

MATERIALE DIDATTICO

- Docente

Vincenzo LIPPIELLO

Dipartimento di Informatica e Sistemistica – Università degli Studi di Napoli Federico II

Tel. 0817683635

lippiell@unina.it

<http://wpage.unina.it/lippiell>

- Libro di testo

B. Siciliano, L. Sciavicco, L. Villani e G. Oriolo, *Robotica: Modellistica, Pianificazione e Controllo*, III edizione, McGraw-Hill Libri Italia, 2008

- Lucidi proiettati a lezione

disponibili in formato pdf sul sito web del docente

- Si ringrazia il **Prof. Bruno Siciliano** per aver fornito il materiale necessario alla produzione dei lucidi

ROBOTICA

- Studio di macchine che possano sostituire l'uomo nell'esecuzione di un compito, sia in termini di attività fisica che decisionale
- Radici culturali
 - ★ mitologia
 - ★ automa
 - ★ robot (*robot* = lavoro esecutivo)
 - ★ letteratura fantascientifica: le 3 leggi fondamentali (Asimov)

-
- Robotica definita come scienza che studia la *connessione intelligente tra percezione e azione*
 - ★ sistema meccanico (locomozione + manipolazione)
 - ★ sistema sensoriale (sensori propriocettivi ed eterocettivi)
 - ★ sistema di governo

 - Robotica avanzata
 - ★ spiccate caratteristiche di autonomia: applicazioni in ambiente ostile + applicazioni di servizio
 - ★ ancora in età infantile

 - Robotica industriale
 - ★ progettazione, governo e applicazioni dei robot in ambito industriale
 - ★ tecnologia matura

- L'automazione è una tecnologia il cui obiettivo è quello di sostituire la macchina all'uomo in un processo di produzione, non solo per quanto riguarda l'esecuzione delle operazioni materiali, ma anche per ciò che concerne l'elaborazione intelligente delle informazioni sullo stato del processo.
 - ★ automazione *rigida* (produzione in serie di grossi volumi di manufatti di caratteristiche costanti)
 - ★ automazione *programmabile* (produzione di piccoli e medi lotti di manufatti di caratteristiche variabili)
 - ★ automazione *flessibile* (produzione di lotti variabili di manufatti diversi)

- Robot industriale
 - ★ macchina con elevate caratteristiche di versatilità e flessibilità
 - ★ *un robot è una struttura meccanica multifunzionale e riprogrammabile progettato per spostare materiali, parti, utensili o dispositivi specializzati secondo movimenti variabili programmati per l'esecuzione di una varietà di compiti diversi* (Robot Institute of America, 1980)
 - ★ componente tipico di sistemi di automazione programmabile

ROBOT INDUSTRIALE

- Componenti:

- ★ una struttura meccanica o *manipolatore* che consiste in un insieme di corpi rigidi (*bracci*) interconnessi tra di loro per mezzo di articolazioni (*giunti*); nel manipolatore si individuano una *struttura portante*, che ne assicura mobilità, un *polso*, che conferisce destrezza, e un *organo terminale* che esegue il compito per cui il robot è utilizzato
- ★ *attuatori* che imprimono il movimento al manipolatore attraverso l'azionamento dei giunti; si impiegano usualmente motori elettrici, idraulici e talvolta pneumatici
- ★ *sensori* che misurano lo stato del manipolatore (sensori propriocettivi) ed eventualmente lo stato dell'ambiente (sensori eterocettivi)
- ★ una *unità di governo* (calcolatore) con funzioni di controllo e supervisione dei movimenti del manipolatore

CAPACITÀ DI IMPIEGO

- Trasporto
 - ★ palettizzazione
 - ★ carico e scarico di magazzini e macchine operatrici/utensili
 - ★ selezione e smistamento di parti

- Manipolazione (lavorazione/assemblaggio)
 - ★ saldatura, verniciatura, incollaggio
 - ★ fresatura, trapanatura, avvitatura, taglio laser/getto d'acqua
 - ★ assemblaggio di gruppi meccanici/elettrici, montaggio di schede elettroniche, cablaggio

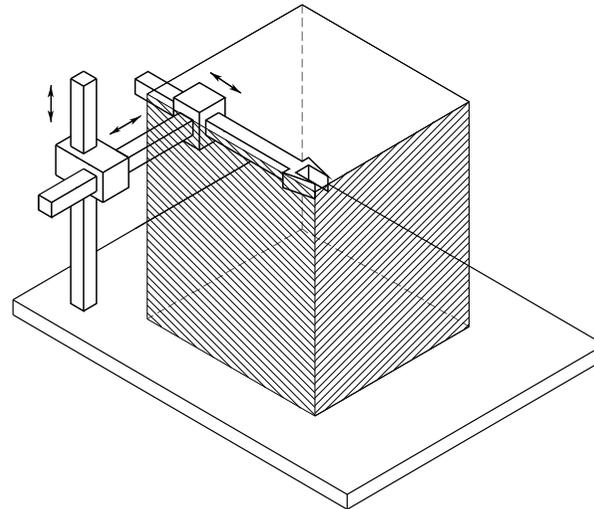
- Misura
 - ★ collaudo dimensionale, rilevamento di profili, individuazione di difetti di fabbricazione

STRUTTURA DEI MANIPOLATORI

- Struttura meccanica a *catena cinematica aperta* o a *catena cinematica chiusa*
- Gradi di mobilità (giunti *prismatici* o *rotoidali*)
- Gradi di libertà (descrizione di un compito)
- Spazio di lavoro (porzione dell'ambiente circostante a cui può accedere l'organo terminale)

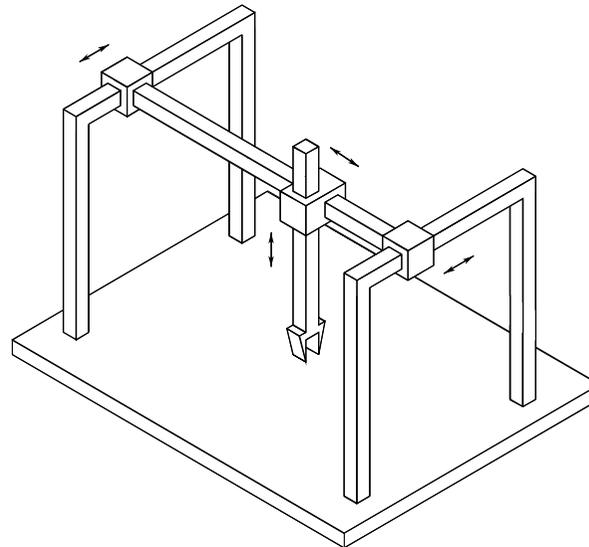
Manipolatore cartesiano

- Tre giunti prismatici: ad ogni grado di mobilità corrisponde un grado di libertà



- ★ ottime caratteristiche di rigidità meccanica, precisione di posizionamento del polso costante nello spazio di lavoro, operazioni di trasporto e assemblaggio, azionamenti elettrici (talvolta pneumatici)

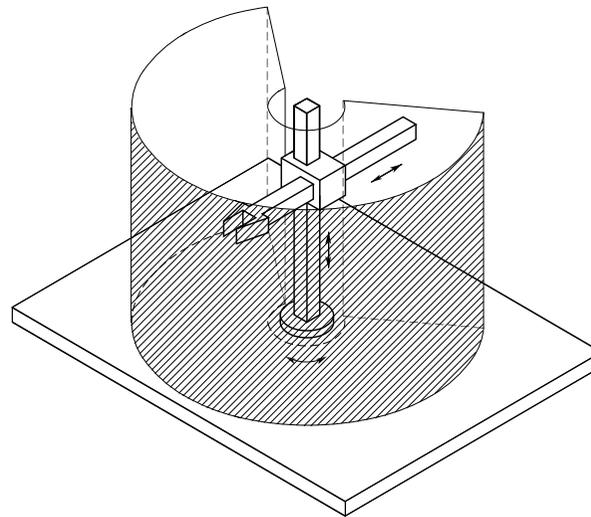
Manipolatore a portale



- manipolazione di oggetti di dimensione e peso rilevanti

Manipolatore cilindrico

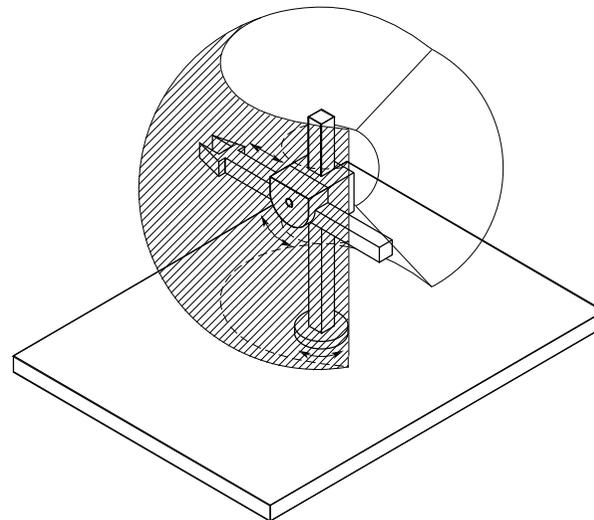
- Un giunto rotoidale e due prismatici: ad ogni grado di mobilità corrisponde un grado di libertà (in coordinate cilindriche)



- ★ buone caratteristiche di rigidità meccanica, la precisione di posizionamento del polso si riduce al crescere dello sbraccio orizzontale, operazioni di trasporto di oggetti anche di peso rilevante, azionamenti idraulici (o elettrici)

Manipolatore sferico

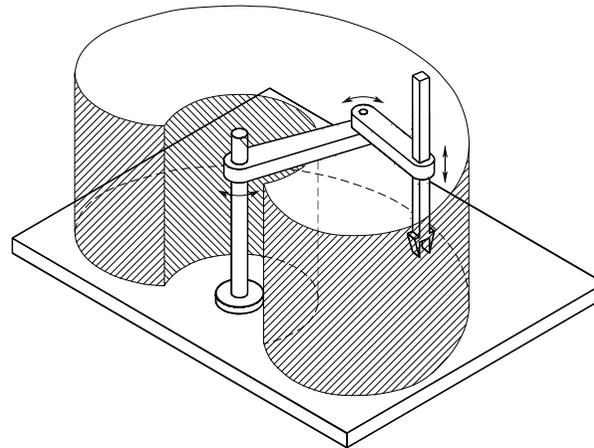
- Due giunti rotoidali e uno prismatico: ad ogni grado di mobilità corrisponde un grado di libertà (in coordinate sferiche)



- ★ discrete caratteristiche di rigidità meccanica, la precisione di posizionamento del polso si riduce al crescere dello sbraccio radiale, operazioni di lavorazione, azionamenti elettrici

Manipolatore SCARA (*Selective Compliance Assembly Robot Arm*)

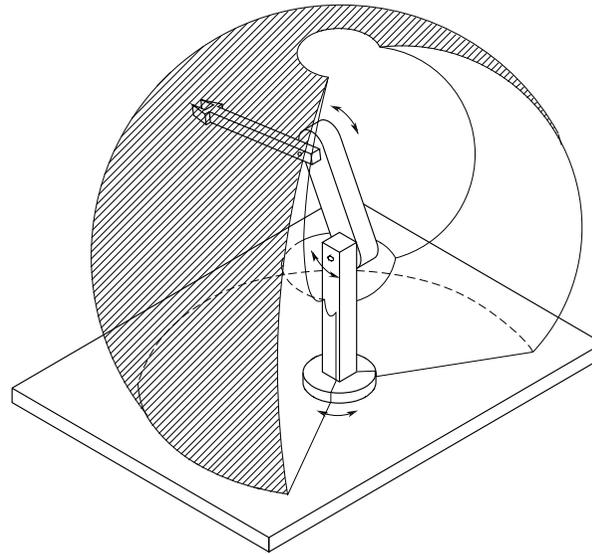
- Due giunti rotoidali e uno prismatico



- ★ elevata rigidezza a carichi verticali e cedevolezza a carichi orizzontali, la precisione di posizionamento del polso si riduce al crescere della distanza del polso stesso dall'asse del primo giunto, manipolazione di piccoli oggetti, azionamenti elettrici

Manipolatore antropomorfo

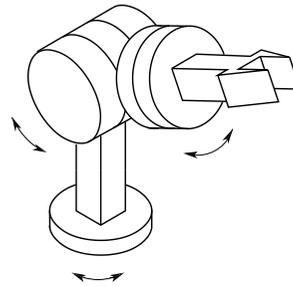
- Tre giunti rotoidali: spalla e gomito (che connette braccio e avambraccio)



- ★ struttura più destra
- ★ precisione di posizionamento variabile, applicazioni molteplici, azionamenti elettrici

Polso sferico

- Tre giunti rotoidali: determinano l'orientamento dell'organo terminale



- ★ caratteristiche di compattezza e destrezza, disaccoppiamento tra posizione e orientamento

Organo terminale

- Specificato in relazione al compito che il robot deve eseguire
 - ★ pinza (trasporto), utensile o dispositivo specializzato (lavorazione e assemblaggio)

MODELLISTICA E CONTROLLO DI MANIPOLATORI

- Modellistica
 - ★ struttura meccanica (cinematica + cinematica differenziale + statica + dinamica)
 - ★ attuatori
 - ★ sensori

- Controllo
 - ★ pianificazione del moto
 - ★ controllo nello spazio libero
 - ★ controllo nello spazio vincolato
 - ★ unità di governo

Cinematica

- Relazioni tra posizioni dei giunti e posizione e orientamento dell'organo terminale

Cinematica differenziale

- Relazioni tra velocità dei giunti e velocità (lineare e angolare) dell'organo terminale

Statica

- Relazioni tra forze e coppie applicate ai giunti e forze e momenti applicati all'organo terminale in situazioni di equilibrio

Dinamica

- Equazioni del moto del manipolatore in funzione delle forze e momenti agenti su di esso

Pianificazione di traiettorie

- Generazione delle leggi di moto per le variabili di interesse (giunti/organo terminale)

Attuatori e sensori

- Attuazione del moto, Misura di variabili di interesse

Controllo del moto

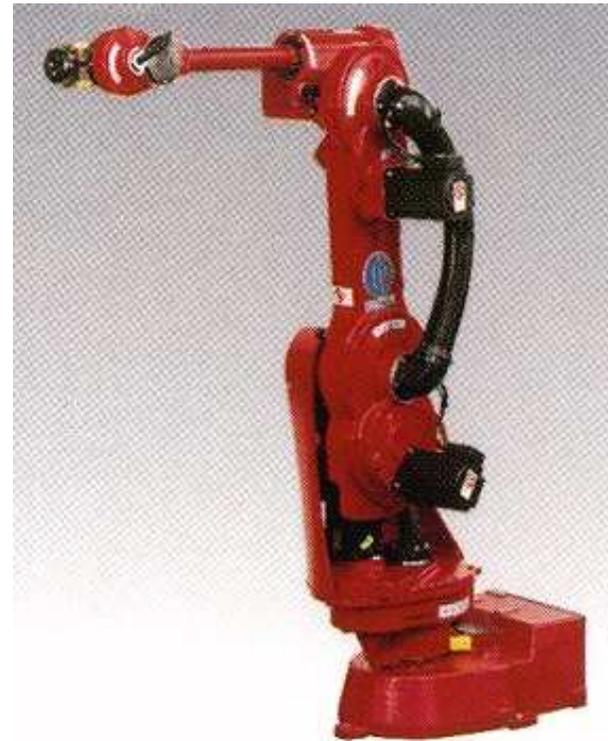
- Determinazione delle forze/coppie agli attuatori per garantire l'esecuzione delle traiettorie di riferimento

Controllo dell'interazione

- Gestione del contatto tra organo terminale e ambiente

Unità di governo

- Implementazione delle leggi di controllo, Interfaccia con operatore







CINEMATICA

- Relazioni tra posizioni dei giunti e posizione e orientamento dell'organo terminale

Matrice di rotazione

Rappresentazioni minime dell'orientamento

Trasformazioni omogenee

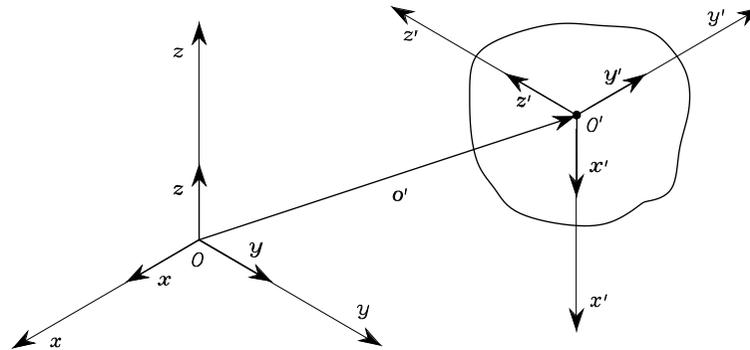
Cinematica diretta

Spazio dei giunti e spazio operativo

Calibrazione cinematica

Problema cinematico inverso

POSIZIONE E ORIENTAMENTO DI UN CORPO RIGIDO



- Terna di riferimento $\Sigma : O - xyz$ e Terna solidale al corpo $\Sigma' : O - x'y'z'$
- Posizione (vettore posizione dell'origine) + Orientamento (versori: coseni direttori)

$$\mathbf{o}' = o'_x \mathbf{x} + o'_y \mathbf{y} + o'_z \mathbf{z} = \begin{bmatrix} o'_x \\ o'_y \\ o'_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}' &= x'_x \mathbf{x} + x'_y \mathbf{y} + x'_z \mathbf{z} & x'_x &= \mathbf{x}'^T \mathbf{x} \dots \\
 \mathbf{y}' &= y'_x \mathbf{x} + y'_y \mathbf{y} + y'_z \mathbf{z} & y'_x &= \mathbf{y}'^T \mathbf{x} \dots \\
 \mathbf{z}' &= z'_x \mathbf{x} + z'_y \mathbf{y} + z'_z \mathbf{z} & z'_x &= \mathbf{z}'^T \mathbf{x} \dots
 \end{aligned}$$

- \mathbf{o}' vettore applicato (modulo, direzione e punto di applicazione)

MATRICE DI ROTAZIONE

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}' & \mathbf{y}' & \mathbf{z}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_x & y'_x & z'_x \\ x'_y & y'_y & z'_y \\ x'_z & y'_z & z'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}'^T \mathbf{x} & \mathbf{y}'^T \mathbf{x} & \mathbf{z}'^T \mathbf{x} \\ \mathbf{x}'^T \mathbf{y} & \mathbf{y}'^T \mathbf{y} & \mathbf{z}'^T \mathbf{y} \\ \mathbf{x}'^T \mathbf{z} & \mathbf{y}'^T \mathbf{z} & \mathbf{z}'^T \mathbf{z} \end{bmatrix}$$

- Matrice ortogonale: 6 vincoli

- ★ ortogonalità (3): $\mathbf{x}'^T \mathbf{y}' = 0$, $\mathbf{x}'^T \mathbf{z}' = 0$, $\mathbf{y}'^T \mathbf{z}' = 0$

- ★ norma unitaria (3): $\mathbf{x}'^T \mathbf{x}' = 1$, $\mathbf{y}'^T \mathbf{y}' = 1$, $\mathbf{z}'^T \mathbf{z}' = 1$

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I}$$

$$\Downarrow$$

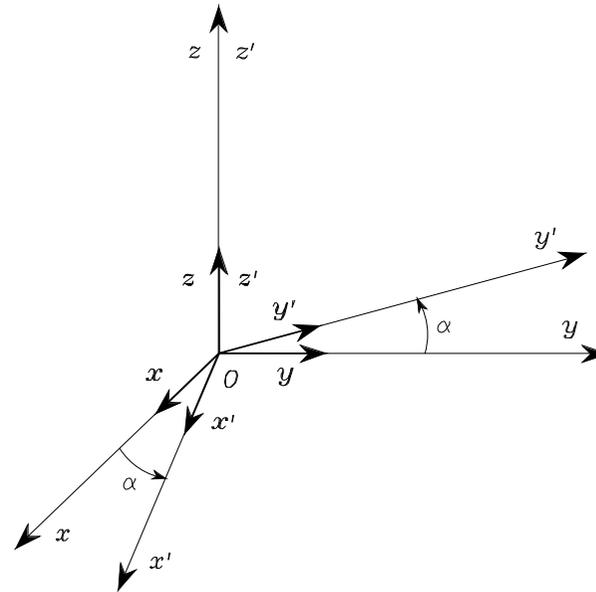
$$\mathbf{R}^T = \mathbf{R}^{-1}$$

- ★ $\det(\mathbf{R}) = \pm 1$: terna levogira/destrogiro

- ★ $\mathbf{R} \in SO(m)$ gruppo speciale ortonormale delle matrici reali ($m \times m$) con colonne ortonormali e determinante unitario

