_1\, I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

otteniamo il sistema omogeneo

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 &= 0 \\ x_3 &= 0 \end{aligned}$$

nelle incognite x_1, x_2 e x_3 (si osservi che x_2 non compare esplicitamente nelle equazioni), dal quale ponendo arbitrariamente $x_2 = 1$ si ottiene l'autovettore

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Per l'autovalore λ_2, operando una riduzione a scala di Gauss-Jordan:

$$A - \lambda_2\, I = \begin{bmatrix} -\jmath & 0 & -1 \\ -1 & -2-\jmath & 3 \\ 1 & 0 & -\jmath \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\jmath \\ 0 & -(2+\jmath) & 3-\jmath \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

otteniamo il sistema omogeneo

$$\begin{aligned} x_1 - \jmath\, x_3 &= 0 \\ -(2+\jmath)\, x_2 + (3-\jmath)\, x_3 &= 0 \end{aligned}$$

nelle incognite x_1, x_2 e x_3, dal quale ponendo arbitrariamente $x_3 = 2 + \jmath$ si ottiene $x_2 = 3 - \jmath$ e $x_1 = -1 + 2\jmath$, e infine l'autovettore

$$v_2 = \begin{bmatrix} -1+2\jmath \\ 3-\jmath \\ 2+\jmath \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}}_{v_2^{(1)}} + \jmath \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{v_2^{(2)}}$$

La matrice T è data da

$$T = \left[\begin{array}{c|cc} v_1 & v_2^{(1)} & v_2^{(2)} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

e ad essa corrisponde la matrice

$$\tilde{A} = T^{-1} A T = \left[\begin{array}{c|cc} -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

per la quale

$$e^{\tilde{A}t} = \left[\begin{array}{c|cc} e^{-2t} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos(t) & \sin(t) \\ 0 & -\sin(t) & \cos(t) \end{array}\right]$$

Inoltre

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Dunque

$$\begin{aligned}
y(t) &= (C\,T)\, e^{\tilde{A}t}\, (T^{-1}\, x_0) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|cc} e^{-2t} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos(t) & \sin(t) \\ 0 & -\sin(t) & \cos(t) \end{array}\right] \begin{bmatrix} \alpha + \beta - \gamma \\ -\frac{1}{5}\,\alpha + \frac{2}{5}\,\gamma \\ \frac{2}{5}\,\alpha + \frac{1}{5}\,\gamma \end{bmatrix} \\
&= \left(-\frac{1}{5}\,\alpha + \frac{2}{5}\,\gamma \right) [-3\cos(t) - \sin(t)] + \left(\frac{2}{5}\,\alpha + \frac{1}{5}\,\gamma \right) [-3\sin(t) + \cos(t)] \\
&= (\alpha - \gamma)\cos(t) - (\alpha + \gamma)\sin(t)
\end{aligned}$$

L'uscita $y(t)$ è periodica e non identicamente nulla a meno che

$$\begin{cases} \alpha - \gamma = 0 \\ \alpha + \gamma = 0\ , \end{cases}$$

cioè $\alpha = 0$ e $\gamma = 0$. Dunque il sistema ha soluzioni periodiche non identicamente nulle in uscita per $k = 0$ e per ogni condizione iniziale x_0 tale che $(\alpha, \gamma) \neq (0, 0)$.

Esercizio 9

Dato il sistema nonlineare a tempo discreto

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k)\ln x_2(k) + e^{u(k)} - 1 \\ x_2(k+1) = (1-e)\,x_1(k) + [x_2(k)-1][x_2(k) - \dfrac{1}{2}\,u^2(k) + \alpha] + x_2(k) \end{cases}$$

nel quale α è un parametro reale:

1. Determinare i punti di equilibrio del sistema quando $u(k) = 0$, $\forall k$.
2. Per ciascun punto di equilibrio determinato al punto 1, riportare le matrici A_{lin} e B_{lin} del corrispondente sistema linearizzato ($\tilde{x} \in \mathbb{R}^2$, $\tilde{u} \in \mathbb{R}$)

$$\tilde{x}(k+1) = A_{lin}\,\tilde{x}(k) + B_{lin}\,\tilde{u}(k)$$

3. Discutere la stabilità del punto di equilibrio $x_{eq1} = [\ 0\ 1\ ]^T$ al variare del parametro α; discutere inoltre la stabilità degli altri punti di equilibrio per $\alpha = -e$.

Soluzione

Domanda 1.