Rotazioni elementari

- Rotazione di α intorno a z (positiva in senso antiorario)



$$\mathbf{R}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Rotazione di β intorno a y

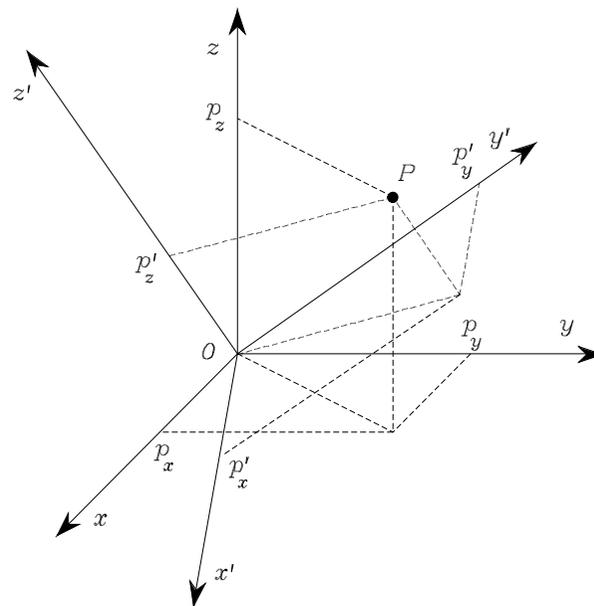
$$\mathbf{R}_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

- Rotazione di γ intorno a x

$$\mathbf{R}_x(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}$$

- Vale $\mathbf{R}_k(-\vartheta) = \mathbf{R}_k^T(\vartheta)$, con $k = x, y, z$
- Prima interpretazione di \mathbf{R} come operatore di rotazione $\Sigma \rightarrow \Sigma'$: \mathbf{R} esprime l'operazione di rotazione che bisogna compiere intorno ad un asse dello spazio per sovrapporre gli assi della terna di riferimento, Σ , agli assi omologhi della terna solidale al corpo, Σ'

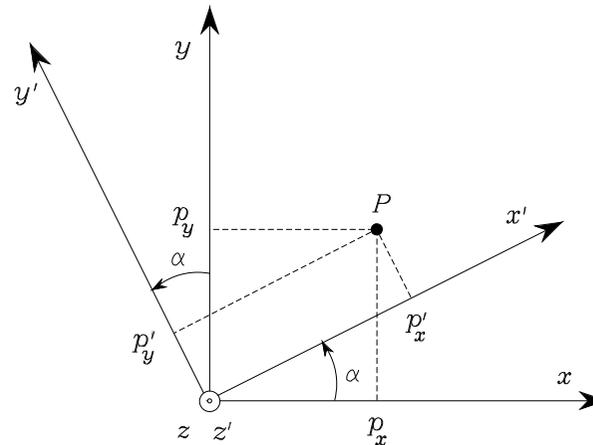
Rappresentazione di un vettore



Terna solidale e terna di riferimento con origine comune ($o' = o$)

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \\ \mathbf{p}' = \begin{bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{bmatrix} \end{array} \right\} \mathbf{p} = p'_x \mathbf{x}' + p'_y \mathbf{y}' + p'_z \mathbf{z}' \Rightarrow \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}' & \mathbf{y}' & \mathbf{z}' \end{bmatrix} \mathbf{p}' \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{p} = \mathbf{R} \mathbf{p}' \\ \mathbf{p}' = \mathbf{R}^T \mathbf{p} \end{cases}$$

- Esempio



$$\begin{aligned}
 p_x &= p'_x \cos \alpha - p'_y \sin \alpha \\
 p_y &= p'_x \sin \alpha + p'_y \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p} = \mathbf{R}_z(\alpha) \mathbf{p}' \\
 p_z &= p'_z
 \end{aligned}$$

- Seconda interpretazione di \mathbf{R} come *matrice di trasformazione delle coordinate di un vettore espresse nella terna Σ' nelle coordinate dello stesso vettore espresse nella terna Σ*

Rotazione di un vettore

- p' e $p = Rp'$ vettori espressi nella stessa terna di riferimento
- Il vettore p , espresso nella terna Σ , ha norma pari a quella di p' e risulta ruotato rispetto a p' secondo la matrice R

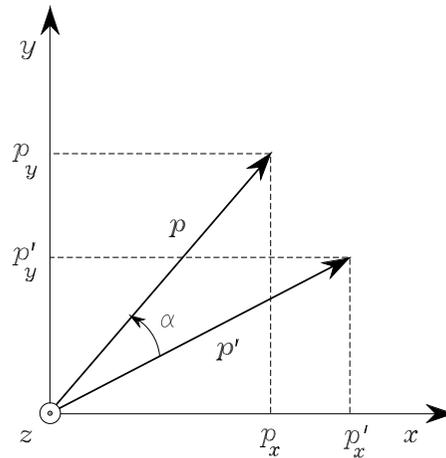
Infatti se

$$p = Rp'$$

si ha

$$p^T p = p'^T R^T R p' = p'^T p'$$

- Esempio



$$p_x = p'_x \cos \alpha - p'_y \sin \alpha$$

$$p_y = p'_x \sin \alpha + p'_y \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p} = \mathbf{R}_z(\alpha)\mathbf{p}'$$

$$p_z = p'_z$$

- Terza interpretazione di \mathbf{R} come *operatore matriciale di rotazione di un vettore di un angolo prefissato intorno ad un generico asse di rotazione nello spazio*

- Significati della matrice di rotazione

Fornisce l'orientamento di una terna di coordinate rispetto ad un'altra: i vettori colonna sono i coseni direttori degli assi della terna ruotata rispetto alla terna di partenza

Rappresenta una trasformazione di coordinate che mette in relazione le coordinate di uno stesso punto in due terne differenti (di origine comune)

È l'operatore che consente di ruotare un vettore in una stessa terna di coordinate

COMPOSIZIONE DI MATRICI DI ROTAZIONE

- Tre terne di riferimento con origine comune: $\Sigma_0 : O-x_0, y_0, z_0$, $\Sigma_1 : O-x_1, y_1, z_1$, $\Sigma_2 : O-x_2, y_2, z_2$
- Stesso vettore espresso nelle tre terne

$$\mathbf{p}^1 = \mathbf{R}_2^1 \mathbf{p}^2, \quad \mathbf{p}^0 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{p}^1, \quad \mathbf{p}^0 = \mathbf{R}_2^0 \mathbf{p}^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R}_2^0 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{R}_2^1$$

dove \mathbf{R}_i^j é la matrice di rotazione di Σ_i rispetto a Σ_j , ovvero che descrive la rotazione $\Sigma_j \rightarrow \Sigma_i$

$$\mathbf{R}_i^j = (\mathbf{R}_j^i)^{-1} = (\mathbf{R}_j^i)^T$$

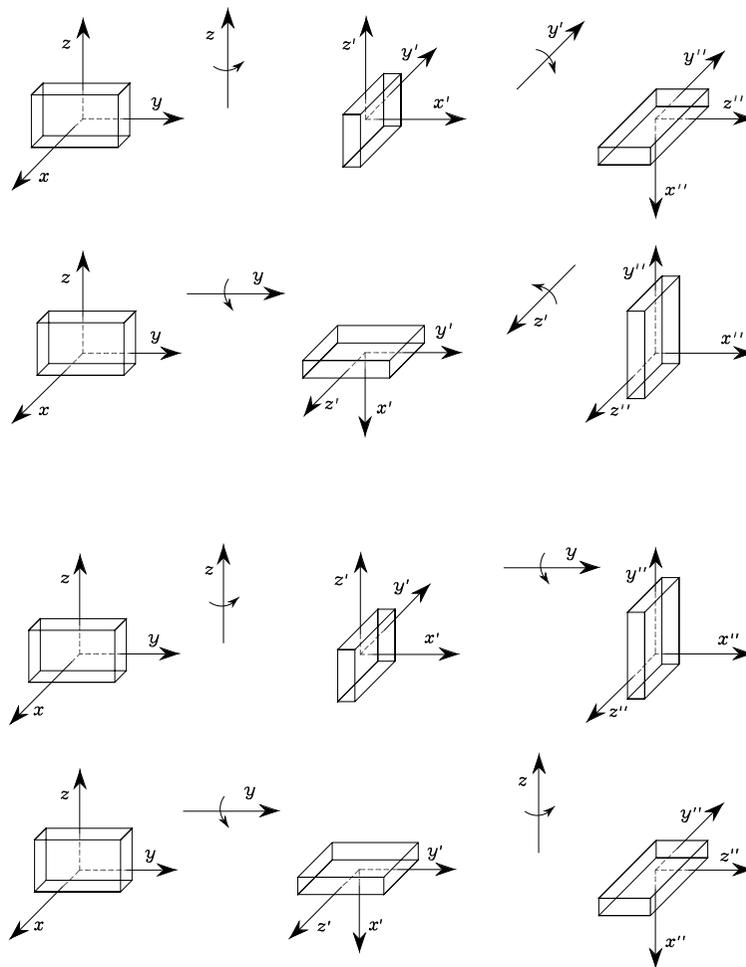
Rotazione in *terna corrente* (moltiplicazione da sx a dx)

$$\Sigma_0 \xrightarrow{\mathbf{R}_1^0} \Sigma_1 \xrightarrow{\mathbf{R}_2^1} \Sigma_2 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{R}_2^0 = \mathbf{R}_1^0 \mathbf{R}_2^1$$

Rotazione in *terna fissa* (moltiplicazione da dx a sx)

$$\Sigma_0 \xrightarrow{\mathbf{R}_1^0} \Sigma_1 \xrightarrow{\mathbf{R}_0^1} \Sigma_0 \xrightarrow{\bar{\mathbf{R}}_2^1} \bar{\Sigma}_2 \xrightarrow{\mathbf{R}_1^0} \Sigma_2 \quad \longrightarrow \quad \bar{\mathbf{R}}_2^0 = \bar{\mathbf{R}}_2^1 \mathbf{R}_1^0$$

- Esempio (rotazioni ZY e YZ): rotazioni in terna fissa e mobile, non commutatività delle rotazioni

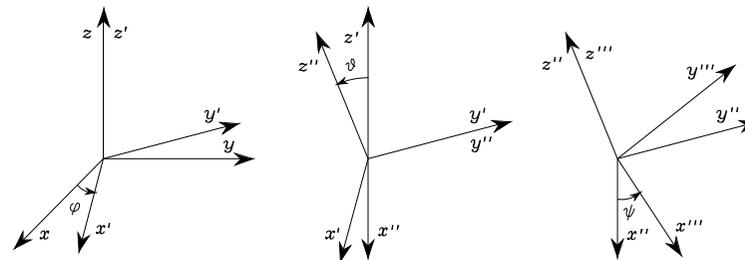


RAPPRESENTAZIONI MINIME DELL'ORIENTAMENTO

- Rappresentazioni dell'orientamento
 - ★ Matrice di rotazione: 9 parametri con 6 vincoli \Rightarrow solo 3 sono indipendenti
 - ★ Asse/angolo: 4 parametri con 1 vincolo \Rightarrow solo 3 sono indipendenti
- Rappresentazioni in termini di 3 angoli che rappresentano
 - ★ 3 rotazioni elementari intorno ad assi coordinati
 - ★ 12 sequenze possibili (escludendo rotazioni successive intorno ad assi paralleli)

Angoli di Eulero (ZYZ)

- Rotazione ZYZ in terna corrente



$$\mathbf{R}_{ZYZ} = \mathbf{R}_z(\varphi) \mathbf{R}_{y'}(\vartheta) \mathbf{R}_{z''}(\psi)$$

$$= \begin{bmatrix} c_\varphi c_\vartheta c_\psi - s_\varphi s_\psi & -c_\varphi c_\vartheta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\vartheta \\ s_\varphi c_\vartheta c_\psi + c_\varphi s_\psi & -s_\varphi c_\vartheta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\vartheta \\ -s_\vartheta c_\psi & s_\vartheta s_\psi & c_\vartheta \end{bmatrix}$$

- Se $\vartheta = 0, \pi$: rotazioni intorno ad assi paralleli \Rightarrow la rappresentazione degenera

- Problema inverso

$$\text{Assegnata } \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

i 3 angoli di Eulero sono (segno $\sqrt{\quad}$):

per $\vartheta \in (0, \pi)$

$$\varphi = \text{Atan2}(r_{23}, r_{13})$$

$$\vartheta = \text{Atan2}\left(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}\right)$$

$$\psi = \text{Atan2}(r_{32}, -r_{31})$$

per $\vartheta \in (-\pi, 0)$

$$\varphi = \text{Atan2}(-r_{23}, -r_{13})$$

$$\vartheta = \text{Atan2}\left(-\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}\right)$$

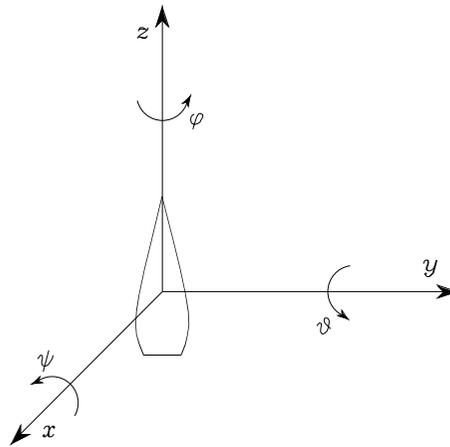
$$\psi = \text{Atan2}(-r_{32}, r_{31})$$

- Per $\vartheta = 0, \pi$ le soluzioni degenerano, in quanto è possibile solo determinare $\varphi \pm \psi$:

Singularità di rappresentazione

Angoli di RPY (ZYX)

- Rotazione ZYX in terna corrente (o XYZ in terna fissa)



$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{\text{RPY}} &= \mathbf{R}_z(\varphi) \mathbf{R}_y(\vartheta) \mathbf{R}_x(\psi) \\
 &= \begin{bmatrix} c_\varphi c_\vartheta & c_\varphi s_\vartheta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\vartheta c_\psi + s_\varphi s_\psi \\ s_\varphi c_\vartheta & s_\varphi s_\vartheta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\vartheta c_\psi - c_\varphi s_\psi \\ -s_\vartheta & c_\vartheta s_\psi & c_\vartheta c_\psi \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

- Se $\vartheta = \pm\pi/2$: rotazioni intorno ad assi paralleli \Rightarrow la rappresentazione degenera

- Problema inverso

$$\text{Assegnata } \mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

i 3 angoli di RPY sono (segno $\sqrt{\quad}$):

per $\vartheta \in (-\pi/2, \pi/2)$

$$\varphi = \text{Atan2}(r_{21}, r_{11})$$

$$\vartheta = \text{Atan2}\left(-r_{31}, \sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}\right)$$

$$\psi = \text{Atan2}(r_{32}, r_{33})$$

per $\vartheta \in (\pi/2, 3\pi/2)$

$$\varphi = \text{Atan2}(-r_{21}, -r_{11})$$

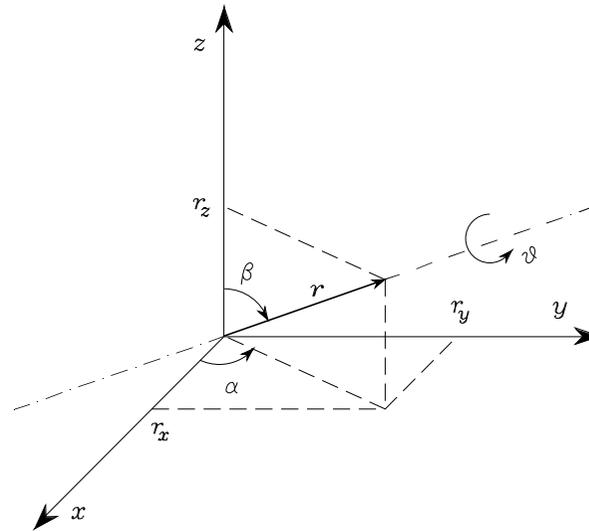
$$\vartheta = \text{Atan2}\left(-r_{31}, -\sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}\right)$$

$$\psi = \text{Atan2}(-r_{32}, -r_{33})$$

- Per $\vartheta = \pm\pi/2$ le soluzioni degenerano, in quanto è possibile solo determinare $\varphi \pm \psi$:

Singularità di rappresentazione

ROTAZIONE INTORNO A UN ASSE ARBITRARIO



- Rappresentazione a 4 parametri (ϑ e $\mathbf{r} = [r_x \ r_y \ r_z]^T$)

$$\mathbf{R}(\vartheta, \mathbf{r}) = \mathbf{R}_z(\alpha) \mathbf{R}_y(\beta) \mathbf{R}_z(\vartheta) \mathbf{R}_y(-\beta) \mathbf{R}_z(-\alpha)$$

$$\sin \alpha = \frac{r_y}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}} \quad \cos \alpha = \frac{r_x}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}} \quad \sin \beta = \frac{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}} \quad \cos \beta = \frac{r_z}{\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}}$$

- Espressione esplicita

$$\mathbf{R}(\vartheta, \mathbf{r}) = \begin{bmatrix} r_x^2(1 - c_\vartheta) + c_\vartheta & r_x r_y(1 - c_\vartheta) - r_z s_\vartheta & r_x r_z(1 - c_\vartheta) + r_y s_\vartheta \\ r_x r_y(1 - c_\vartheta) + r_z s_\vartheta & r_y^2(1 - c_\vartheta) + c_\vartheta & r_y r_z(1 - c_\vartheta) - r_x s_\vartheta \\ r_x r_z(1 - c_\vartheta) - r_y s_\vartheta & r_y r_z(1 - c_\vartheta) + r_x s_\vartheta & r_z^2(1 - c_\vartheta) + c_\vartheta \end{bmatrix}$$

- La rappresentazione non è univoca poichè

$$\mathbf{R}(\vartheta, \mathbf{r}) = \mathbf{R}(-\vartheta, -\mathbf{r})$$

- Problema inverso

Assegnata $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$

l'angolo e l'asse equivalente sono (per $\sin \vartheta \neq 0$):

somma elementi diagonale: $\vartheta = \cos^{-1} \left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2} \right)$

differenze elementi fuori diagonale: $\mathbf{r} = \frac{1}{2 \sin \vartheta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$

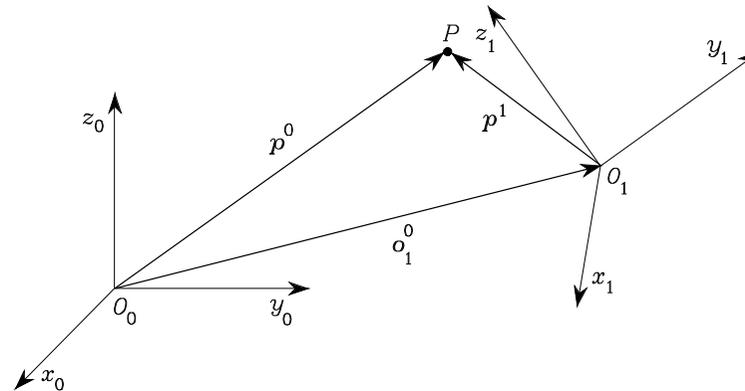
componenti del versore dell'asse vincolate: $r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = 1$

soluzione per $\sin \vartheta = 0$:

$$\vartheta = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases} \quad \text{formule ricavabili dall'espressione di } \mathbf{R}$$

$$\vartheta = 0 \quad \text{asse non definito (singolarità della rappresentazione)}$$