Il sistema è nella forma

$$x(k+1) = f(x(k), u(k))$$

dove

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \quad , \quad f(x,u) = \begin{bmatrix} x_1 \ln x_2 + e^u - 1 \\ (1-e)x_1 + (x_2-1)(x_2 - \dfrac{1}{2}\,u^2 + \alpha) + x_2 \end{bmatrix}$$

Si osservi innanzi tutto che, affinché il logaritmo sia definito, deve risultare $x_2 > 0$. Per determinare i punti di equilibrio del sistema quando $u(k) = 0$, si risolve il sistema

$$x = f(x,u)$$

cioè

$$\begin{cases} x_1 = x_1 \ln x_2 + e^u - 1 \\ x_2 = (1-e)x_1 + (x_2-1)(x_2 - \dfrac{1}{2}\,u^2 + \alpha) + x_2 \end{cases}$$

con $u \triangleq u_{eq} = 0$. Si ha dunque

$$\begin{cases} x_1(\ln x_2 - 1) = 0 \\ (e-1)x_1 = (x_2-1)(x_2+\alpha) \end{cases}$$

La prima equazione ha soluzioni $x_1 = 0$ e $x_2 = e$.

$\boxed{x_1 = 0}$

Sostituendo $x_1 = 0$ nella seconda equazione, si ha

$$(x_2 - 1)(x_2 + \alpha) = 0$$

che ha soluzioni $x_2 = 1$ e $x_2 = -\alpha$. Dato che deve essere $x_2 > 0$ affinché il logaritmo sia definito, la seconda soluzione esiste per $\alpha < 0$. I punti

$$x_{eq,1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad , \quad x_{eq,2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\alpha \end{bmatrix}$$

sono dunque punti di equilibrio del sistema.

$\boxed{x_2 = e}$

Sostituendo $x_e = e$ nella seconda equazione, si ha

$$(e - 1)x_1 = (e - 1)(e + \alpha)$$

che ha soluzione $x_1 = e + \alpha$. Il punto

$$x_{eq,3} = \begin{bmatrix} e + \alpha \\ e \end{bmatrix}$$

è dunque un punto di equilibrio del sistema.

Domanda 2.

Calcolando le matrici

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, u) = \begin{bmatrix} \ln x_2 & \dfrac{x_1}{x_2} \\ 1 - e & 2\,x_2 - \dfrac{1}{2}\,u^2 + \alpha \end{bmatrix} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial u}(x, u) = \begin{bmatrix} e^u \\ -(x_2 - 1)u \end{bmatrix}$$

e valutandole nei punti $(x_{eq,1}, u_{eq})$, $(x_{eq,2}, u_{eq})$ e $(x_{eq,3}, u_{eq})$, si ottengono le matrici dei sistemi linearizzati richieste. Si ha

$$A_{lin,1} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_{eq,1}, u_{eq}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 - e & 2 + \alpha \end{bmatrix} \quad , \quad B_{lin,1} = \frac{\partial f}{\partial u}(x_{eq,1}, u_{eq}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{lin,2} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_{eq,2}, u_{eq}) = \begin{bmatrix} \ln(-\alpha) & 0 \\ 1 - e & -\alpha \end{bmatrix} \quad , \quad B_{lin,2} = \frac{\partial f}{\partial u}(x_{eq,2}, u_{eq}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{lin,3} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_{eq,3}, u_{eq}) = \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{e + \alpha}{e} \\ 1 - e & 2\,e + \alpha \end{bmatrix} \quad , \quad B_{lin,3} = \frac{\partial f}{\partial u}(x_{eq,3}, u_{eq}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Domanda 3.

Essendo il sistema a tempo discreto, si studia il *modulo* degli autovalori dei sistemi linearizzati. Gli autovalori della matrice $A_{lin,1}$ sono 0 e $2+\alpha$. Occorre dunque studiare quando $|2+\alpha| < 1$. Si ha:

$$|2+\alpha| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < 2+\alpha < 1 \quad \Leftrightarrow \quad -3 < \alpha < -1$$

Segue che il punto di equilibrio $(x_{eq,1}, u_{eq})$ è *asintoticamente stabile* se $-3 < \alpha < -1$ (tutti gli autovalori di $A_{lin,1}$ hanno modulo < 1); *instabile* se $\alpha < -3$ o $\alpha > -1$ (esiste un autovalore di $A_{lin,1}$ con modulo > 1), mentre nulla si può dire se $\alpha = -3$ o $\alpha = -1$ (il sistema linearizzato è marginalmente stabile).

Per $\alpha = -e$, i punti di equilibrio $x_{eq,2}$ e $x_{eq,3}$ coincidono, infatti $x_{eq,2} = x_{eq,3} = [\ 0\ e\ ]^T$. Gli autovalori della matrice $A_{lin,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1-e & e \end{bmatrix}$ sono 1 e e. Esistendo un autovalore di $A_{lin,2}$ con modulo > 1, il punto di equilibrio $(x_{eq,2}, u_{eq})$ è *instabile*.

Esercizio 10

Si consideri il sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= -\frac{1}{2}x_1(k) + \frac{\alpha}{x_2(k)} + u(k) \\ x_2(k+1) &= x_1(k) - \frac{1}{2}x_2(k) \\ y(k) &= x_1(k) - x_2(k) \end{aligned}$$

nel quale $x(k) = [\ x_1(k)\ x_2(k)\ ]^T$ è lo stato, $u(k)$ è l'ingresso e $y(k)$ è l'uscita.

1. Assumendo $u(k) = 0$, $\forall\, k$, calcolare gli stati di equilibrio del sistema al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Discutere la stabilità dei punti di equilibrio calcolati al punto (1).
3. Assumendo $\alpha = 0$, calcolare la risposta libera del sistema nell'uscita $y(k)$, relativa allo stato iniziale $x_0 = [\ 0\ \ -1\ ]^T$.

Soluzione

Domanda 1.

Il sistema è nella forma

$$x(k+1) = f(x(k), u(k))$$

dove

$$x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \quad , \quad f(x,u) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x_1 + \frac{\alpha}{x_2} + u \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 \end{bmatrix}$$

Si osservi innanzi tutto che, affinché la funzione f sia definita, se $\alpha \neq 0$, deve risultare $x_2 \neq 0$. Inoltre, se $\alpha = 0$, il sistema è *lineare*. Per determinare i punti di equilibrio del sistema quando $u(k) = 0$, si risolve il sistema

$$\boxed{x = f(x,u)}$$

cioè

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{\alpha}{x_2} + u \\ x_2 = x_1 - \frac{1}{2}x_2 \end{cases}$$

con $u \triangleq u_{eq} = 0$. Si ha dunque

$$\begin{cases} \dfrac{3}{2}\,x_1 - \dfrac{\alpha}{x_2} = 0 \\ x_1 - \dfrac{3}{2}\,x_2 = 0 \end{cases}$$

Se $\alpha = 0$, dalla prima equazione si trova $x_1 = 0$, e quindi $x_2 = 0$ dalla seconda equazione. In questo caso $x_{eq} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ è dunque l'unico punto di equilibrio del sistema.

Se $\alpha \neq 0$, dalla seconda equazione si trova $x_1 = \dfrac{3}{2}\,x_2$, e sostituendo nella prima equazione $\dfrac{\alpha}{x_2} = \dfrac{9}{4}\,x_2$, da cui $\boxed{x_2^2 = \dfrac{4}{9}\,\alpha}$. Si hanno due casi:

- Se $\alpha < 0$, l'equazione non ha soluzione. Quindi il sistema non ha punti di equilibrio.
- Se $\alpha > 0$, l'equazione ha soluzioni $x_2 = \dfrac{2}{3}\,\sqrt{\alpha}$ e $x_2 = -\dfrac{2}{3}\,\sqrt{\alpha}$. Sostituendo in $x_1 = \dfrac{3}{2}\,x_2$, si trova che i punti

  $$x_{eq,1} = \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha} \\ \dfrac{2}{3}\,\sqrt{\alpha} \end{bmatrix} \quad , \quad x_{eq,2} = \begin{bmatrix} -\sqrt{\alpha} \\ -\dfrac{2}{3}\,\sqrt{\alpha} \end{bmatrix}$$

  sono i punti di equilibrio del sistema.

Ricapitolando:

- Se $\alpha < 0$, il sistema non ha punti di equilibrio.
- Se $\alpha = 0$, il sistema ha un unico punto di equilibrio x_{eq}.
- Se $\alpha > 0$, il sistema ha due punti di equilibrio $x_{eq,1}$ e $x_{eq,2}$.

<u>Domanda 2.</u>

Lo jacobiano di f rispetto a x risulta

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,u) = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{\alpha}{x_2^2} \\ 1 & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Se $\boxed{\alpha = 0}$, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_{eq},u_{eq}) = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$$

i cui autovalori sono $\lambda_1 = \lambda_2 = -\dfrac{1}{2}$. Dato che $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, 2$, il punto di equilibrio (x_{eq}, u_{eq}) è *asintoticamente stabile*.