TRASFORMAZIONI OMOGENEE



- Trasformazione di coordinate (*traslazione + rotazione*)

$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{o}_1^0 + \mathbf{R}_1^0 \mathbf{p}^1$$

- Trasformazione inversa ($\mathbf{R}_0^1 = (\mathbf{R}_1^0)^T$)

$$\mathbf{p}^1 = -\mathbf{R}_0^1 \mathbf{o}_1^0 + \mathbf{R}_0^1 \mathbf{p}^0$$

- Rappresentazione omogenea

$$\tilde{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Matrice di trasformazione omogenea

$$\mathbf{A}_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^0 & \mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

- Trasformazione di coordinate

$$\tilde{\mathbf{p}}^0 = \mathbf{A}_1^0 \tilde{\mathbf{p}}^1$$

- Trasformazione inversa

$$\tilde{\mathbf{p}}^1 = \mathbf{A}_0^1 \tilde{\mathbf{p}}^0 = (\mathbf{A}_1^0)^{-1} \tilde{\mathbf{p}}^0$$

ove

$$\mathbf{A}_0^1 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_0^1 & -\mathbf{R}_0^1 \mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

Si noti che

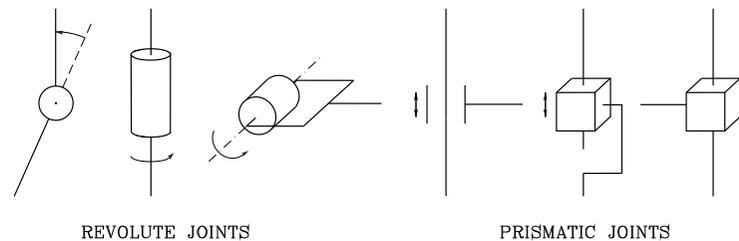
$$\mathbf{A}^{-1} \neq \mathbf{A}^T \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \text{ non è ortogonale}$$

- Successione di trasformazioni

$$\tilde{\mathbf{p}}^0 = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \dots \mathbf{A}_n^{n-1} \tilde{\mathbf{p}}^n$$

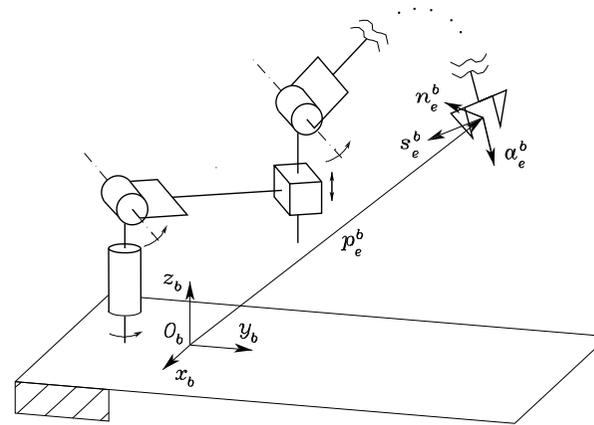
CINEMATICA DIRETTA

- Catena cinematica aperta
 - ★ base → sequenza bracci → organo terminale
 - ★ sequenza di *bracci* connessi tramite *giunti*
 - ★ *variabile di giunto* q_i = grado di mobilità
 - ★ giunti *rotoidali* e *prismatici*



- Problema della cinematica diretta: *determinare posizione+orientamento dell'organo terminale in funzione delle variabili di giunto*

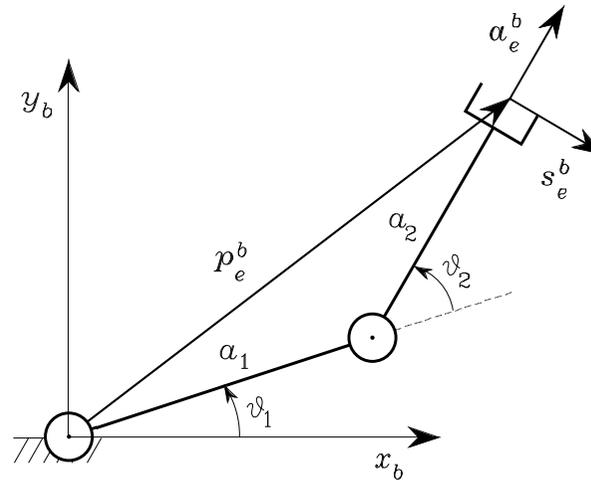
Manipolatore



- Terne $\left\{ \begin{array}{l} \textit{Terna base} \\ \textit{Terna utensile: versori } \mathbf{n}_e \text{ (normale), } \mathbf{s}_e \text{ (sliding) e } \mathbf{a}_e \text{ (approach)} \end{array} \right.$
- Equazione cinematica diretta

$$\mathbf{T}_e^b(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_e^b(\mathbf{q}) & \mathbf{s}_e^b(\mathbf{q}) & \mathbf{a}_e^b(\mathbf{q}) & \mathbf{p}_e^b(\mathbf{q}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

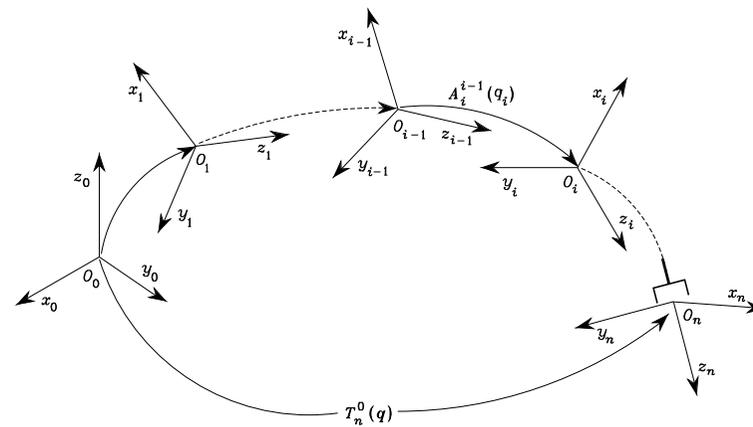
Manipolatore planare a due bracci



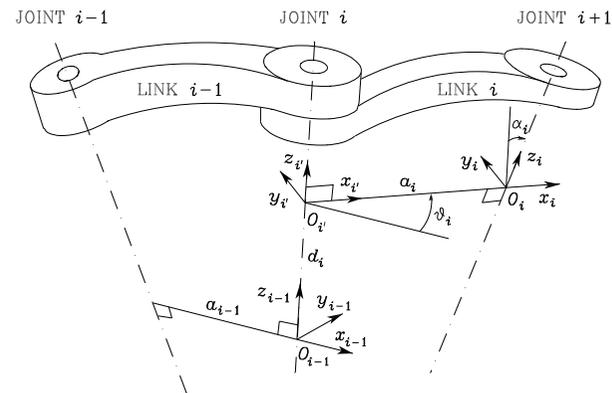
$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_e^b(\mathbf{q}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{n}_e^b & \mathbf{s}_e^b & \mathbf{a}_e^b & \mathbf{p}_e^b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & s_{12} & c_{12} & a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ 0 & -c_{12} & s_{12} & a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

CONVENZIONE DI DENAVIT-HARTENBERG

- Manipolatore ad n giunti. Successione di $n + 1$ terne solidali ai bracci ($\Sigma_0 \dots \Sigma_n$)
 - ★ Σ_0 : fissata alla base, Σ_b : terna base, Σ_e : terna utensile



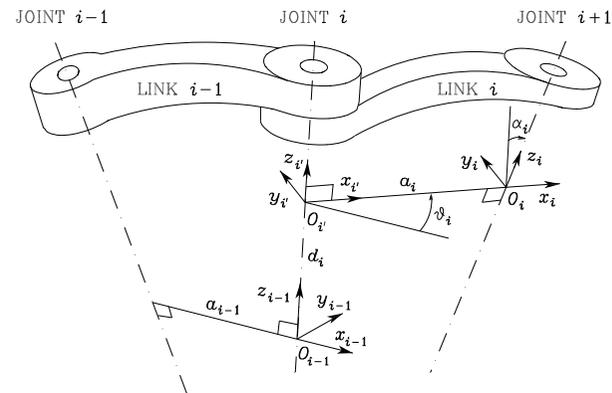
- Terne fissate
 - ★ in modo arbitrario
 - ★ secondo procedure sistematiche



- si sceglie l'asse z_i giacente lungo l'asse del giunto $i + 1$
- si individua O_i all'intersezione dell'asse z_i con la normale comune agli assi z_{i-1} e z_i , e con O'_i si indica l'intersezione della normale comune con z_{i-1}
- si assume l'asse x_i diretto lungo la normale comune agli assi z_{i-1} e z_i con verso positivo dal giunto i al giunto $i + 1$
- si sceglie l'asse y_i in modo da completare una terna levogira

- Definizione non univoca della terna:
 - ★ con riferimento alla terna 0, per la quale la sola direzione dell'asse z_0 risulta specificata: si possono quindi scegliere arbitrariamente O_0 ed x_0
 - ★ con riferimento alla terna n , per la quale il solo asse x_n risulta soggetto a vincolo (deve essere normale all'asse z_{n-1}): infatti non vi è giunto $n+1$, per cui non è definito z_n e lo si può scegliere arbitrariamente
 - ★ quando due assi consecutivi sono paralleli, in quanto la normale comune tra di essi non è univocamente definita
 - ★ quando due assi consecutivi si intersecano, in quanto il verso di x_i è arbitrario
 - ★ quando il giunto i è prismatico, nel qual caso la sola direzione dell'asse z_{i-1} è determinata

Parametri di Denavit-Hartenberg



a_i distanza di O_i da O'_i ;

d_i coordinata su z_{i-1} di O'_i ;

α_i angolo intorno all'asse x_i tra l'asse z_{i-1} e l'asse z_i valutato positivo in senso antiorario;

ϑ_i angolo intorno all'asse z_{i-1} tra l'asse x_{i-1} e l'asse x_i valutato positivo in senso antiorario.

a_i e α_i sono sempre costanti

se il giunto è *rotoidale* la variabile è ϑ_i

se il giunto è *prismatico* la variabile è d_i

- Trasformazione di coordinate

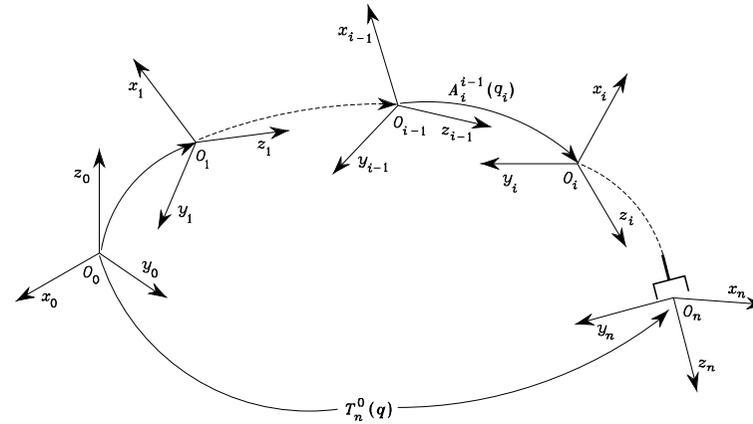
$$\Sigma_{i-1} \rightarrow \Sigma_{i'} \equiv \begin{array}{l} \text{rotazione di } \vartheta_i \text{ intorno a } z_{i-1} \\ \text{traslazione di } d_i \text{ lungo } z_{i-1} \end{array} \Rightarrow \mathbf{A}_{i'}^{i-1} = \begin{bmatrix} c_{\vartheta_i} & -s_{\vartheta_i} & 0 & 0 \\ s_{\vartheta_i} & c_{\vartheta_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{i'} \rightarrow \Sigma_i \equiv \begin{array}{l} \text{rotazione di } \alpha_i \text{ intorno a } x_{i'} \\ \text{traslazione di } a_i \text{ lungo } x_{i'} \end{array} \Rightarrow \mathbf{A}_i^{i'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & c_{\alpha_i} & -s_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_i^{i-1}(q_i) = \mathbf{A}_{i'}^{i-1} \mathbf{A}_i^{i'} = \begin{bmatrix} c_{\vartheta_i} & -s_{\vartheta_i} c_{\alpha_i} & s_{\vartheta_i} s_{\alpha_i} & a_i c_{\vartheta_i} \\ s_{\vartheta_i} & c_{\vartheta_i} c_{\alpha_i} & -c_{\vartheta_i} s_{\alpha_i} & a_i s_{\vartheta_i} \\ 0 & s_{\alpha_i} & c_{\alpha_i} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$q_i = \begin{cases} d_i & \text{prismatico} \\ \vartheta_i & \text{rotoidale} \end{cases}$$

- Composizione di trasformazioni



$$T_n^0(\mathbf{q}) = A_1^0(q_1) A_2^1(q_2) \dots A_n^{n-1}(q_n)$$

$$\Downarrow$$

$$T_b^e(\mathbf{q}) = T_0^b T_n^0(\mathbf{q}) T_e^n$$

Procedura operativa

1. Individuare e numerare consecutivamente gli assi dei giunti; assegnare, rispettivamente, le direzioni agli assi z_0, \dots, z_{n-1}
2. Fissare la terna base posizionandone l'origine sull'asse z_0 ; gli assi x_0 e y_0 sono scelti in maniera tale da ottenere una terna levogira

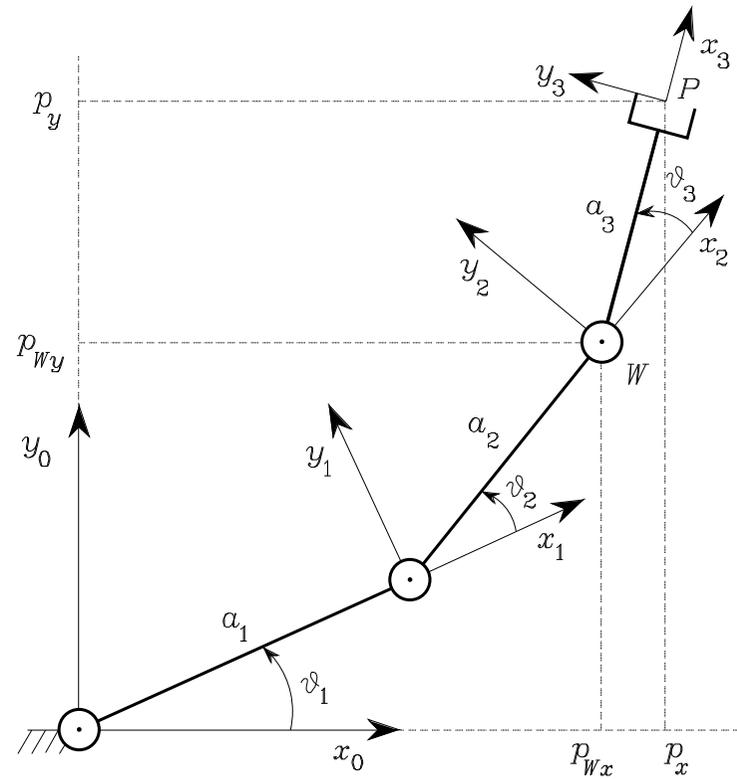
Eeguire i passi da **3** a **5** per $i = 1, \dots, n - 1$:

3. Individuare l'origine O_i all'intersezione di z_i con la normale comune agli assi z_{i-1} e z_i . Se gli assi z_{i-1} e z_i sono paralleli e il giunto i è rotoidale, posizionare O_i in modo da annullare d_i ; se il giunto i è prismatico, scegliere O_i in corrispondenza di una posizione di riferimento per la corsa del giunto (ad esempio un fine-corsa)
4. Fissare l'asse x_i diretto lungo la normale comune agli assi z_{i-1} e z_i con verso positivo dal giunto i al giunto $i + 1$
5. Fissare l'asse y_i in modo da ottenere una terna levogira

Per completare:

6. Fissare la terna n scegliendo l'asse x_n perpendicolare all'asse z_{n-1} ; se il giunto n è di rotazione, allineare z_n lungo la direzione di z_{n-1}
7. Costruire per $i = 1, \dots, n$ la tabella dei parametri $a_i, d_i, \alpha_i, \vartheta_i$
8. Calcolare sulla base dei parametri di cui al punto 7 le matrici di trasformazione omogenea $\mathbf{A}_i^{i-1}(q_i)$ per $i = 1, \dots, n$
9. Calcolare la funzione cinematica diretta $\mathbf{T}_n^0(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_1^0 \dots \mathbf{A}_n^{n-1}$ che fornisce posizione e orientamento della terna n rispetto alla terna base
10. Calcolare $\mathbf{T}_b^e(\mathbf{q}) = \mathbf{T}_0^b \mathbf{T}_n^0(\mathbf{q}) \mathbf{T}_e^n$

Manipolatore planare a tre bracci



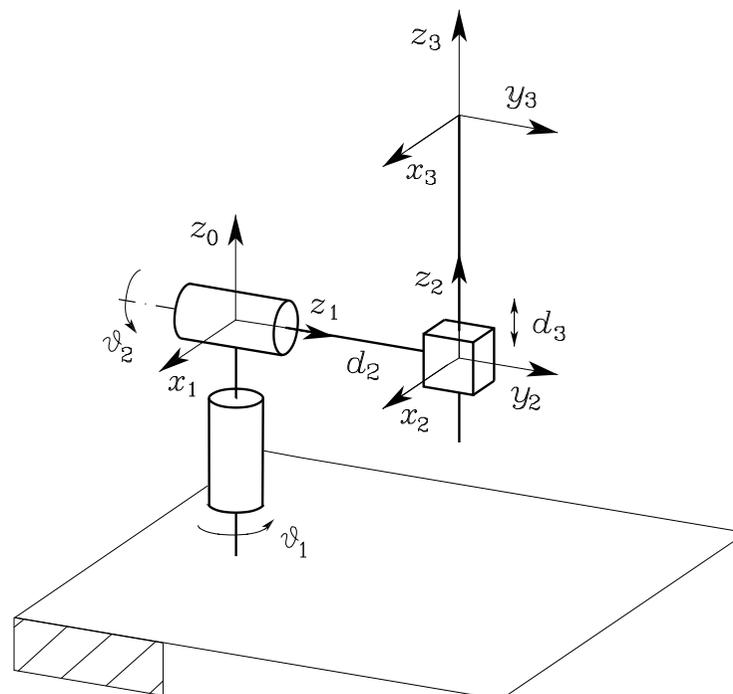
Braccio	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
1	a_1	0	0	ϑ_1
2	a_2	0	0	ϑ_2
3	a_3	0	0	ϑ_3

$$\mathbf{A}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 & a_i c_i \\ s_i & c_i & 0 & a_i s_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, 3$$

$$\mathbf{T}_3^0 = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2$$

$$= \begin{bmatrix} c_{123} & -s_{123} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ s_{123} & c_{123} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Manipolatore sferico



Braccio	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
1	0	$-\pi/2$	0	ϑ_1
2	0	$\pi/2$	d_2	ϑ_2
3	0	0	d_3	0

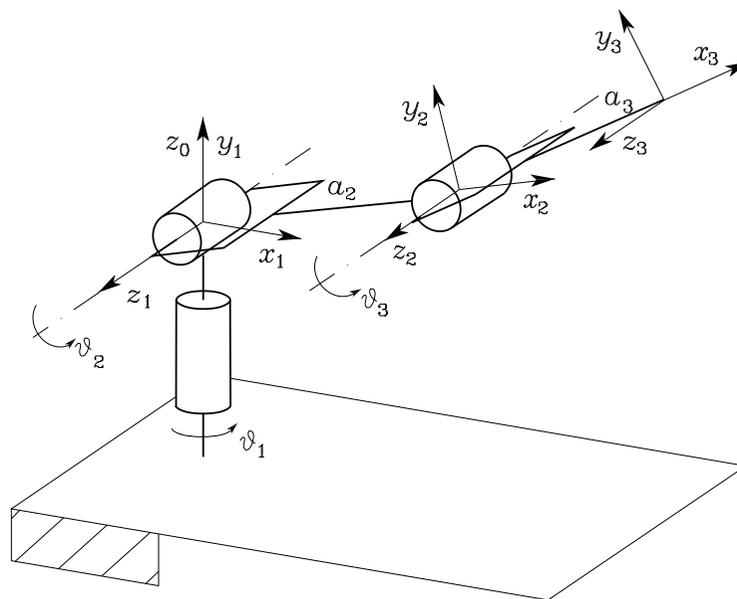
$$\mathbf{A}_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_2^1 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_3^0 = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 c_2 & -s_1 & c_1 s_2 & c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 \\ s_1 c_2 & c_1 & s_1 s_2 & s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 \\ -s_2 & 0 & c_2 & c_2 d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Manipolatore antropomorfo