Se $\boxed{\alpha > 0}$, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_{eq,1}, u_{eq}) = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} & -\dfrac{9}{4} \\ 1 & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$$

i cui autovalori sono $\lambda_1 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\jmath$ e $\lambda_2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}\jmath$. Dato che $|\lambda_i| > 1$, $i = 1, 2$, il punto di equilibrio $(x_{eq,1}, u_{eq})$ è *instabile*. L'analisi è identica per il punto di equilibrio $(x_{eq,2}, u_{eq})$.

<u>Domanda 3.</u>

Quando $\alpha = 0$, il sistema è *lineare*. Esso può essere scritto nella forma

$$\begin{aligned} x(k+1) &= \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\dfrac{1}{2} \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(k) \triangleq A\,x(k) + B\,u(k) \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} x(k) \triangleq C\,x(k) \end{aligned}$$

Dobbiamo calcolare la risposta libera $y(k) = C\,A^k\,x_0$.

La matrice A è in forma triangolare inferiore, e i suoi autovalori coincidono con gli elementi sulla diagonale. Risulta che la matrice A ha un solo autovalore $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ con molteplicità algebrica $\mu_1 = 2$. Calcoliamo la molteplicità geometrica ν_1.

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{rango}(A - \lambda_1 I) = 1$$

Da cui

$$\nu_1 = \dim(\ker(A - \lambda_1 I)) = n - \text{rango}(A - \lambda_1 I) = 2 - 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \nu_1 = 1 < 2 = \mu_1$$

La matrice A non è diagonalizzabile, ma solo jordanizzabile.

- <u>Autovettore v_1 relativo a λ_1</u>

  Dobbiamo determinare una soluzione non nulla v del sistema omogeneo $(A - \lambda_1 I)\mathrm{v} = 0$. Essendo

  $$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

  si ha

  $$\begin{aligned} 0 &= 0 \qquad \text{sempre verificata} \\ v_1 &= 0 \end{aligned}$$

Posto arbitrariamente $v_2 = 1$ (il sistema è in due incognite, anche se v_2 non compare nelle equazioni), abbiamo

$$\mathrm{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Autovettore generalizzato v_2 relativo a λ_1

  Dobbiamo determinare una soluzione v del sistema non omogeneo $(A - \lambda_1 \, I)\mathrm{v} = \mathrm{v}_1$. Si ha

  $$\begin{aligned} 0 &= 0 \qquad\qquad \text{sempre verificata} \\ v_1 &= 1 \end{aligned}$$

  Posto arbitrariamente $v_2 = 0$ (il sistema è in due incognite, anche se v_2 non compare nelle equazioni), abbiamo

  $$\mathrm{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matrice T si costruisce nel seguente modo:

$$T = \begin{bmatrix} \mathrm{v}_1 & \mathrm{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A essa corrisponde la matrice trasformata

$$\tilde{A} = T^{-1} \, A \, T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\tilde{A}^k = \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^k & k\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^k \end{bmatrix}$$

Per evitare di invertire T, il vettore $\mathrm{z}_0 = T^{-1}\mathrm{x}_0$ si ricava risolvendo il sistema lineare $T \, \mathrm{z}_0 = \mathrm{x}_0$. Si ha

$$\begin{aligned} z_2 &= 0 \\ z_1 &= -1 \end{aligned}$$

Quindi,

$$\mathrm{z}_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ritornando al calcolo di $y(k)$:

$$\begin{aligned} y(k) &= C \, A^k \, x_0 = (C \, T) \, \tilde{A}^k \, \mathrm{z}_0 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{2}\right)^k & k\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\left(-\frac{1}{2}\right)^k \\ 0 \end{bmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\right)^k \end{aligned}$$

Esercizio 11

Un sistema massa-molla-smorzatore è descritto dall'equazione differenziale

$$M\ddot{y}(t) + \beta\dot{y}(t) + Ky(t) = u(t)$$

nel quale $y(t)$ rappresenta la posizione della massa all'istante t e $u(t)$ è la forza esterna applicata alla massa. Il valore della massa è $M = 1$, mentre i valori della costante elastica K della molla e del coefficiente d'attrito β sono incogniti ($\beta \geq 0$, $K > 0$).

1. Determinare una rappresentazione di stato del sistema con ingresso $u(t)$ e uscita $y(t)$, e le corrispondenti matrici A, B, C e D.
2. Assumendo $\beta = 2$, studiare i modi propri del sistema al variare di $K > 0$.

Soluzione

Domanda 1.
L'equazione del sistema è ($M = 1$)

$$\ddot{y}(t) + \beta\dot{y}(t) + Ky(t) = u(t)$$

Definendo lo stato come

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{y} = -Ky - \beta\dot{y} + u = -Kx_1 - \beta x_2 + u \\ y &= x_1 \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K & -\beta \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \triangleq A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \triangleq C\,x(t) \quad (D = 0) \end{aligned}$$

Domanda 2.
Quando $\beta = 2$, il polinomio caratteristico della matrice A è $p_A(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + K$, per il quale $\Delta = 4(1 - K)$. Si distinguono *tre casi*:

- $\boxed{\Delta > 0\text{, cioè } 0 < K < 1}$

  La matrice A ha due autovalori reali distinti $\lambda_1 = -1 + \sqrt{1-K}$ e $\lambda_2 = -1 - \sqrt{1-K}$. I modi del sistema sono $e^{\lambda_1 t}$ e $e^{\lambda_2 t}$.

- $\boxed{\Delta = 0\text{, cioè } K = 1}$

  La matrice A ha un unico autovalore reale $\lambda_1 = -1$ con molteplicità algebrica 2 e molteplicità geometrica 1. I modi del sistema sono e^{-t} e $t\,e^{-t}$.

- $\boxed{\Delta < 0\text{, cioè } K > 1}$

  La matrice A ha una coppia di autovalori complessi e coniugati $\lambda_1 = -1 + \jmath\sqrt{K-1}$ e $\lambda_2 = -1 - \jmath\sqrt{K-1}$. I modi del sistema sono $e^{-t}\sin\left(\sqrt{K-1}\,t\right)$ e $e^{-t}\cos\left(\sqrt{K-1}\,t\right)$.

Si consideri il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{\underline{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{x}(t) \end{cases}$$

1. **Discutere la stabilità, la controllablità e l'osservabità;**
2. **Eseguire la decomposizione canonica di Kalman;**
3. **Determinare la risposta impulsiva del sistema.**

Per determinare la stabilità del sistema calcolo i poli del sistema. Per fare ciò, determino le soluzioni del polinomio caratteristico.

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$(\lambda - 1)^3 = 0$$

Ho 3 poli in 1. *Il sistema è quindi instabile.*

Per determinare la controllabilità del sistema calcolo la matrice $P \triangleq \begin{bmatrix} B \mid AB \mid A^2B \end{bmatrix}$ e studio il suo rango.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad A^2B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \operatorname{rank} P = 2$$

Il rango della matrice P è 2. *Il sistema quindi è non completamente controllabile.*

Per determinare l'osservabilità del sistema calcolo la matrice $Q \triangleq \begin{bmatrix} C \\ \hline CA \\ \hline CA^2 \end{bmatrix}$ e studio il suo rango.

$$CA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$CA^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \operatorname{rank} Q = 2$$

Il rango della matrice Q è 2. *Il sistema quindi è non completamente osservabile.*

Per eseguire la decomposizione canonica di Kalman devo innanzitutto determinare lo spazio degli stati raggiungibili e lo spazio degli stati non osservabili nonché i rispettivi spazi ortogonali.

Determino lo spazio degli stati raggiungibili X_R. Esso è costituito da una base della matrice P, cioé da un insieme di colonne linearmente indipendenti della matrice P.

$$X_R = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Determino lo spazio degli stati X_{NR} ortogonale a X_R.

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \\ \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 2a + b + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -b - c \\ -2b - 2c + b + c = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ b = -c \end{cases}$$

$$X_{NR} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Determino lo spazio degli stati non osservabili X_{NO}. Esso è generato da una base $\underline{\alpha} \neq 0$, $\underline{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ tale che $Q\underline{\alpha} = 0$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a + 2c = 0 \\ a + 3c = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$X_{NO} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determino lo spazio degli stati X_O ortogonale a X_{NO}.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$b = 0$$

$$X_O = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A questo punto è necessario determinare i seguenti insiemi:

- Insieme dei vettori controllabili e non osservabili $X_R \cap X_{NO}$

$$X_R \cap X_{NO} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \emptyset$$