Braccio	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
1	0	$\pi/2$	0	ϑ_1
2	a_2	0	0	ϑ_2
3	a_3	0	0	ϑ_3

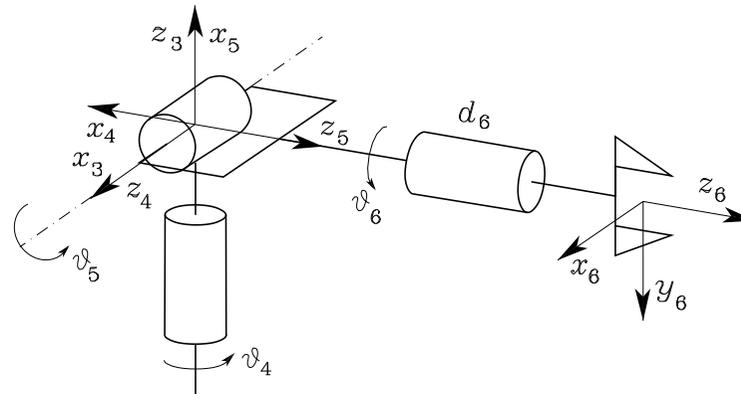
$$\mathbf{A}_1^0 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & -c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_i^{i-1} = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 & a_i c_i \\ s_i & c_i & 0 & a_i s_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad i = 2, 3$$

$$\mathbf{T}_3^0 = \mathbf{A}_1^0 \mathbf{A}_2^1 \mathbf{A}_3^2$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 c_{23} & -c_1 s_{23} & s_1 & c_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1 c_{23} & -s_1 s_{23} & -c_1 & s_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_{23} & c_{23} & 0 & a_2 s_2 + a_3 s_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Polso sferico



Braccio	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
4	0	$-\pi/2$	0	ϑ_4
5	0	$\pi/2$	0	ϑ_5
6	0	0	d_6	ϑ_6

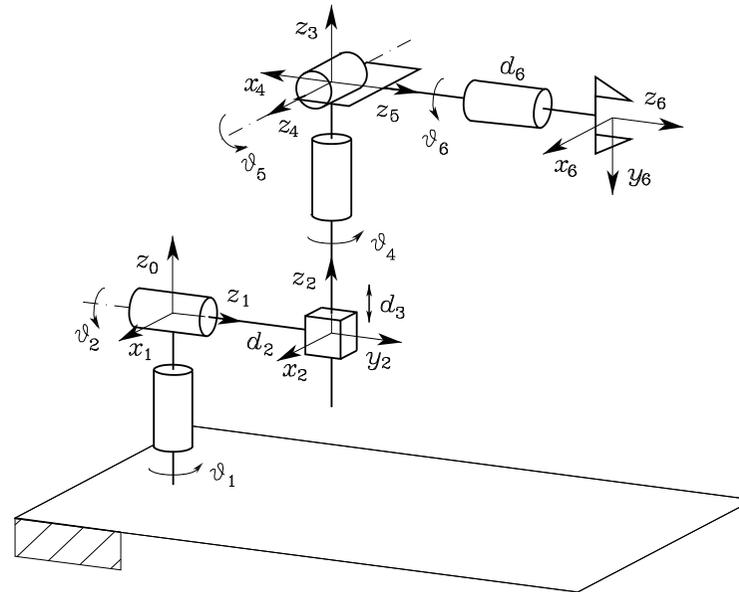
$$\mathbf{A}_4^3 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_5^4 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_6^5 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_6^3 = \mathbf{A}_4^3 \mathbf{A}_5^4 \mathbf{A}_6^5$$

$$= \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_4 c_5 s_6 - s_4 c_6 & c_4 s_5 & c_4 s_5 d_6 \\ s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6 & -s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6 & s_4 s_5 & s_4 s_5 d_6 \\ -s_5 c_6 & s_5 s_6 & c_5 & c_5 d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Manipolatore di Stanford



$$T_6^0 = T_3^0 T_6^3 = \begin{bmatrix} n^0 & s^0 & a^0 & p^0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

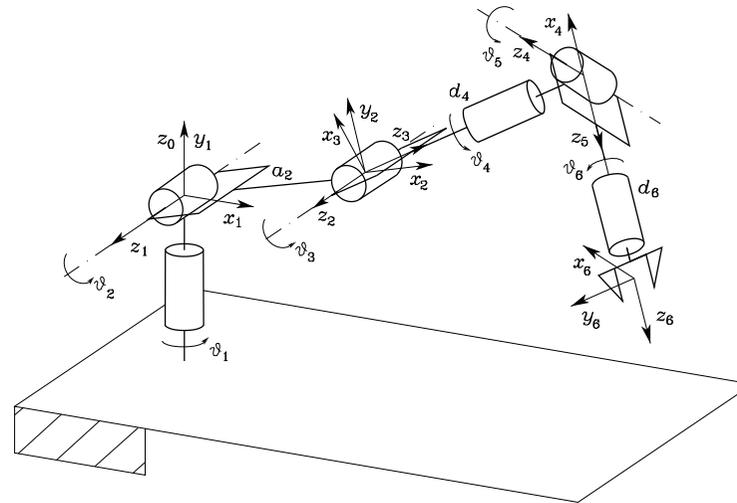
$$\mathbf{p}^0 = \begin{bmatrix} c_1 s_2 d_3 - s_1 d_2 + (c_1(c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) - s_1 s_4 s_5) d_6 \\ s_1 s_2 d_3 + c_1 d_2 + (s_1(c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) + c_1 s_4 s_5) d_6 \\ c_2 d_3 + (-s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5) d_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{n}^0 = \begin{bmatrix} c_1 (c_2 (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_2 s_5 c_6) - s_1 (s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) \\ s_1 (c_2 (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_2 s_5 c_6) + c_1 (s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) \\ -s_2 (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - c_2 s_5 c_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}^0 = \begin{bmatrix} c_1 (-c_2 (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + s_2 s_5 s_6) - s_1 (-s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6) \\ s_1 (-c_2 (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + s_2 s_5 s_6) + c_1 (-s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6) \\ s_2 (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + c_2 s_5 s_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}^0 = \begin{bmatrix} c_1 (c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) - s_1 s_4 s_5 \\ s_1 (c_2 c_4 s_5 + s_2 c_5) + c_1 s_4 s_5 \\ -s_2 c_4 s_5 + c_2 c_5 \end{bmatrix}$$

Manipolatore antropomorfo con polso sferico



Braccio	a_i	α_i	d_i	ϑ_i
1	0	$\pi/2$	0	ϑ_1
2	a_2	0	0	ϑ_2
3	0	$\pi/2$	0	ϑ_3
4	0	$-\pi/2$	d_4	ϑ_4
5	0	$\pi/2$	0	ϑ_5
6	0	0	d_6	ϑ_6

$$\mathbf{A}_3^2 = \begin{bmatrix} c_3 & 0 & s_3 & 0 \\ s_3 & 0 & -c_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_4^3 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}^0 = \begin{bmatrix} a_2 c_1 c_2 + d_4 c_1 s_{23} + d_6 (c_1 (c_{23} c_4 s_5 + s_{23} c_5) + s_1 s_4 s_5) \\ a_2 s_1 c_2 + d_4 s_1 s_{23} + d_6 (s_1 (c_{23} c_4 s_5 + s_{23} c_5) - c_1 s_4 s_5) \\ a_2 s_2 - d_4 c_{23} + d_6 (s_{23} c_4 s_5 - c_{23} c_5) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{n}^0 = \begin{bmatrix} c_1 (c_{23} (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_{23} s_5 c_6) + s_1 (s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) \\ s_1 (c_{23} (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) - s_{23} s_5 c_6) - c_1 (s_4 c_5 c_6 + c_4 s_6) \\ s_{23} (c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6) + c_{23} s_5 c_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{s}^0 = \begin{bmatrix} c_1 (-c_{23} (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + s_{23} s_5 s_6) + s_1 (-s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6) \\ s_1 (-c_{23} (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) + s_{23} s_5 s_6) - c_1 (-s_4 c_5 s_6 + c_4 c_6) \\ -s_{23} (c_4 c_5 s_6 + s_4 c_6) - c_{23} s_5 s_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}^0 = \begin{bmatrix} c_1 (c_{23} c_4 s_5 + s_{23} c_5) + s_1 s_4 s_5 \\ s_1 (c_{23} c_4 s_5 + s_{23} c_5) - c_1 s_4 s_5 \\ s_{23} c_4 s_5 - c_{23} c_5 \end{bmatrix}$$

SPAZIO DEI GIUNTI E SPAZIO OPERATIVO

- Spazio dei giunti

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$q_i = \vartheta_i$ (giunto rotoidale)

$q_i = d_i$ (giunto prismatico)

- Spazio operativo

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \phi \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad m \leq 6$$

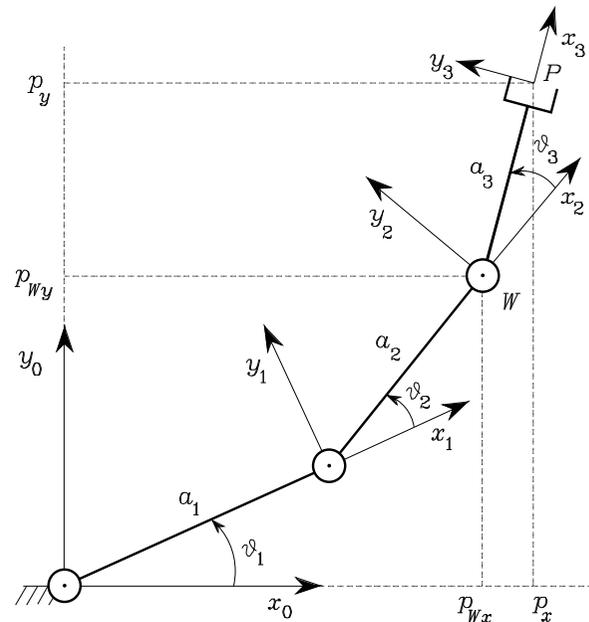
\mathbf{p} (posizione)

ϕ (orientamento)

- Equazione cinematica diretta

$$\mathbf{x} = \mathbf{k}(\mathbf{q})$$

- Esempio



$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ \phi \end{bmatrix} = \mathbf{k}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 \end{bmatrix}$$

- Nel caso più generale il calcolo di $\phi(\mathbf{q})$ non è attuabile in forma diretta, ma deve passare attraverso la risoluzione del problema (inverso) $\mathbf{R}_n^0(\mathbf{q}) \rightarrow \phi(\mathbf{q})$

Spazio di lavoro

- Spazio di lavoro *raggiungibile*

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{q}) \quad q_{im} \leq q_i \leq q_{iM} \quad i = 1, \dots, n$$

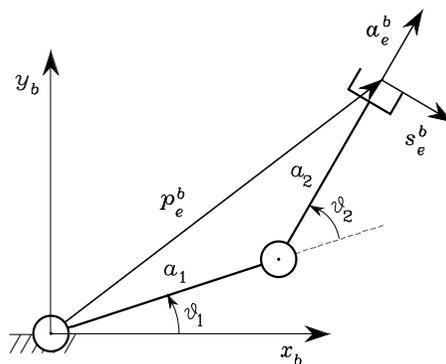
★ elementi di superficie planare, sferica, toroidale e cilindrica

- Spazio di lavoro *destro*

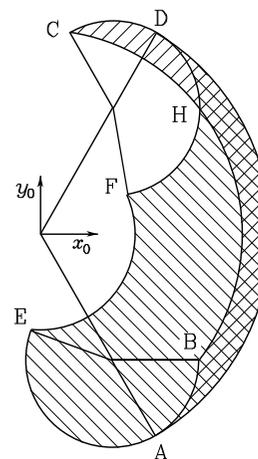
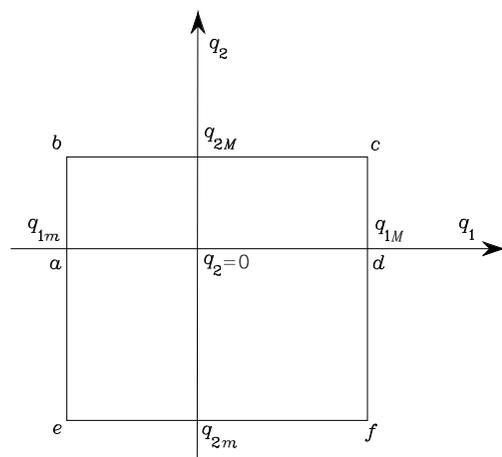
★ orientamenti diversi

- $\text{SPD} \subset \text{SPR}$

- Esempio



configurazioni ammissibili (gomito alto/basso $\leftrightarrow q_2 < > 0$)
 spazio di lavoro (gomito alto/basso $\leftrightarrow DAEFD/BCDAB$)



- Accuratezza

- ★ scostamento tra posizione conseguita con la postura assegnata e posizione calcolata tramite la cinematica diretta

- ★ valori tipici: (0.2, 1) mm

- Ripetibilità

- ★ capacità del manipolatore di tornare in una posizione precedentemente raggiunta

- ★ valori tipici: (0.02, 0.2) mm

- Ridondanza cinematica

- ★ $m < n$ (intrinseca)

- ★ $r < m = n$ (funzionale)

CALIBRAZIONE CINEMATICA

- Valori precisi dei parametri DH per migliorare l'accuratezza di un manipolatore
- Equazione cinematica diretta in funzione di tutti i parametri

$$\mathbf{x} = \mathbf{k}(\mathbf{a}, \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{d}, \boldsymbol{\vartheta})$$

$$\star \mathbf{a} = [a_1 \dots a_n]^T \quad \dots \quad \boldsymbol{\vartheta} = [\vartheta_1 \dots \vartheta_n]^T$$

★ \mathbf{x}_m : locazione misurata

★ \mathbf{x}_n : locazione nominale (parametri fissi + variabili giunto)

★ $\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_n$: errore

- Per piccoli scostamenti:

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{x} &= \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \mathbf{a}} \Delta \mathbf{a} + \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \alpha} \Delta \alpha + \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial d} \Delta d + \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \vartheta} \Delta \vartheta \\ &= \Phi(\zeta_n) \Delta \zeta\end{aligned}$$

$$\star \zeta = [\mathbf{a} \ \alpha \ d \ \vartheta]^T$$

$$\star \Delta \mathbf{a} = \mathbf{a}_m - \mathbf{a}_n \ \dots \ \Delta \zeta = \zeta_m - \zeta_n$$

★ Φ : matrice di calibrazione

★ m equazioni in $4n$ incognite ($\Delta \zeta$)

- l misure ($lm \gg 4n$)

$$\Delta \bar{x} = \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_l \end{bmatrix} \Delta \zeta = \bar{\Phi} \Delta \zeta$$

- Soluzione

$$\Delta \zeta = (\bar{\Phi}^T \bar{\Phi})^{-1} \bar{\Phi}^T \Delta \bar{x}$$

$$\zeta' = \zeta_n + \Delta \zeta$$

... finché $\Delta \zeta$ converge

- ★ stime più accurate dei parametri fissi
- ★ correzioni alle misure dei trasduttori

- Inizializzazione

- ★ postura di riferimento (*home*)

PROBLEMA CINEMATICO INVERSO

- Cinematica diretta

$$\star \mathbf{q} \implies \mathbf{T} \quad \text{oppure} \quad \mathbf{q} \implies \mathbf{x}$$

- Cinematica inversa

$$\star \mathbf{T} \implies \mathbf{q} \quad \text{oppure} \quad \mathbf{x} \implies \mathbf{q}$$

- Complessità

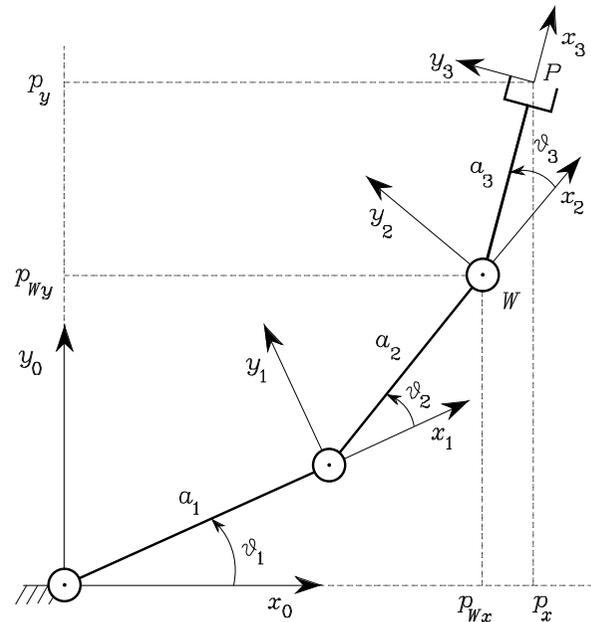
★ esistenza di soluzioni ammissibili ? soluzione analitica (in forma chiusa) ?