- Insieme dei vettori controllabili e osservabili $X_R \cap (X_{NR} + X_0)$

$$X_R \cap (X_{NR} + X_0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cap \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Insieme dei vettori non controllabili e non osservabili $X_{NO} \cap (X_{NR} + X_0)$

$$X_{NO} \cap (X_{NR} + X_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cap \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Insieme dei vettori non controllabili e osservabili $X_{NR} \cap X_O$

$$X_{NR} \cap X_O = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \emptyset$$

La matrice di trasformazione è quindi

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Per potere determinare la forma canonica di Kalman del sistema iniziale consideriamo il cambiamento di base $\underline{x}(t) = T\underline{z}(t)$. Si ha

$$T\underline{\dot{z}}(t) = AT\underline{z}(t) + Bu(t)$$

$$\underline{\dot{z}}(t) = T^{-1}AT\underline{z}(t) + T^{-1}Bu(t)$$

$$y(t) = CT\underline{z}(t)$$

$$T^{-1} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}AT = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$CT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Il nuovo sistema è quindi

$$\begin{cases} \underline{\dot{z}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underline{z}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \underline{z}(t) \end{cases}$$

Ovviamente i poli del sistema non sono cambiati (i poli del sistema sono sempre invarianti rispetto a cambiamenti di base), come si può vedere dal seguente calcolo.

$$\begin{aligned}\det(\lambda I - A) &= \det\left(\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ -1 & \lambda-2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{bmatrix}\right) = \\ &= (\lambda-1)\big[\lambda(\lambda-2)+1\big] = (\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+1) = (\lambda-1)^3\end{aligned}$$

Il nuovo sistema può essere scritto nella seguente maniera

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{\underline{z}}_1(t)\\ \dot{\underline{z}}_2(t)\\ \dot{\underline{z}}_3(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\tilde{A}_{22} & 0\\ 0 & \tilde{A}_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{z}_1(t)\\ \underline{z}_2(t)\\ \underline{z}_3(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\tilde{B}_2\\ 0\end{bmatrix}u(t)\\ y(t) = \begin{bmatrix}\tilde{C}_2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{z}_1(t)\\ \underline{z}_2(t)\\ \underline{z}_3(t)\end{bmatrix}\end{cases}$$

dove $\tilde{A}_{22}$, $\tilde{A}_{33}$, $\tilde{B}_2$ e $\tilde{C}_2$ sono

$$\tilde{A}_{22} = \begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix} \qquad \tilde{A}_{33} = 1 \qquad \tilde{B}_2 = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} \qquad \tilde{C}_2 = \begin{bmatrix}2 & 3\end{bmatrix}$$

e dove $\underline{z}_1(t)$ e $\underline{z}_2(t)$ sono variabili di stato controllabili e osservabili mentre $\underline{z}_3(t)$ è una variabile di stato non controllabile e non osservabile.

La risposta all'impulso del sistema viene determinata attraverso il calcolo della funzione di trasferimento (considero il sistema iniziale).

$$(sI - A) = \begin{bmatrix}s-1 & 0 & -1\\ 0 & s-1 & 0\\ 0 & 0 & s-1\end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = (s-1)^3$$

$$\operatorname{adj}(sI - A) = \begin{bmatrix}(s-1)^2 & 0 & 0\\ 0 & (s-1)^2 & 0\\ s-1 & 0 & (s-1)^2\end{bmatrix}$$

$$\operatorname{adj}^{\mathrm{T}}(sI - A) = \begin{bmatrix}(s-1)^2 & 0 & s-1\\ 0 & (s-1)^2 & 0\\ 0 & 0 & (s-1)^2\end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\operatorname{adj}^{\mathrm{T}}(sI - A)}{\det(sI - A)} = \begin{bmatrix}\frac{1}{s-1} & 0 & \frac{1}{(s-1)^2}\\ 0 & \frac{1}{s-1} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{s-1}\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}C(sI - A)^{-1} &= \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{s-1} & 0 & \frac{1}{(s-1)^2}\\ 0 & \frac{1}{s-1} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{s-1}\end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix}\frac{1}{s-1} & 0 & \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s-1}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix}\frac{1}{s-1} & 0 & \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix} = \frac{2}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}$$

$$T(s) = \frac{2s-1}{(s-1)^2}$$

La risposta all'impulso è semplicemente l'antitrasformata della funzione di trasferimento.