★ soluzioni multiple, infinite soluzioni

- Intuizione algebrica e geometrica

- Tecniche numeriche

Soluzione del manipolatore planare a tre bracci



- Soluzione algebrica

$$\phi = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3$$

$$p_{Wx} = p_x - a_3 c_\phi = a_1 c_1 + a_2 c_{12}$$

$$p_{Wy} = p_y - a_3 s_\phi = a_1 s_1 + a_2 s_{12}$$

- Soluzione per ϑ_2 ($\pm \leftrightarrow$ gomito basso/alto), $-1 \leq c_2 \leq 1$ (altrimenti \notin SPR)

$$c_2 = \frac{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2}, \quad s_2 = \pm \sqrt{1 - c_2^2}, \quad \Rightarrow \quad \vartheta_2 = \text{Atan2}(s_2, c_2)$$

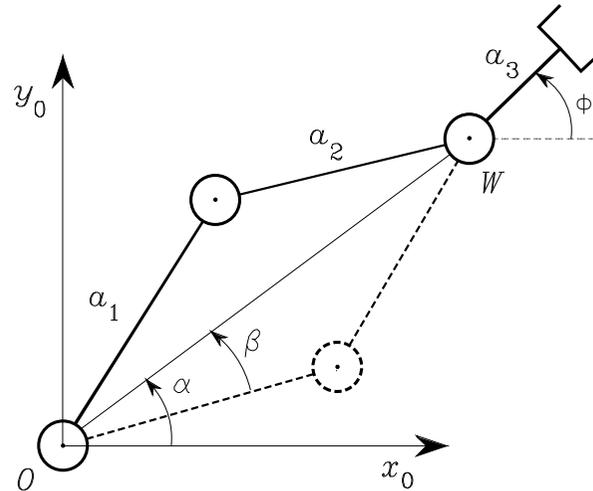
- Soluzione per ϑ_1 (ϑ_2 noto)

$$s_1 = \frac{(a_1 + a_2c_2)p_{Wy} - a_2s_2p_{Wx}}{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2}, \quad c_1 = \frac{(a_1 + a_2c_2)p_{Wx} + a_2s_2p_{Wy}}{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2}, \quad \Rightarrow \quad \vartheta_1 = \text{Atan2}(s_1, c_1)$$

- Soluzione per ϑ_3 da angolo di orientamento (ϑ_1 e ϑ_2 noti)

$$\vartheta_3 = \phi - \vartheta_1 - \vartheta_2$$

- Soluzione geometrica



- $|OW| = \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2}$

- Teorema dei coseni $p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\pi - \vartheta_2)$

- Soluzione per ϑ_2 ($\vartheta_2 \in (0, \pi)$ / $\vartheta_2 \in (-\pi, 0)$ \leftrightarrow gomito basso/alto), $\sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2} \leq a_1 + a_2$ (altrimenti \notin SPR)

$$c_2 = \frac{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2}, \quad \Rightarrow \quad \vartheta_2 = \cos^{-1}(c_2)$$

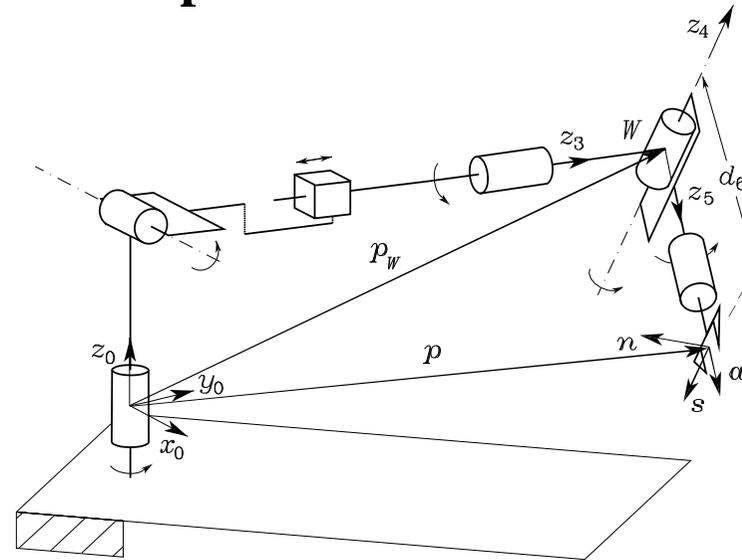
- Soluzione per ϑ_1 ($\pm \leftrightarrow$ se $\vartheta_2 < > 0$), $\beta \in (0, \pi)$

$$\alpha = \text{Atan2}(p_{Wy}, p_{Wx}), \quad \beta = \cos^{-1} \left(\frac{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 + a_1^2 - a_2^2}{2a_1 \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2}} \right) \quad \Rightarrow \quad \vartheta_1 = \alpha \pm \beta$$

- Soluzione per ϑ_3

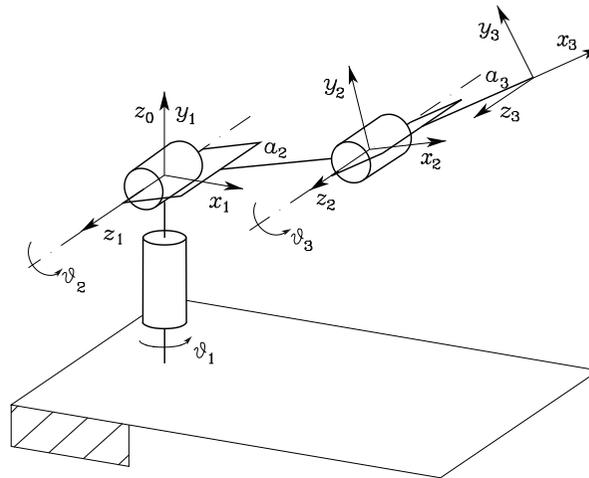
$$\vartheta_3 = \phi - \vartheta_1 - \vartheta_2$$

Soluzione di manipolatori con polso sferico



- Assegnati \mathbf{p} e $\mathbf{R} = [\mathbf{n} \ \mathbf{s} \ \mathbf{a}]$
- Soluzione disaccoppiata: punto polso $\mathbf{p}_W = \mathbf{p} - d_6 \mathbf{a}$
 - ★ calcolo di $\mathbf{p}_W(q_1, q_2, q_3)$
 - ★ cinematica inversa per $(q_1, q_2, q_3) \Rightarrow$ calcolo di $\mathbf{R}_3^0(q_1, q_2, q_3)$
 - ★ calcolo di $\mathbf{R}_6^3(\vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6) = \mathbf{R}_3^{0T} \mathbf{R} \Rightarrow$ cinematica inversa per $(\vartheta_4, \vartheta_5, \vartheta_6)$

Soluzione del manipolatore antropomorfo



- Disallineamento Σ_3 : $d_4 = a_3, d_6 = 0, \vartheta_3 \rightarrow \vartheta_3 + \frac{\pi}{2} \implies$ cinematica del manipolatore antropomorfo senza polso
- Se $p_{Wx} \neq 0$ e $p_{Wy} \neq 0$ (altrimenti ∞ soluzioni per ϑ_1)

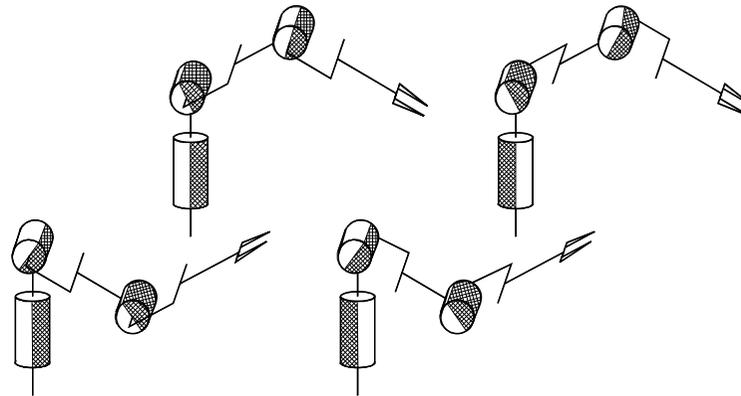
$$\vartheta_1 = \text{Atan2}(p_{Wy}, p_{Wx}) \quad (\text{oppure } \vartheta_1 = \pi + \text{Atan2}(p_{Wy}, p_{Wx}) \text{ se } \vartheta_2 \rightarrow \pi - \vartheta_2)$$

- Bracci 2+3: planare a due bracci, con $p_{Wx} \rightarrow \sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2}$ e $p_{Wy} \rightarrow p_{Wz}$

$$\left. \begin{aligned} c_3 &= \frac{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 + p_{Wz}^2 - a_2^2 - a_3^2}{2a_2a_3} \\ s_3 &= \pm \sqrt{1 - c_3^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vartheta_3 = \text{Atan2}(s_3, c_3)$$

$$\left. \begin{aligned} s_2 &= \frac{(a_2 + a_3c_3)p_{Wz} - a_3s_3\sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2}}{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 + p_{Wz}^2} \\ c_2 &= \frac{(a_2 + a_3c_3)\sqrt{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2} + a_3s_3p_{Wz}}{p_{Wx}^2 + p_{Wy}^2 + p_{Wz}^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vartheta_2 = \text{Atan2}(s_2, c_2)$$

- Quattro configurazioni ammissibili (a meno di fine corsa...)



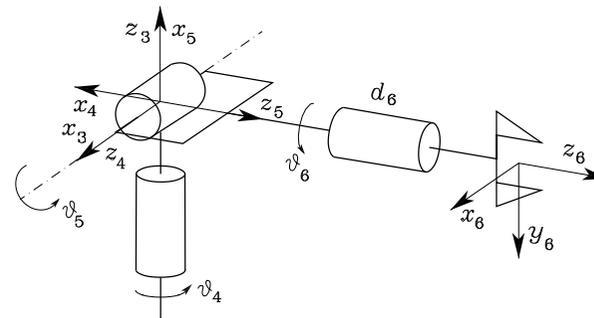
- ★ soluzione univoca solo se

$$p_{Wx} \neq 0 \quad p_{Wy} \neq 0$$

- ★ Se $p_{Wx} = 0$ e $p_{Wy} = 0 \Rightarrow \infty$ soluzioni (è possibile ricavare ϑ_2 e ϑ_3 a prescindere dal valore di ϑ_1) \Rightarrow singolarità cinematica

Soluzione del polso sferico

- Soluzione inversa per angoli di Eulero $ZY Z!$



$$\mathbf{R}_6^3 = \begin{bmatrix} n_x^3 & s_x^3 & a_x^3 \\ n_y^3 & s_y^3 & a_y^3 \\ n_z^3 & s_z^3 & a_z^3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \vartheta_4 = \text{Atan2}(a_y^3, a_x^3) \\ \vartheta_5 \in (0, \pi) \\ \vartheta_5 = \text{Atan2}\left(\sqrt{(a_x^3)^2 + (a_y^3)^2}, a_z^3\right) \\ \vartheta_6 = \text{Atan2}(s_z^3, -n_z^3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vartheta_4 = \text{Atan2}(-a_y^3, -a_x^3) \\ \vartheta_5 \in (-\pi, 0) \\ \vartheta_5 = \text{Atan2}\left(-\sqrt{(a_x^3)^2 + (a_y^3)^2}, a_z^3\right) \\ \vartheta_6 = \text{Atan2}(-s_z^3, n_z^3) \end{cases}$$

CINEMATICA DIFFERENZIALE

- Relazioni tra velocità dei giunti e velocità dell'organo terminale

Jacobiano geometrico

Jacobiano analitico

Singularità cinematiche

Analisi della ridondanza

Inversione della cinematica differenziale

Algoritmi per l'inversione cinematica

STATICA

- Relazioni tra forze all'organo terminale e coppie ai giunti

JACOBIANO GEOMETRICO

$$T(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}(\mathbf{q}) & \mathbf{p}(\mathbf{q}) \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

- Obiettivo

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{J}_P(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{J}_O(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_P \\ \mathbf{J}_O \end{bmatrix}$$

Derivata di una matrice di rotazione

- Essendo

$$\mathbf{R}(t)\mathbf{R}^T(t) = \mathbf{I} \Rightarrow \dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{R}^T(t) + \mathbf{R}(t)\dot{\mathbf{R}}^T(t) = \mathbf{O}$$

- Posto: $\mathbf{S}(t) = \dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{R}^T(t)$

$$\dot{\mathbf{R}}(t) = \mathbf{S}(t)\mathbf{R}(t)$$

con $\mathbf{S}(t) + \mathbf{S}^T(t) = \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{S}(t)$ è una matrice antisimmetrica

- Interpretazione (p' costante): $p(t) = R(t)p'$

$$\dot{p}(t) = \dot{R}(t)p' \Rightarrow \dot{p}(t) = S(\omega(t))R(t)p'$$

essendo (dalla meccanica dei corpi rigidi)

$$\dot{p}(t) = \omega(t) \times R(t)p'$$

si può interpretare $S(\omega)$ come l'operatore matriciale che descrive il prodotto vettoriale $\omega \times$

Pertanto

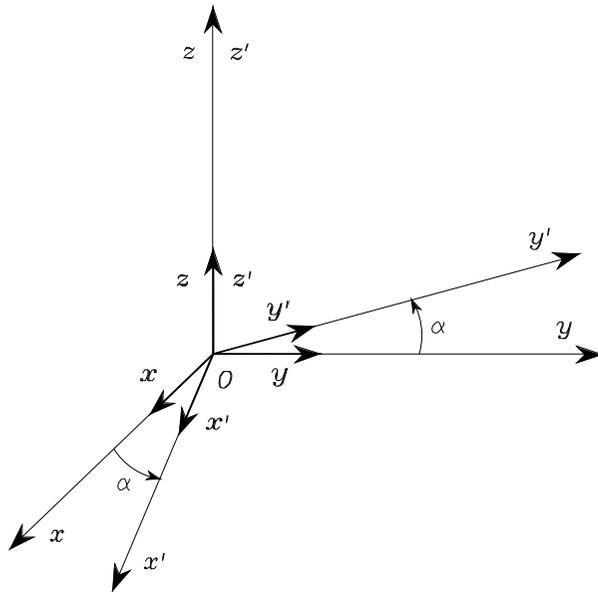
$$\dot{R}(t) = S(\omega(t))R(t)$$

con

$$S(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

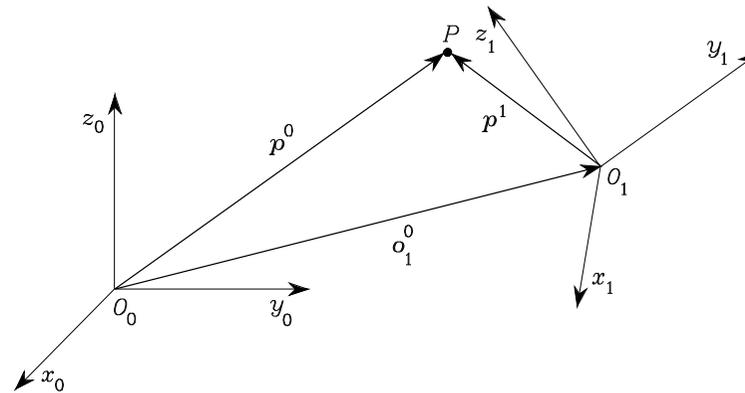
- Proprietà: $RS(\omega)R^T = S(R\omega)$

- Esempio: rotazione elementare intorno a z



$$\mathbf{R}_z(\alpha(t)) = \begin{bmatrix} \cos \alpha(t) & -\sin \alpha(t) & 0 \\ \sin \alpha(t) & \cos \alpha(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha}(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}(t)) = \begin{bmatrix} -\dot{\alpha} \sin \alpha(t) & -\dot{\alpha}(t) \cos \alpha(t) & 0 \\ \dot{\alpha} \cos \alpha(t) & -\dot{\alpha}(t) \sin \alpha(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha(t) & \sin \alpha(t) & 0 \\ -\sin \alpha(t) & \cos \alpha(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\alpha}(t) & 0 \\ \dot{\alpha}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

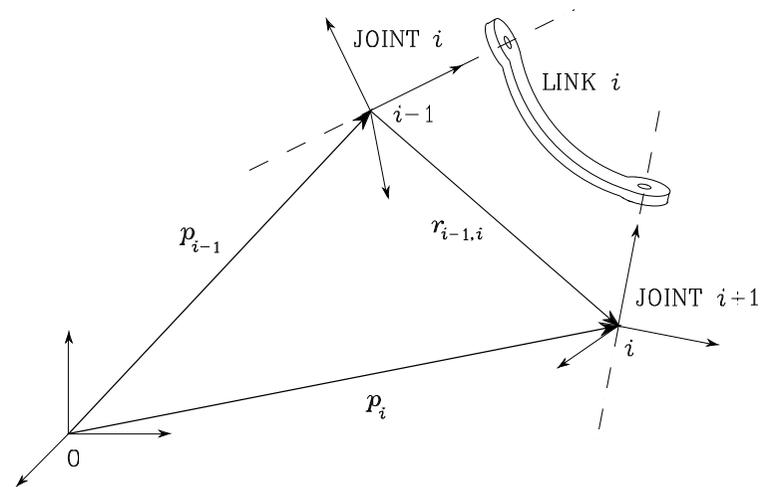


$$\mathbf{p}^0 = \mathbf{o}_1^0 + \mathbf{R}_1^0 \mathbf{p}^1 = \mathbf{o}_1^0 + \mathbf{r}_1^0$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}^0 &= \dot{\mathbf{o}}_1^0 + \mathbf{R}_1^0 \dot{\mathbf{p}}^1 + \dot{\mathbf{R}}_1^0 \mathbf{p}^1 \\ &= \dot{\mathbf{o}}_1^0 + \mathbf{R}_1^0 \dot{\mathbf{p}}^1 + \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_1^0) \mathbf{R}_1^0 \mathbf{p}^1 \\ &= \dot{\mathbf{o}}_1^0 + \mathbf{R}_1^0 \dot{\mathbf{p}}^1 + \boldsymbol{\omega}_1^0 \times \mathbf{r}_1^0 \end{aligned}$$

Velocità di un braccio

- Velocità lineare



$$\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_{i-1} + \mathbf{R}_{i-1} \mathbf{r}_{i-1,i}^{i-1} = \mathbf{p}_{i-1} + \mathbf{r}_{i-1,i}$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_i &= \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \mathbf{R}_{i-1} \dot{\mathbf{r}}_{i-1,i}^{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{R}_{i-1} \mathbf{r}_{i-1,i}^{i-1} \\ &= \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \mathbf{v}_{i-1,i} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,i} \end{aligned}$$

con

$$\mathbf{v}_{i-1,i} = \mathbf{R}_{i-1} \dot{\mathbf{r}}_{i-1,i}^{i-1}$$

- Velocità angolare

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_{i-1} \mathbf{R}_i^{i-1}$$

$$\mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_i) \mathbf{R}_i = \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i-1}) \mathbf{R}_i + \mathbf{R}_{i-1} \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^{i-1}) \mathbf{R}_i^{i-1}$$

$$= \mathbf{S}(\boldsymbol{\omega}_{i-1}) \mathbf{R}_i + \mathbf{S}(\mathbf{R}_{i-1} \boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^{i-1}) \mathbf{R}_i$$

$$\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \mathbf{R}_{i-1} \boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^{i-1}$$

$$= \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i-1,i}$$

con

$$\boldsymbol{\omega}_{i-1,i} = \mathbf{R}_{i-1} \boldsymbol{\omega}_{i-1,i}^{i-1}$$

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{p}}_i &= \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \mathbf{v}_{i-1,i} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \mathbf{r}_{i-1,i} \\ \boldsymbol{\omega}_i &= \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i-1,i}\end{aligned}$$

• Giunto prismatico:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}_{i-1,i} = \mathbf{0} \\ \mathbf{v}_{i-1,i} = \dot{d}_i \mathbf{z}_{i-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_{i-1} \\ \dot{\mathbf{p}}_i = \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \dot{d}_i \mathbf{z}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i-1,i} \end{cases}$$

• Giunto rotoidale:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}_{i-1,i} = \dot{\vartheta}_i \mathbf{z}_{i-1} \\ \mathbf{v}_{i-1,i} = \boldsymbol{\omega}_{i-1,i} \times \mathbf{r}_{i-1,i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \dot{\vartheta}_i \mathbf{z}_{i-1} \\ \dot{\mathbf{p}}_i = \dot{\mathbf{p}}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_{i-1,i} \end{cases}$$

Calcolo dello Jacobiano

$$\mathbf{J} = [\mathbf{j}_1 \quad \dots \quad \mathbf{j}_n] = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{P1} & \dots & \mathbf{J}_{Pn} \\ \mathbf{J}_{O1} & \dots & \mathbf{J}_{On} \end{bmatrix}$$

- Velocità angolare

- ★ giunto *i* prismatico

$$\dot{q}_i \mathbf{J}_{O_i} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{J}_{O_i} = \mathbf{0}$$

- ★ giunto *i* rotoidale

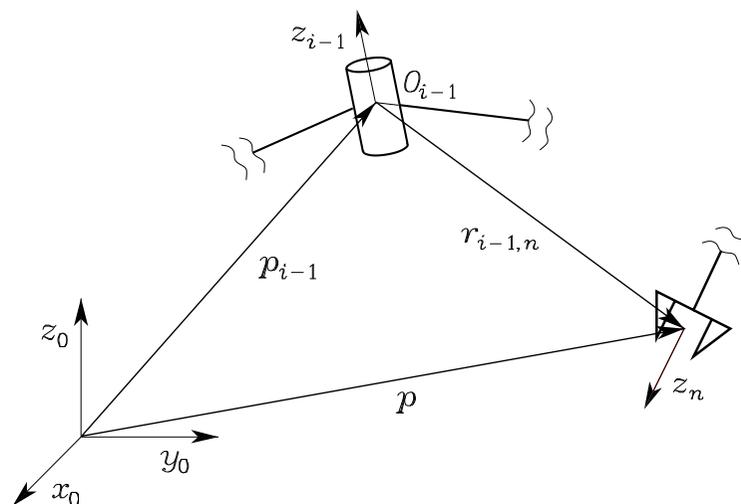
$$\dot{q}_i \mathbf{J}_{O_i} = \dot{\vartheta}_i \mathbf{z}_{i-1} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{J}_{O_i} = \mathbf{z}_{i-1}$$

- Velocità lineare

- ★ giunto *i* prismatico

$$\dot{q}_i \mathbf{J}_{Pi} = \dot{d}_i \mathbf{z}_{i-1} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{J}_{Pi} = \mathbf{z}_{i-1}$$

- ★ giunto *i* rotoidale



$$\begin{aligned} \dot{q}_i \mathbf{J}_{Pi} &= \boldsymbol{\omega}_{i-1,i} \times \mathbf{r}_{i-1,n} \\ &= \dot{\vartheta}_i \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_{i-1}) \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{J}_{Pi} = \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_{i-1})$$