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\big\{T(s)\big\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-1}{(s-1)^2}\right\}$$

Antitrasformo utilizzando il metodo della scomposizione in fratti semplici.

$$\frac{2s-1}{(s-1)^2} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2}$$

$$2s - 1 = As - A + B$$

$$\begin{cases} A = 2 \\ B - A = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 2 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s-1}{(s-1)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}\right\} = 2e^t + te^t$$

La risposta all'impulso è quindi

$$h(t) = 2e^t + te^t$$

Si consideri il seguente sistema:

$$\boldsymbol{\begin{cases} \underline{\dot{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}(t) \end{cases}}$$

1. **Discutere la stabilità, la controllabilità e l'osservabilità;**
2. **Effettuare la decomposizione canonica di Kalman;**
3. **Determinare la risposta impulsiva del sistema.**

Per discutere la stabilità del sistema si devono calcolare i poli del sistema. Determino quindi le soluzioni del polinomio caratteristico:

$$\det\big(\lambda I - A\big) = 0 \qquad \rightarrow \qquad \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$\lambda^2(\lambda+1) = 0$$

Ho un polo in -1 e un polo in 0 con molteplicità doppia. Non posso ancora concludere nulla sulla stabilità del sistema avendo un polo in 0 a molteplicità doppia che potrebbe rendermi il sistema sia semplicemente stabile che instabile (in ogni caso il sistema non potrà mai risultare asintoticamente stabile). Devo verificare la molteplicità del polo in 0 all'interno del polinomio minimo.

Vengono di seguito proposte due diverse metodologie per determinare la molteplicità del polo in 0 nel polinomio minimo.

1. Applico il teorema di Caley-Hamilton. Se la matrice A verifica il polinomio $\lambda(\lambda+1)$ (cioé se $A(A+I) = 0$), allora esso sarà il polinomio minimo. Altrimenti, la matrice A soddisferà per forza il polinomio $\lambda^2(\lambda+1)$ (cioé $A^2(A+I) = 0$), e il polinomio minimo sarà quindi proprio $\lambda^2(\lambda+1)$.

$$\begin{aligned} A(A+I) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0 \end{aligned}$$

Verifico che A soddisfi effettivamente il polinomio $\lambda^2(\lambda+1)$.

$$\begin{aligned} A^2(A+I) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Il polinomio minimo è quindi $\lambda^2(\lambda+1)$.

2. Determino il polinomio minimo come rapporto tra il polinomio caratteristico $\varphi(\lambda)$ e $\alpha(\lambda)$, definito come il massimo comune divisore di tutti i polinomi non nulli in $\text{adj}^T\big(\lambda I - A\big)$.

$$\text{adj}\big(\lambda I - A\big) = \begin{bmatrix} \lambda(\lambda+1) & \lambda & \lambda+1 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1) \end{bmatrix}$$

$$\text{adj}^T\big(\lambda I - A\big) = \begin{bmatrix} \lambda(\lambda+1) & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda^2 & 0 \\ \lambda+1 & 0 & \lambda(\lambda+1) \end{bmatrix}$$

E' evidente come sia

$$\alpha(\lambda) = 1$$

e quindi il polinomio minimo è

$$m(\lambda) = \frac{\varphi(\lambda)}{\alpha(\lambda)} = \frac{\lambda^2(\lambda+1)}{1} = \lambda^2(\lambda+1)$$

In ogni caso la molteplicità del polo in 0 nel polinomio minimo è 2 e quindi il sistema dato è instabile.

Per discutere la controllabilità del sistema, determino la matrice $P \triangleq \big[B \big| AB \big| A^2B\big]$ verificandone il suo rango.

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad A^2B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{rank}\big(P\big) = 2$$

Il sistema dato è non completamente controllabile.

Per discutere l'osservabilità del sistema, determino la matrice $Q \triangleq \begin{bmatrix} C \\ \hline CA \\ \hline CA^2 \end{bmatrix}$ verificandone il suo rango.

$$CA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad CA^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{rank}\big(P\big) = 1$$

Il sistema dato è non completamente osservabile.

Per effettuare la decomposizione canonica di Kalman, determino il sottospazio di raggiungibilità e il sottospazio di non osservabilità, nonché i sottospazi algebrici ortogonali ad essi. Tali sottospazi verranno utilizzati in seguito per determinare i vettori che compongono la matrice di trasformazione.

- Sottopazio di raggiungibilità X_R (costituito dalle colonne linearmente indipendenti della matrice P).

$$X_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Sottospazio algebrico X_{NR} (sottospazio ortogonale a X_R).