- Colonna dello Jacobiano geometrico

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_{Pi} \\ \mathbf{J}_{Oi} \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} & \text{per un giunto } \textit{prismatico} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{z}_{i-1} \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_{i-1}) \\ \mathbf{z}_{i-1} \end{bmatrix} & \text{per un giunto } \textit{rotoidale} \end{cases}$$

$$\star \mathbf{z}_{i-1} = \mathbf{R}_1^0(q_1) \dots \mathbf{R}_{i-1}^{i-2}(q_{i-1}) \mathbf{z}_0 : \quad \text{da } \mathbf{R}_{i-1}^0 \text{ (III colonna)}$$

$$\star \tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{A}_1^0(q_1) \dots \mathbf{A}_n^{n-1}(q_n) \tilde{\mathbf{p}}_0 : \quad \text{da } \mathbf{T}_n^0 \text{ (IV colonna)}$$

$$\star \tilde{\mathbf{p}}_{i-1} = \mathbf{A}_1^0(q_1) \dots \mathbf{A}_{i-1}^{i-2}(q_{i-1}) \tilde{\mathbf{p}}_0 : \quad \text{da } \mathbf{A}_{i-1}^0 \text{ (IV colonna)}$$

$$\text{con } \mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ e } \tilde{\mathbf{p}}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Rappresentazione in terna differente

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}^u \\ \boldsymbol{\omega}^u \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}^u & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}^u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{R}^u & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}^u \end{bmatrix} \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{J}^u = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^u & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}^u \end{bmatrix} \mathbf{J}$$

Manipolatore planare a tre bracci

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) & \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) & \mathbf{z}_2 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_2) \\ \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} a_1 c_1 \\ a_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_3 s_{123} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_3 c_{123} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_P = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_3 s_{123} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_3 c_{123} \end{bmatrix}$$

Solo 3 righe non nulle

Manipolatore antropomorfo

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_0 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) & \mathbf{z}_1 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_1) & \mathbf{z}_2 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_2) \\ \mathbf{z}_0 & \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} a_2 c_1 c_2 \\ a_2 s_1 c_2 \\ a_2 s_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} c_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ s_1 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) \\ a_2 s_2 + a_3 s_{23} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{z}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} s_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -c_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3c_1s_{23} \\ c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -s_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3s_1s_{23} \\ 0 & a_2c_2 + a_3c_{23} & a_3c_{23} \\ 0 & s_1 & s_1 \\ 0 & -c_1 & -c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}_P = \begin{bmatrix} -s_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -c_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3c_1s_{23} \\ c_1(a_2c_2 + a_3c_{23}) & -s_1(a_2s_2 + a_3s_{23}) & -a_3s_1s_{23} \\ 0 & a_2c_2 + a_3c_{23} & a_3c_{23} \end{bmatrix}$$

Solo 3 righe linearmente indipendenti e $s_1\omega_y = -c_1\omega_z$

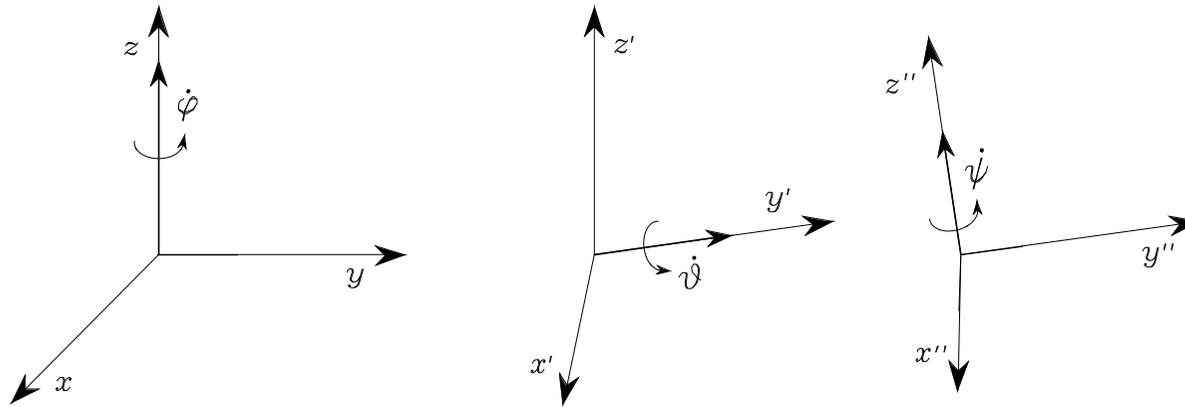
JACOBIANO ANALITICO

$$\left. \begin{array}{l} p = p(\mathbf{q}) \\ \phi = \phi(\mathbf{q}) \end{array} \right\} \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{k}(\mathbf{q})$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{p} = \frac{\partial p}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_P(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_\phi(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \end{array} \right\} \rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{k}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_P(\mathbf{q}) \\ \mathbf{J}_\phi(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_A(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

- Jacobiano analitico: $\mathbf{J}_A(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{k}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}$
- $\mathbf{J} \neq \mathbf{J}_A$ poichè $\boldsymbol{\omega} \neq \dot{\phi}$

- Velocità di rotazione in terna corrente di angoli di Eulero ZYZ

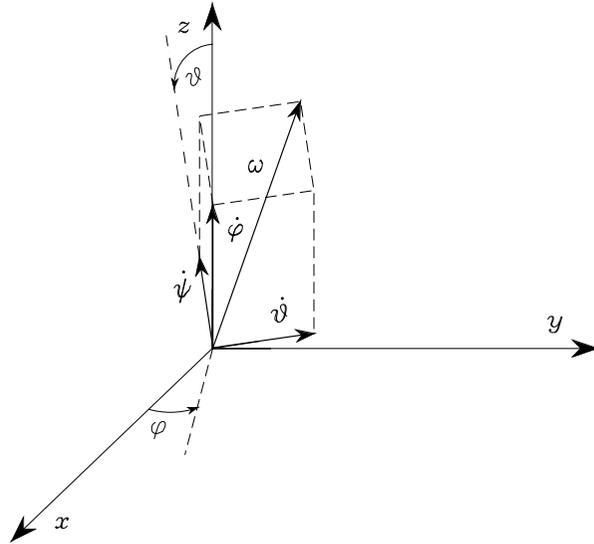


★ per effetto di $\dot{\varphi}$: $[\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T = \dot{\varphi} [0 \quad 0 \quad 1]^T$

★ per effetto di $\dot{\vartheta}$: $[\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T = \dot{\vartheta} [-s_\varphi \quad c_\varphi \quad 0]^T$

★ per effetto di $\dot{\psi}$: $[\omega_x \quad \omega_y \quad \omega_z]^T = \dot{\psi} [c_\varphi s_\vartheta \quad s_\varphi s_\vartheta \quad c_\vartheta]^T$

- Composizione di velocità di rotazione elementari



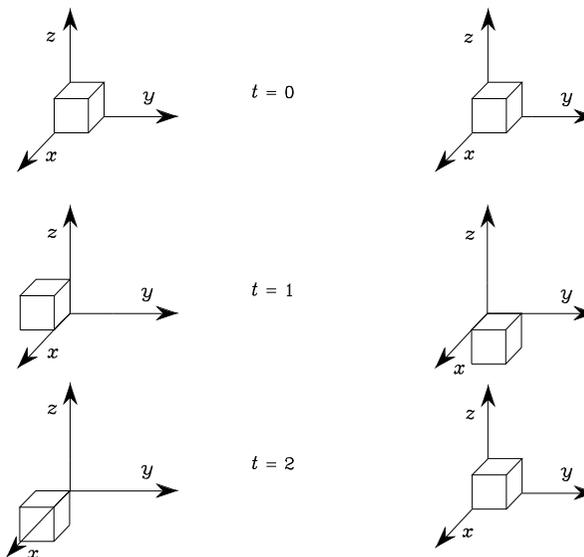
$$\omega = \begin{bmatrix} 0 & -s_\varphi & c_\varphi s_\vartheta \\ 0 & c_\varphi & s_\varphi s_\vartheta \\ 1 & 0 & c_\vartheta \end{bmatrix} \dot{\phi} = T(\phi) \dot{\phi}$$

- Essendo: $\det(T) = -s_\vartheta \Rightarrow T(\phi)$ singolare per $\vartheta = 0, \pi$ (**singularità di rappresentazione**)
 - ★ in tal caso si ha $\omega_x^2 + \omega_y^2 = \dot{\vartheta}^2$
- Quindi:
 - ★ $\forall \dot{\phi}$ può essere espressa mediante una ω equivalente
 - ★ $\exists \omega$ che non possono essere espresse mediante una $\dot{\phi}$ equivalente (in corrispondenza di singularità di rappresentazione)

- Significato fisico di $\int \omega$

$$\begin{aligned}\omega &= [\pi/2 \quad 0 \quad 0]^T & 0 \leq t \leq 1 \\ \omega &= [0 \quad \pi/2 \quad 0]^T & 1 < t \leq 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega &= [0 \quad \pi/2 \quad 0]^T & 0 \leq t \leq 1 \\ \omega &= [\pi/2 \quad 0 \quad 0]^T & 1 < t \leq 2\end{aligned}$$



Due diverse leggi orarie per $\omega(t)$ corrispondenti allo stesso integrale $\int_0^2 \omega(t) dt = [\pi/2 \quad \pi/2 \quad 0]^T$

Viceversa, $\int_0^2 \dot{\phi}(t) dt = \phi(2) - \phi(0)$

Relazione tra Jacobiano analitico e Jacobiano geometrico

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{T}(\phi) \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}_A(\phi) \dot{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{T}_A(\phi) \mathbf{J}_A$$

- Jacobiano geometrico
 - ★ grandezze di significato fisico
- Jacobiano analitico
 - ★ grandezze differenziali di variabili nello spazio operativo
- Sono equivalenti solo in particolari casi (ad es., quando la struttura è in grado di imporre rotazioni dell'organo terminale solo intorno ad un asse fisso nello spazio)
 - ★ Esempio: per il manipolatore planare a 3 bracci (con $\phi = \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3$ ed eliminando le righe nulle in \mathbf{J}) si ha $\mathbf{J} \equiv \mathbf{J}_A$

SINGOLARITÀ CINEMATICHE

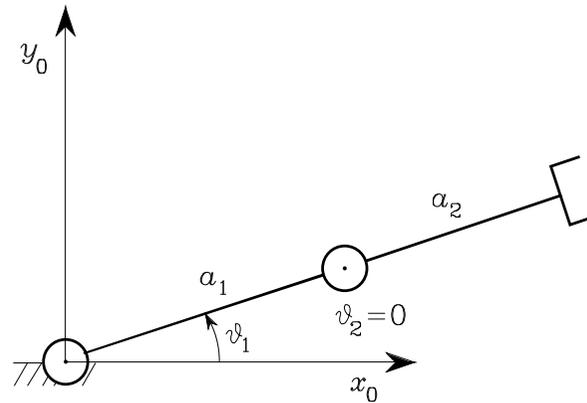
$$\mathbf{v} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

- se \mathbf{J} diminuisce di rango \implies *singolarità cinematiche*
 - (a) perdita di mobilità (\implies non è possibile imporre leggi di moto arbitrarie all'organo terminale)
 - (b) si possono avere ∞ soluzioni al problema cinematico inverso
 - (c) nell'intorno di una singolarità si possono generare velocità elevate nello spazio dei giunti (a fronte di velocità ridotte dell'organo terminale)
- Classificazione
 - ★ Singolarità *ai confini dello spazio di lavoro raggiungibile*: manipolatore tutto steso o ripiegato
 - ★ Singolarità *all'interno dello spazio di lavoro raggiungibile*: allineamento di assi di moto o configurazioni particolari dell'organo terminale

- Manipolatore planare a due bracci

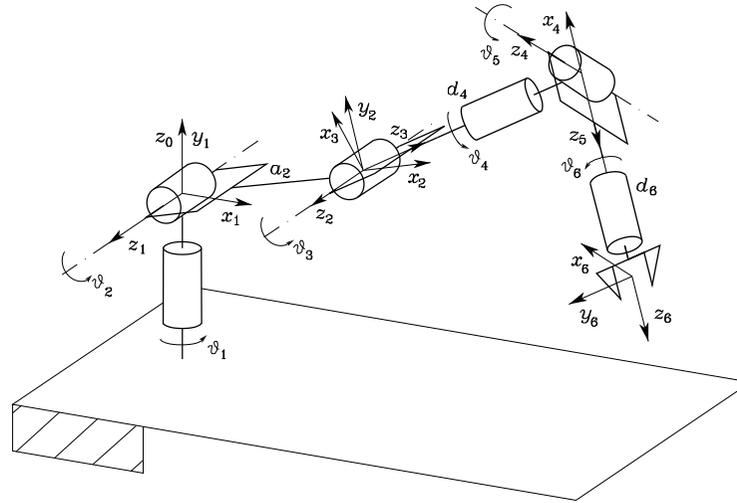
$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} & -a_2 s_{12} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} & a_2 c_{12} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\mathbf{J}) = a_1 a_2 s_2$$

★ Due singolarità ai confini dello SdLR: $s_2 = 0 \Rightarrow \vartheta_2 = 0, \vartheta_2 = \pi$



★ $[-(a_1 + a_2)s_1 \quad (a_1 + a_2)c_1]^T$ parallelo a $[-a_2 s_1 \quad a_2 c_1]^T$ (componenti di velocità dell'organo terminale non indipendenti)

Disaccoppiamento di singolarità



- Strutture con struttura portante + polso sferico
 - ★ *Singularità della struttura portante*
 - ★ *Singularità del polso*

- \mathbf{J} ha una struttura a blocchi (3×3)

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{11} & \mathbf{J}_{12} \\ \mathbf{J}_{21} & \mathbf{J}_{22} \end{bmatrix}$$

Con (ultimi 3 giunti rotoidali)

$$\mathbf{J}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_3 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_3) & \mathbf{z}_4 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_4) & \mathbf{z}_5 \times (\mathbf{p} - \mathbf{p}_5) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{J}_{22} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_3 & \mathbf{z}_4 & \mathbf{z}_5 \end{bmatrix}$$

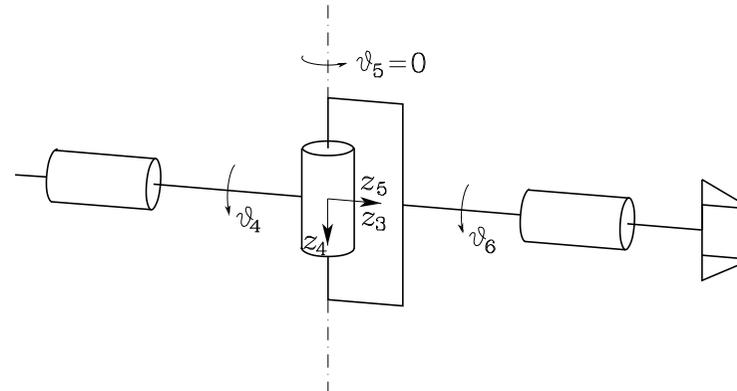
Se $\mathbf{p} = \mathbf{p}_W \implies \mathbf{p}_W - \mathbf{p}_i$ paralleli a \mathbf{z}_i ($i = 3, 4, 5$)

$$\mathbf{J}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \implies \mathbf{J} \text{ è triangolare a blocchi} \implies \det(\mathbf{J}) = \det(\mathbf{J}_{11})\det(\mathbf{J}_{22})$$

- Condizioni di singolarità (di struttura portante e di polso)

$$\det(\mathbf{J}_{11}) = 0 \qquad \det(\mathbf{J}_{22}) = 0$$

Singularità di polso



- Essendo $\mathbf{J}_{22} = [z_3 \quad z_4 \quad z_5]$ (con $z_4 \perp z_5$)
- Due singularità cinematiche per $\vartheta_5 = 0$, $\vartheta_5 = \pi$
 - ★ $z_3 \parallel z_5$, verificabile ovunque nello SdLR
- Perdita di mobilità della struttura

rotazioni uguali e opposte di ϑ_4 e ϑ_6 non producono alcuna rotazione dell'organo terminale

la struttura non è in grado di imporre rotazioni intorno a direzioni $\perp z_3, z_4$

Singularità di struttura portante

- Si noti che, nonostante si abbia $\mathbf{J}_P \neq \mathbf{J}_{11}$, si può comunque utilizzare \mathbf{J}_P ai fini del calcolo delle singularità
- Manipolatore antropomorfo

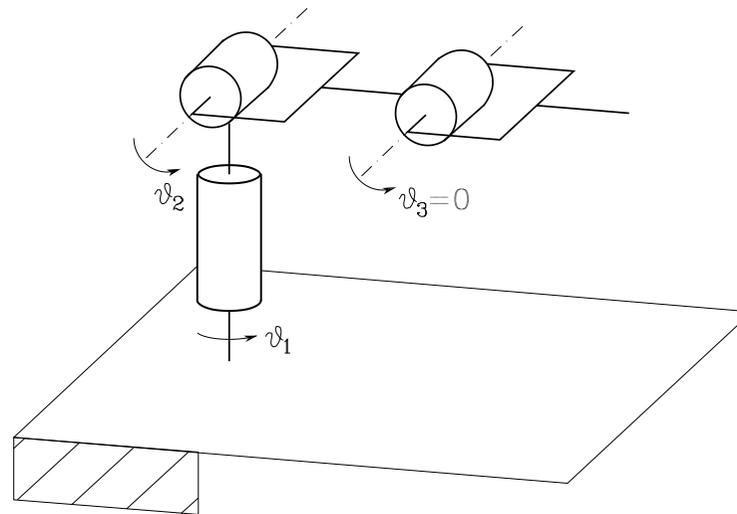
$$\det(\mathbf{J}_P) = -a_2 a_3 s_3 (a_2 c_2 + a_3 c_{23}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad s_3 = 0 \quad a_2 c_2 + a_3 c_{23} = 0$$

- Singularità di *gomito* ($s_3 = 0$)

$$\vartheta_3 = 0$$

$$\vartheta_3 = \pi$$

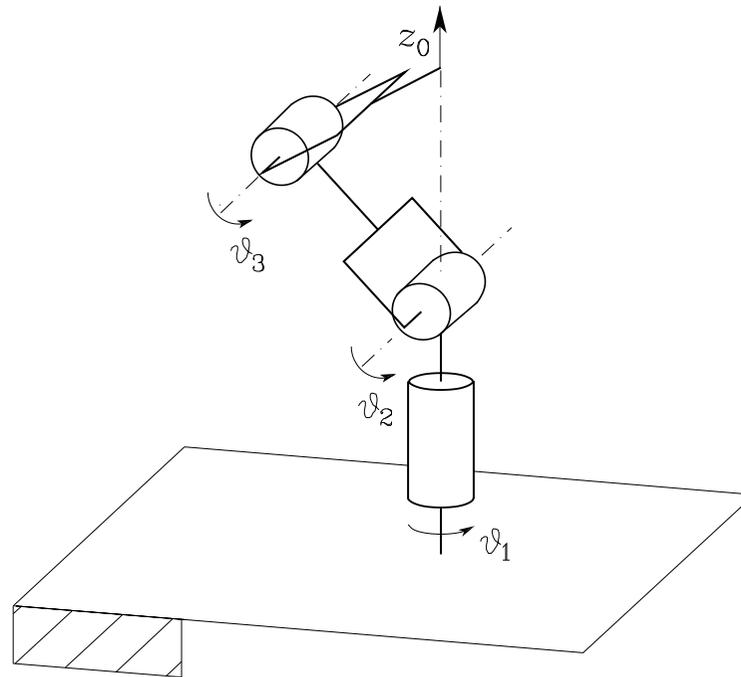
★ ai confini dello SdLR



- Singularità di *spalla* ($a_2c_2 + a_3c_{23} = 0$)

$$p_x = p_y = 0$$

- ★ ∞ configurazioni singolari caratterizzabili nello spazio cartesiano (asse di rotazione del giunto 1)
- ★ ∞ soluzioni al problema cinematico inverso (\forall valore di ϑ_1 genera lo stesso \mathbf{p})
- ★ il manipolatore non è in grado di generare velocità lineari \perp al piano della struttura