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \\ \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -b \\ c = 0 \end{cases}$$

$$X_{NR} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Sottospazio di non osservabilità X_{NO} (costituito da tutti i vettori $\gamma \neq 0$, $\gamma \in \mathbb{R}^3$, tali che $Q\gamma = 0$).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \rightarrow \gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X_{NO} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Sottospazio algebrico X_O (sottospazio ortogonale a X_{NO}).

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \\ \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$$X_O = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A questo punto si possono calcolare i vettori che costituiscono la matrice di trasformazione T. La matrice T è infatti costruita nel seguente modo:

$$T = [T_1 | T_2 | T_3 | T_4]$$

dove:

- T_1 è costruita con vettori base di $X_1 \triangleq X_R \cap X_{NO}$ (insieme dei vettori controllabili e non osservabili)
- T_2 è costruita con vettori base di $X_2 \triangleq X_R \cap \big(X_{NR} + X_O\big)$ (insieme dei vettori controllabili e osservabili)
- T_3 è costruita con vettori base di $X_3 \triangleq X_{NO} \cap \big(X_{NR} + X_O\big)$ (insieme dei vettori non controllabili e non osservabili)
- T_4 è costruita con vettori base di $X_4 \triangleq X_{NR} \cap X_O$ (insieme dei vettori non controllabili e osservabili)

Nel nostro caso:

$$X_1 \triangleq X_R \cap X_{NO} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$X_2 \triangleq X_R \cap \big(X_{NR} + X_O\big) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cap \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X_3 \triangleq X_{NO} \cap \big(X_{NR} + X_O\big) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cap \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$X_4 \triangleq X_{NR} \cap X_O = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \emptyset$$

e quindi la matrice di trasformazione è:

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice di trasformazione T è una matrice a rango pieno e quindi invertibile. La matrice inversa T^{-1} è calcolata nel seguente modo:

$$T^{-1} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pongo $\underline{x} = T\underline{z}$.

Il nuovo sistema che si ottiene, nelle variabili z_1, z_2 e z_3, sarà a blocchi, e in particolare assumerà la forma

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \dot{z}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{13} \\ 0 & \tilde{A}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{A}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & \tilde{C}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

con:

- z_1 variabile controllabile e non osservabile ($\tilde{A}_{11}$ matrice $[1 \times 1]$, $\tilde{B}_1$ vettore colonna $[1 \times 1]$);
- z_2 variabile controllabile e osservabile ($\tilde{A}_{22}$ matrice $[1 \times 1]$, $\tilde{B}_2$ vettore colonna $[1 \times 1]$, $\tilde{C}_2$ vettore riga $[1 \times 1]$);
- z_3 variabile non controllabile e non osservabile ($\tilde{A}_{33}$ matrice $[1 \times 1]$).

Tali valori sono compatibili con il valore del rango delle matrici P e Q precedentemente calcolate.

Effettuo il cambiamento di base.

$$\begin{cases} T\dot{\underline{z}}(t) = AT\underline{z}(t) + Bu(t) \\ y(t) = CT\underline{z}(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\underline{z}}(t) = T^{-1}AT\underline{z}(t) + T^{-1}Bu(t) \\ y(t) = CT\underline{z}(t) \end{cases}$$

$$T^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad CT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Il nuovo sistema è

$$\begin{cases} \underline{\dot{z}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \underline{z}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

Notare come la nuova matrice A sia in forma di Jordan. In tale matrice si riconoscono immediatamente i poli del sistema e la moltemplicità doppia del polo nell'origine. Inoltre, posso concludere immediatamente che:

- ho un polo in 0 controllabile e osservabile;
- ho un polo in 0 controllabile e non osservabile;
- ho un polo in -1 non controllabile e non osservabile;

Determino la risposta impulsiva del sistema originario attraverso il calcolo della funzione di trasferimento.

$$\big(sI - A\big)^{-1} = \frac{\operatorname{adj}^T \big(sI - A\big)}{\varphi(s)} = \frac{\begin{bmatrix} s(s+1) & 0 & 0 \\ s & s^2 & 0 \\ s+1 & 0 & s(s+1) \end{bmatrix}}{s^2(s+1)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 & 0 \\ \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s^2} & 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$$\big(sI - A\big)^{-1} B = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 & 0 \\ \frac{1}{s(s+1)} & \frac{1}{s+1} & 0 \\ \frac{1}{s^2} & 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s^2} \end{bmatrix}$$

$$C\big(sI - A\big)^{-1} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s} \\ \frac{1}{s^2} \end{bmatrix} = \frac{1}{s}$$

la risposta impulsiva è

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} = 1(t)$$