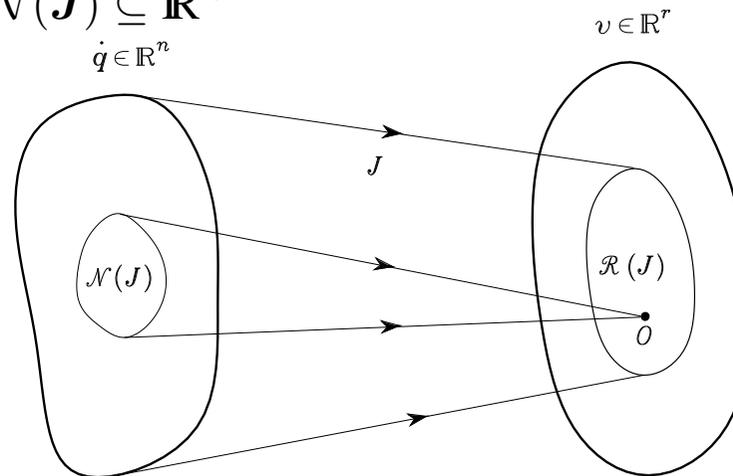
ANALISI DELLA RIDONDANZA

- Cinematica differenziale: $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$
 - ★ n : numero di gradi di mobilità della struttura (dimensione di $\dot{\boldsymbol{q}}$)
 - ★ r : numero di gradi di libertà del compito (componenti di \boldsymbol{v} da specificare)
 - ★ $n - r$: gradi di mobilità ridondanti
- Quindi
 - ★ \boldsymbol{v} : vettore ($r \times 1$) delle componenti di velocità dell'organo terminale necessarie per specificare il compito
 - ★ \boldsymbol{J} : matrice ($r \times n$) estratta dalla Jacobiano (righe corrispondenti alle componenti di \boldsymbol{v})

- Cinematica differenziale: trasformazione (configurazione dipendente) fra due sottospazi

(sottospazio) immagine (range) di \mathbf{J} : $\mathcal{R}(\mathbf{J}) \subseteq \mathbb{R}^r$

(sottospazio) nullo di \mathbf{J} : $\mathcal{N}(\mathbf{J}) \subseteq \mathbb{R}^n$



★ in generale: $\dim(\mathcal{R}(\mathbf{J})) + \dim(\mathcal{N}(\mathbf{J})) = n$

★ se $\rho(\mathbf{J}) = r$ (Jacobiano di rango pieno): $\dim(\mathcal{R}(\mathbf{J})) = r$ e $\dim(\mathcal{N}(\mathbf{J})) = n - r$

$\mathcal{R}(\mathbf{J})$ ricopre tutto \mathbb{R}^r

$\mathcal{N}(\mathbf{J})$ è non vuoto se $n > r$

- Se $\mathcal{N}(\mathbf{J}) \neq \emptyset$

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}^* + \mathbf{P}\dot{\mathbf{q}}_0$$

★ con $\dot{\mathbf{q}}_0$ arbitrario

★ e $\mathcal{R}(\mathbf{P}) \equiv \mathcal{N}(\mathbf{J})$ (\mathbf{P} è un proiettore in $\mathcal{N}(\mathbf{J})$)

- Infatti

$$\mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}^* + \mathbf{J}\mathbf{P}\dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}^* = \mathbf{v}$$

poichè $\mathbf{J}\mathbf{P}\dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0}$, $\forall \dot{\mathbf{q}}_0$

- Il vettore di velocità $\dot{\mathbf{q}}_0$ genera *moti interni* della struttura che non alterano \mathbf{v}

INVERSIONE DELLA CINEMATICA DIFFERENZIALE

- Equazione cinematica non lineare: soluzioni in forma chiusa della cinematica inversa ricavabili solo per strutture “semplici”, non ridondanti e in configurazioni non singolari
- Equazione cinematica differenziale lineare nelle velocità

- Data $\mathbf{v}(t)$ + condizioni iniziali $\implies (\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))$

★ se $n = r$

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q})\mathbf{v}$$

$$\mathbf{q}(t) = \int_0^t \dot{\mathbf{q}}(\varsigma) d\varsigma + \mathbf{q}(0)$$

★ regola di integrazione numerica (Eulero)

$$\mathbf{q}(t_{k+1}) = \mathbf{q}(t_k) + \dot{\mathbf{q}}(t_k)\Delta t$$

Manipolatori ridondanti

- \mathbf{J} è $(r \times n)$ con $r < n \Rightarrow \infty$ soluzioni
 - ★ Si pone un problema di ottimo vincolato
- Per una data configurazione \mathbf{q} , trovare le soluzioni $\dot{\mathbf{q}}$ che soddisfino la cinematica diretta (vincolo)

$$\mathbf{v} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}$$

e che minimizzino

$$g(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{W}\dot{\mathbf{q}} \quad \text{con } \mathbf{W} > \mathbf{O} \text{ e simmetrica}$$

- Metodo dei moltiplicatori di Lagrange ($\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^r$)

$$g(\dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{W}\dot{\mathbf{q}} + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{v} - \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}})$$

- Condizioni necessarie

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)^T = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{W}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{J}^T \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\lambda}}\right)^T = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} - \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

- Soluzione ottima

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}^T (\mathbf{J} \mathbf{W}^{-1} \mathbf{J}^T)^{-1} \mathbf{v}$$

che corrisponde ad un minimo poiché $\frac{\partial^2 g}{\partial \dot{\mathbf{q}}^2} = \mathbf{W} > \mathbf{O}$

- Se $\mathbf{W} = \mathbf{I}$ (min locale di $\|\dot{\mathbf{q}}\|$), la soluzione è

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^\dagger \mathbf{v}$$

dove \mathbf{J}^\dagger è la *pseudo-inversa destra* di \mathbf{J}

$$\mathbf{J}^\dagger = \mathbf{J}^T (\mathbf{J} \mathbf{J}^T)^{-1}$$

- **Utilizzo della ridondanza:** per una data configurazione \mathbf{q} , trovare le soluzioni $\dot{\mathbf{q}}$ che soddisfino la cinematica diretta (vincolo)

$$\mathbf{v} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}$$

e che minimizzino

$$g'(\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}^T - \dot{\mathbf{q}}_0^T)(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_0) = \frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_0\|^2$$

(soluzioni “prossime” a $\dot{\mathbf{q}}_0$ e che soddisfano il vincolo cinematico)

- Procedendo sempre con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange

$$g'(\dot{\mathbf{q}}, \boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}^T - \dot{\mathbf{q}}_0^T)(\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{q}}_0) + \boldsymbol{\lambda}^T(\mathbf{v} - \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}})$$

si ha la soluzione ottima

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^\dagger \mathbf{v} + (\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J})\dot{\mathbf{q}}_0$$

$\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}$ è un proiettore in $\mathcal{N}(\mathbf{J}) \Rightarrow (\mathbf{I} - \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J})\dot{\mathbf{q}}_0$ rappresenta moti interni della struttura (soluzione omogenea)

- Caratterizzazione dei moti interni: funzione obiettivo “secondaria”, $w(\mathbf{q})$, da massimizzare (localmente) compatibilmente con l’obiettivo “primario” (vincolo cinematico)

$$\dot{\mathbf{q}}_0 = k_0 \left(\frac{\partial w(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right)^T, \quad k_0 > 0$$

★ *misura di manipolabilità*

$$w(\mathbf{q}) = \sqrt{\det(\mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{J}^T(\mathbf{q}))}$$

★ *distanza dai fine-corsa dei giunti*

$$w(\mathbf{q}) = -\frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{q_i - \bar{q}_i}{q_{iM} - q_{im}} \right)^2$$

★ *distanza da un ostacolo*

$$w(\mathbf{q}) = \min_{\mathbf{p}, \mathbf{o}} \|\mathbf{p}(\mathbf{q}) - \mathbf{o}\|$$

Singularità cinematiche

- Le soluzioni precedenti valgono solo se \mathbf{J} è di rango pieno
- Se \mathbf{J} non è di rango pieno (singularità) \Rightarrow il sistema $\mathbf{v} = \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}$ contiene equazioni linearmente dipendenti
 - ★ se $\mathbf{v} \in \mathcal{R}(\mathbf{J}) \Rightarrow$ soluzione $\dot{\mathbf{q}}$ estraendo tutte le equazioni linearmente indipendenti (traiettoria “fisicamente” eseguibile)
 - ★ se $\mathbf{v} \notin \mathcal{R}(\mathbf{J}) \Rightarrow$ il sistema non è risolvibile (traiettoria non eseguibile)
- Inversione nell’intorno di singularità: $\det(\mathbf{J})$ piccolo $\Rightarrow \dot{\mathbf{q}}$ elevate
 - ★ *inversa a minimi quadrati smorzata* ($k > 0$: fattore di smorzamento che rende meglio condizionata l’inversione matriciale)

$$\mathbf{J}^* = \mathbf{J}^T (\mathbf{J}\mathbf{J}^T + k^2 \mathbf{I})^{-1}$$

- ★ dove $\dot{\mathbf{q}}$ minimizza (vincolo cinematico incorporato in g'')

$$g''(\dot{\mathbf{q}}) = \|\mathbf{v} - \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}}\|^2 + k^2 \|\dot{\mathbf{q}}\|^2$$

ALGORITMI PER L'INVERSIONE CINEMATICA

- Inversione cinematica

$$\mathbf{q}(t_{k+1}) = \mathbf{q}(t_k) + \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{q}(t_k))\mathbf{v}(t_k)\Delta t \quad \dots \text{ o anche } \mathbf{J}^\dagger, \mathbf{J}^*$$

★ fenomeni di *deriva* della soluzione

- Soluzione algoritmica

★ *errore nello spazio operativo*

$$\mathbf{e} = \mathbf{x}_d - \mathbf{x} = \mathbf{x}_d - \mathbf{k}(\mathbf{q})$$

$$\dot{\mathbf{e}} = \dot{\mathbf{x}}_d - \dot{\mathbf{x}}$$

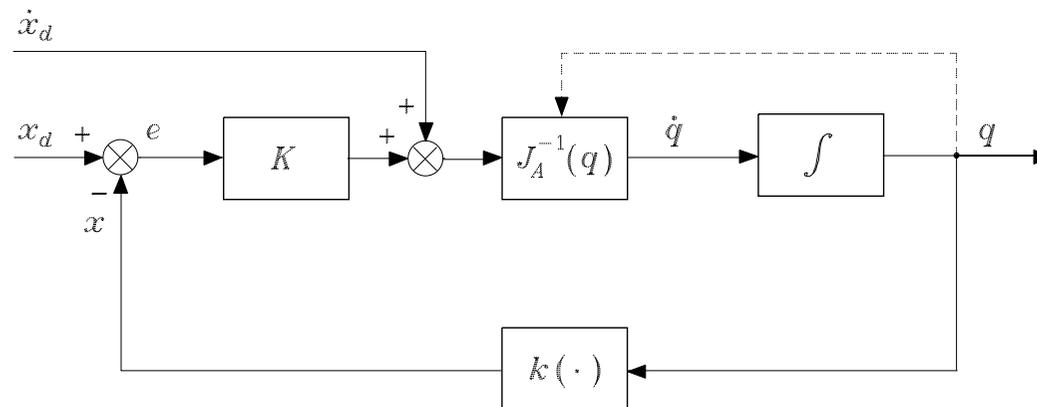
$$= \dot{\mathbf{x}}_d - \mathbf{J}_A(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$$

★ trovare $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}(\mathbf{e})$: $\mathbf{e} \rightarrow \mathbf{0}$ (fascia di tolleranza)

(Pseudo-)inversa dello Jacobiano

- Linearizzazione della dinamica di errore

$$\dot{q} = J_A^{-1}(q)(\dot{x}_d + Ke) \Rightarrow \dot{e} + Ke = 0 \quad \text{Se } K > O \Rightarrow \text{dinamica d'errore A.S.}$$



- Per un *manipolatore ridondante*

$$\dot{q} = J_A^\dagger(\dot{x}_d + Ke) + (I - J_A^\dagger J_A)\dot{q}_a$$

Trasposta dello Jacobiano

- Si cerca di ricavare una legge $\dot{q} = \dot{q}(e)$ senza linearizzare la dinamica di errore
- Metodo di Lyapunov

$V(e) = \frac{1}{2}e^T K e$ con K simmetrica e d.p. $\Rightarrow V(e) > 0 \forall e \neq \mathbf{0}$, $V(\mathbf{0}) = 0 \Rightarrow$ Forma quadratica d.p.

$$\dot{V}(e) = e^T K \dot{x}_d - e^T K \dot{x} = e^T K \dot{x}_d - e^T K J_A(q) \dot{q}$$

La scelta

$$\dot{q} = J_A^T(q) K e$$

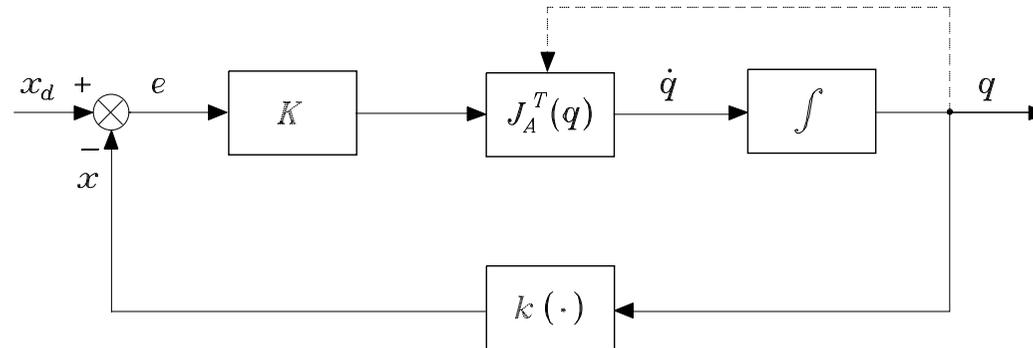
comporta che

$$\dot{V}(e) = e^T K \dot{x}_d - e^T K J_A(q) J_A^T(q) K e$$

★ se $\dot{x}_d = \mathbf{0}$ e J_A di rango pieno $\Rightarrow \dot{V} < 0$ con $V > 0$ (*asintotica stabilità di $e = \mathbf{0}$*)

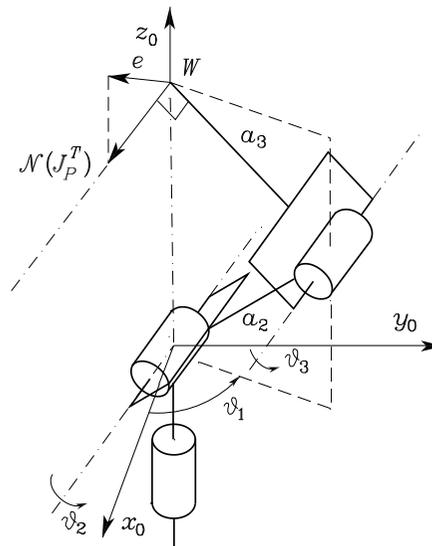
★ se $\mathcal{N}(J_A^T) \neq \emptyset \Rightarrow \dot{V} = 0$ se $K e \in \mathcal{N}(J_A^T) \Rightarrow \dot{q} = \mathbf{0}$ con $e \neq \mathbf{0}$ (stallo?)

- Schema a blocchi



- Utilizzo di sole funzioni di cinematica diretta ($k(q)$ e $J_A(q)$)
- Se $\dot{x}_d \neq 0$ (\dot{V} non definita in segno)
 - ★ $e(t)$ limitato (conviene aumentare la norma di K)

- Esempio



$$\mathbf{J}_P^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -c_1(a_2 s_2 + a_3 s_{23}) & -s_1(a_2 s_2 + a_3 s_{23}) & 0 \\ -a_3 c_1 s_{23} & -a_3 s_1 s_{23} & a_3 c_{23} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathcal{N}(\mathbf{J}_P^T) : \frac{\nu_y}{\nu_x} = -\frac{1}{\tan \vartheta_1}, \nu_z = 0$$

- Se $\mathbf{K} = k\mathbf{I}_3$

- ★ $e \in \mathcal{N}(\mathbf{J}_P^T)$ (p_d lungo la retta \perp al piano della struttura passante per W) \Rightarrow stallo (p_d non fisicamente raggiungibile)

Confronto tra gli algoritmi per l'inversione cinematica

- Manipolatore planare a tre bracci

$$\mathbf{x} = \mathbf{k}(\mathbf{q})$$

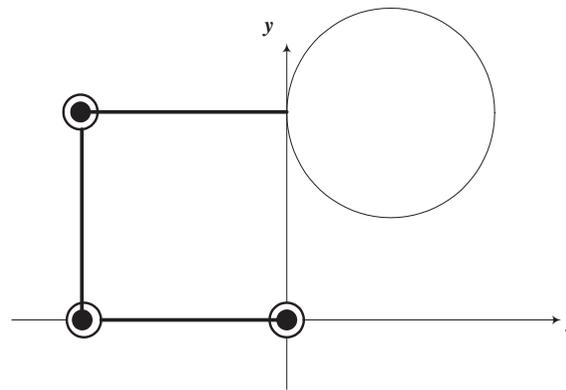
$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} \\ a_1 s_1 + a_2 s_{12} + a_3 s_{123} \\ \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 \end{bmatrix}$$

$$\star a_1 = a_2 = a_3 = 0.5 \text{ m}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_A = \begin{bmatrix} -a_1 s_1 - a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_2 s_{12} - a_3 s_{123} & -a_3 s_{123} \\ a_1 c_1 + a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_2 c_{12} + a_3 c_{123} & a_3 c_{123} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Configurazione iniziale: $\mathbf{q}_i = [\pi \quad -\pi/2 \quad -\pi/2]^T \text{ rad} \Rightarrow \mathbf{p}_{di} = [0 \quad 0.5]^T \text{ m}, \quad \phi_{di} = 0 \text{ rad}$
- Traiettoria desiderata:

$$\mathbf{p}_d(t) = \begin{bmatrix} 0.25(1 - \cos \pi t) \\ 0.25(2 + \sin \pi t) \end{bmatrix}, \quad \phi_d(t) = \sin \frac{\pi}{24} t, \quad 0 \leq t \leq 4$$

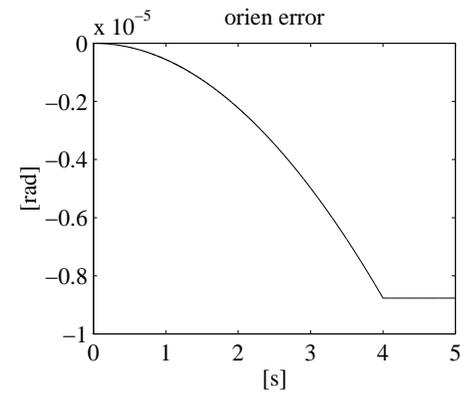
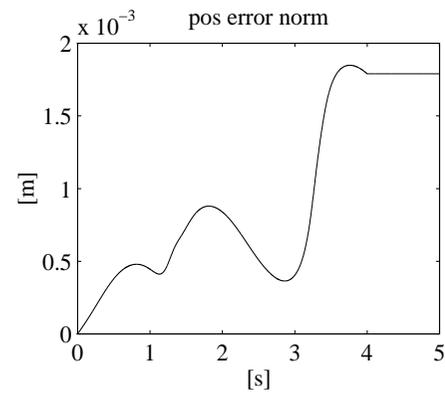


- Simulazione in MATLAB con integrazione numerica di Eulero ($\Delta t = 1 \text{ ms}$)

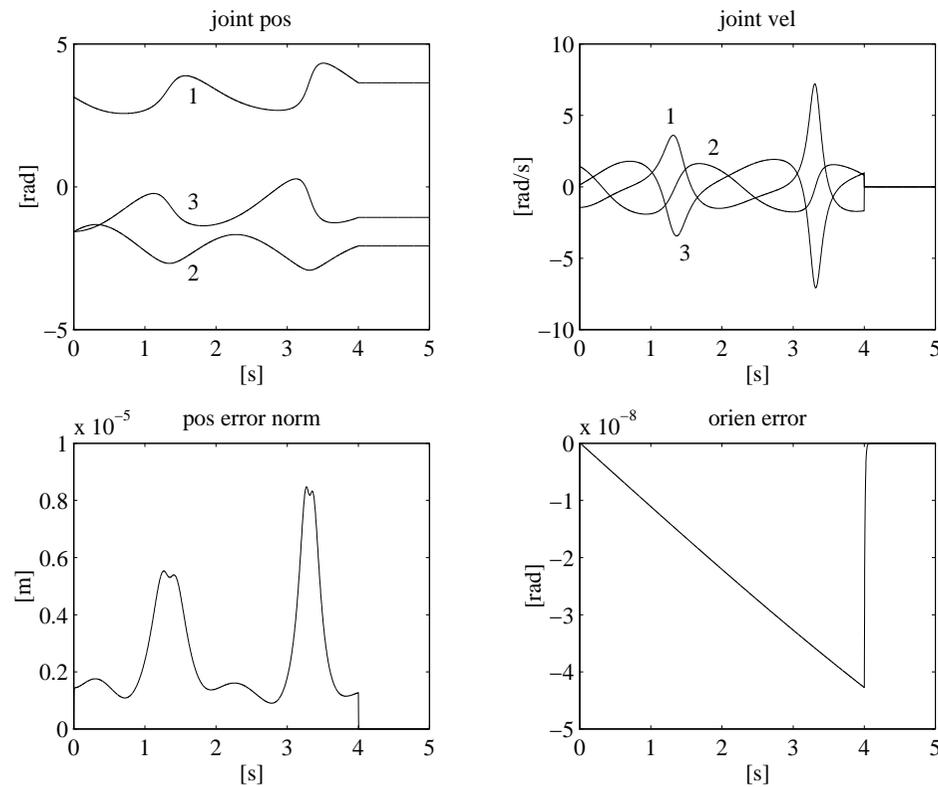
$$\mathbf{q}(t_{k+1}) = \mathbf{q}(t_k) + \dot{\mathbf{q}}(t_k) \Delta t$$

- Integrazione a ciclo aperto di $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_A^{-1}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{x}}$

★ deriva numerica

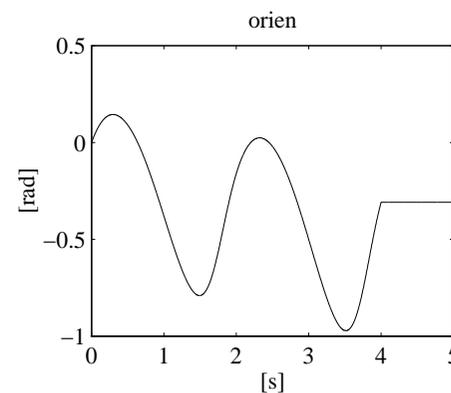
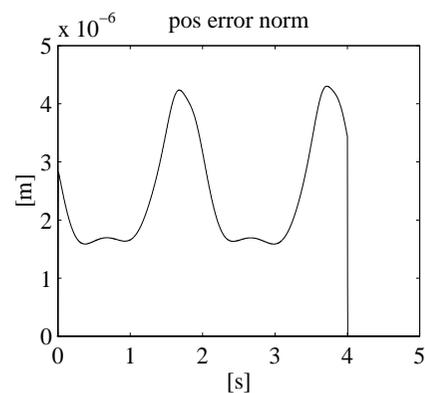


- Algoritmo di inversione a ciclo chiuso $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_A^{-1}(\mathbf{q})(\dot{\mathbf{x}}_d + \mathbf{K}\mathbf{e})$ $\mathbf{K} = \text{diag}\{500, 500, 100\}$
 - ★ deriva numerica assente
 - ★ errori di inversione più piccoli

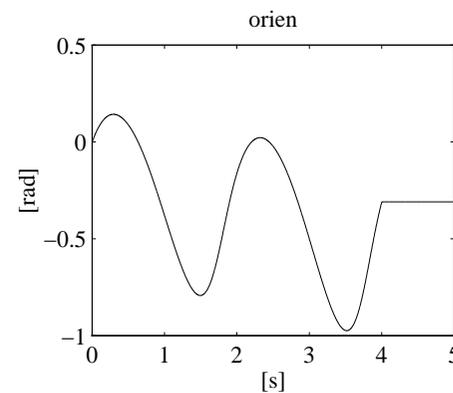
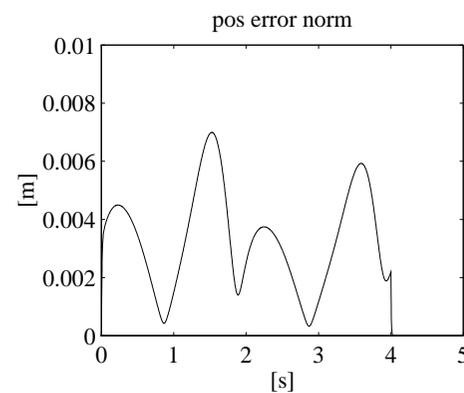


- Ridondanza funzionale: ϕ libero ($r = 2, n = 3$) (senza sfruttamento della ridondanza)

- $\dot{q} = \mathbf{J}_P^\dagger(\dot{p}_d + \mathbf{K}_P e_P)$ $\mathbf{K}_P = \text{diag}\{500, 500\}$

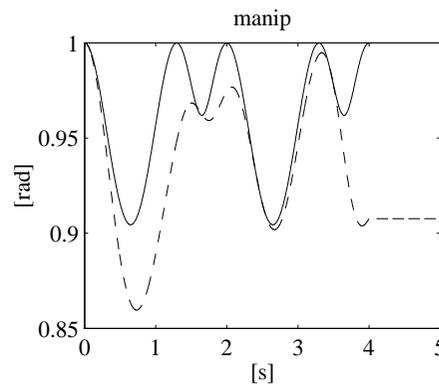
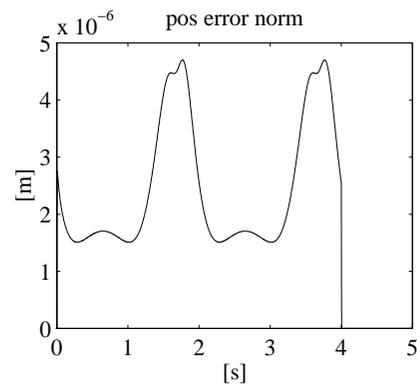
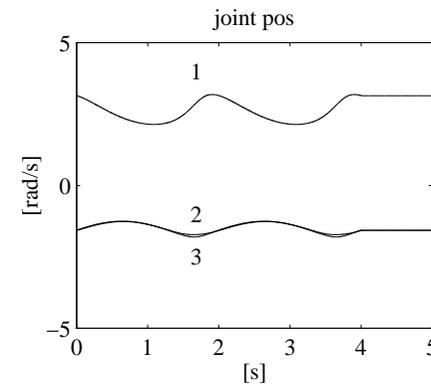
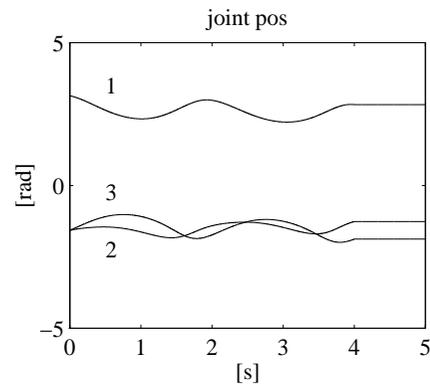


- $\dot{q} = \mathbf{J}_P^T(q) \mathbf{K}_P e_P$ $\mathbf{K}_P = \text{diag}\{500, 500\}$



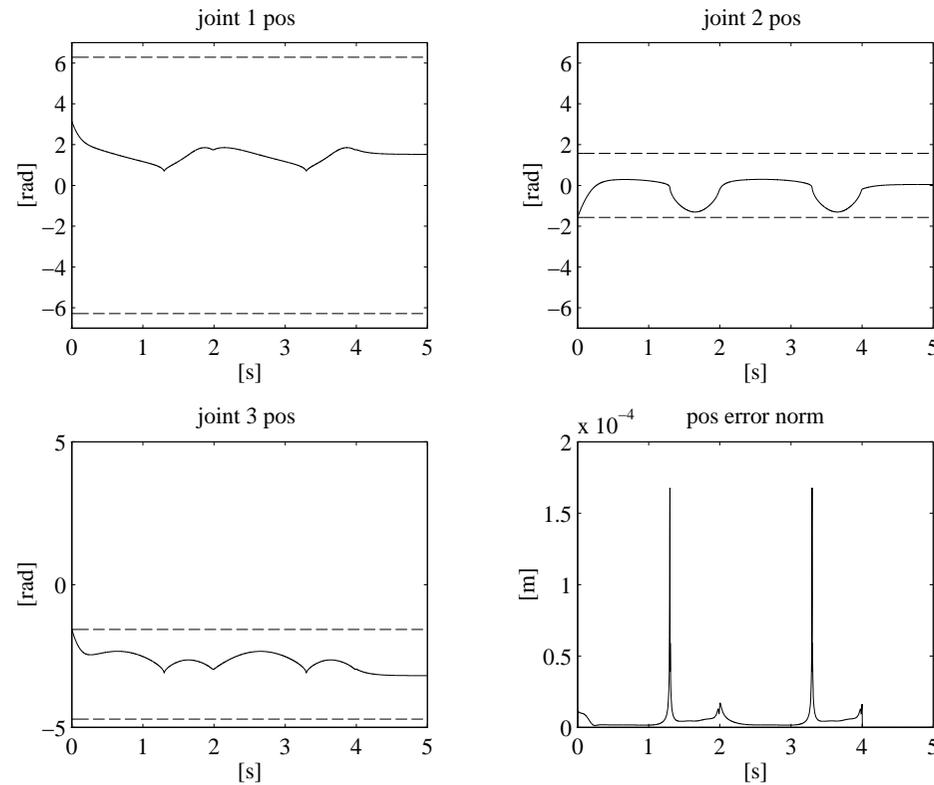
- $$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}_P^\dagger(\dot{\mathbf{p}}_d + \mathbf{K}_P \mathbf{e}_P) + (\mathbf{I} - \mathbf{J}_P^\dagger \mathbf{J}_P) \dot{\mathbf{q}}_0, \quad \dot{\mathbf{q}}_0 = k_0 \left(\frac{\partial w(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right)^T, \quad \mathbf{K}_P = \text{diag}\{500, 500\}, \quad k_0 = 50$$

$$w(\mathbf{q}) = w(\vartheta_2, \vartheta_3) = \frac{1}{2}(s_2^2 + s_3^2) \text{ (misura di manipolabilità)}$$



$$w(\mathbf{q}) = -\frac{1}{6} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{q_i - \bar{q}_i}{q_{iM} - q_{im}} \right)^2 \quad (\text{distanza dai fine-corsa dei giunti}), \quad k_0 = 250$$

$$-2\pi \leq q_1 \leq 2\pi, \quad -\pi/2 \leq q_2 \leq \pi/2, \quad -3\pi/2 \leq q_3 \leq -\pi/2$$



STATICA

- Relazione tra forze e momenti (*forze*) γ all'organo terminale e forze e/o coppie (*coppie*) τ ai giunti con il manipolatore in configurazione di equilibrio

- ★ lavoro elementare compiuto dalle coppie ai giunti ($\tau \in \mathbb{R}^n$)

$$dW_\tau = \tau^T dq$$

- ★ lavoro elementare compiuto dalle forze all'organo terminale ($\gamma \in \mathbb{R}^r$)

$$dW_\gamma = \mathbf{f}^T d\mathbf{p} + \boldsymbol{\mu}^T \boldsymbol{\omega} dt = \mathbf{f}^T \mathbf{J}_P(\mathbf{q}) d\mathbf{q} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{J}_O(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{J}(\mathbf{q}) d\mathbf{q}$$

- ★ vincoli olonomi e indipendenti da $t \Rightarrow$ spostamenti elementari \equiv spostamenti virtuali

Lavori virtuali associati ai due sistemi di forze

$$\begin{cases} \delta W_\tau = \tau^T \delta \mathbf{q} \\ \delta W_\gamma = \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{J}(\mathbf{q}) \delta \mathbf{q} \end{cases}$$

- Principio dei lavori virtuali

★ il manipolatore è in *equilibrio statico* se e solo se

$$\delta W_{\tau} = \delta W_{\gamma} \quad \forall \delta \mathbf{q}$$

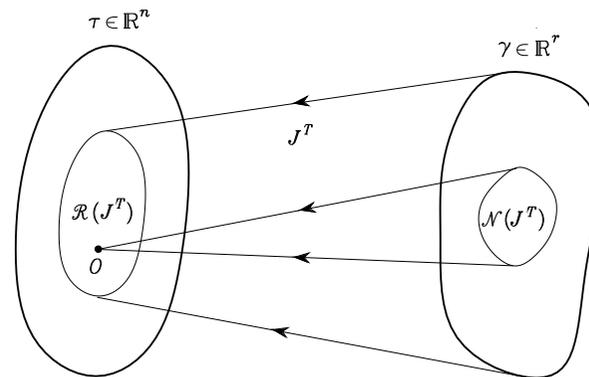
⇓

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\boldsymbol{\gamma}$$

★ $\delta W_{\gamma} = 0, \forall \delta \mathbf{q} \in \mathcal{N}(\mathbf{J}) \Rightarrow \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ all'equilibrio

Dualità cineto-statica

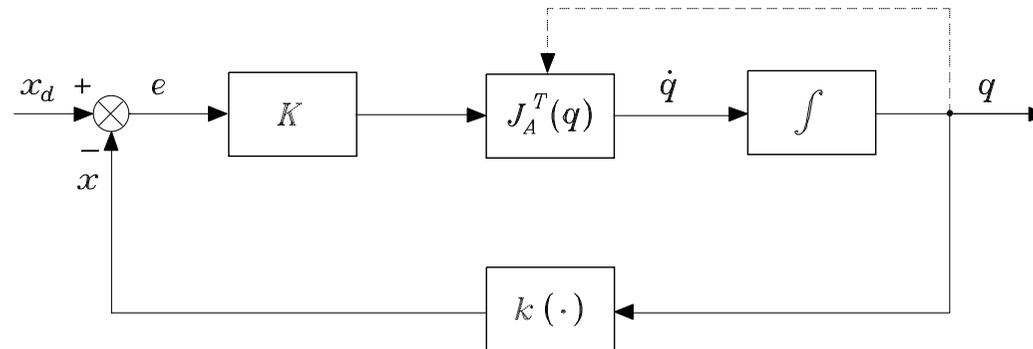
$$v = \mathbf{J}(q)\dot{q} \quad \tau = \mathbf{J}^T(q)\gamma$$



$$\mathcal{N}(\mathbf{J}) \equiv \mathcal{R}^\perp(\mathbf{J}^T) \quad \mathcal{R}(\mathbf{J}) \equiv \mathcal{N}^\perp(\mathbf{J}^T)$$

- Forze $\gamma \in \mathcal{N}(\mathbf{J}^T)$ interamente assorbite dalla struttura (reazioni vincolari)
 - ★ un manipolatore in configurazione singolare resta nella q corrente $\forall \gamma \in \mathcal{N}(\mathbf{J}^T)$

- Interpretazione fisica dello schema con la trasposta dello Jacobiano



- ★ dinamica ideale (massa nulla e attrito unitario): $\tau = \dot{q} \Rightarrow \tau = J^T K e$
- ★ forza elastica $K e$ che tira l'organo terminale verso la postura desiderata nello spazio operativo
- ★ ha effetto solo se $K e \notin \mathcal{N}(J^T)$

ELLISSOIDI DI MANIPOLABILITÀ

- Indici di valutazione delle prestazioni di un manipolatore
 - ★ attitudine ad eseguire un dato compito
- *Ellissoide di manipolabilità in velocità*
 - ★ insieme delle velocità ai giunti a norma costante

$$\dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} = 1 \quad \text{Sfera}$$

- ★ manipolatore ridondante in configurazione non singolare: $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J}^\dagger(\mathbf{q})\mathbf{v}$

$$\mathbf{v}^T (\mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{J}^T(\mathbf{q}))^{-1} \mathbf{v} = 1 \quad \text{Ellissoide}$$

- Assi dell'ellissoide $\begin{cases} \text{autovettori } \mathbf{u}_i \text{ di } \mathbf{J}\mathbf{J}^T \Rightarrow \text{direzioni} \\ \text{valori singolari } \sigma_i = \sqrt{\lambda_i(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)} \Rightarrow \text{dimensioni} \end{cases}$
- Volume dell'ellissoide proporzionale alla **misura di manipolabilità**

$$w(\mathbf{q}) = \sqrt{\det(\mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{J}^T(\mathbf{q}))} \Rightarrow \begin{cases} w(\mathbf{q}) > 0 & \text{in configurazione non singolare} \\ w(\mathbf{q}) = 0 & \text{in configurazione singolare} \end{cases}$$

★ per manipolatori non ridondanti

$$w(\mathbf{q}) = |\det(\mathbf{J})|$$

- *Ellissoide di manipolabilità in forza*

- ★ insieme delle coppie ai giunti a norma costante

$$\boldsymbol{\tau}^T \boldsymbol{\tau} = 1 \quad \text{Sfera}$$

⇓

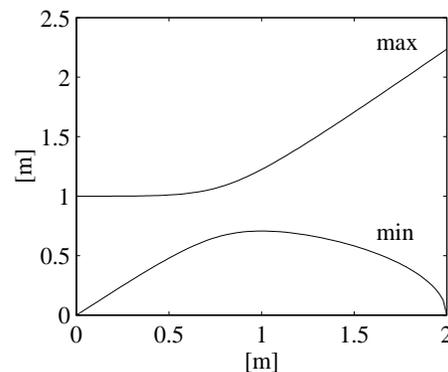
$$\boldsymbol{\gamma}^T (\mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{J}^T(\mathbf{q}))\boldsymbol{\gamma} = 1 \quad \text{Ellissoide}$$

- Dualità cineto-statica

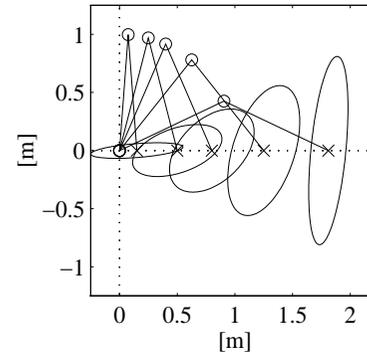
- ★ stessi assi, dimensione in proporzione inversa
- ★ una direzione lungo la quale si ha elevata manipolabilità in velocità è una direzione lungo la quale si ha scarsa manipolabilità in forza, e viceversa

Manipolatore planare a due bracci

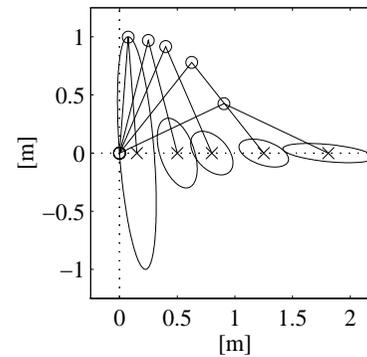
- Misura di manipolabilità: $w(q_2) = |\det(\mathbf{J})| = a_1 a_2 |s_2|$
 - ★ misura normalizzata: $\bar{w}(q_2) = s_2$
 - ★ nei casi più complessi: $\bar{w}(\mathbf{q}) = \frac{1}{\text{cond}(\mathbf{J})} = \frac{\sigma_r}{\sigma_1}$
 - ★ w : \max_{ϑ_2} per $\vartheta_2 = \pm\pi/2$, \max_{a_1, a_2} per $a_1 = a_2$ (a parità di estensione $a_1 + a_2$)
- Valori singolari ($a_1 = a_2 = 1$)



- Ellissi di manipolabilità in velocità ($a_1 = a_2 = 1$)



- Ellissi di manipolabilità in forza ($a_1 = a_2 = 1$)



- Manipolatore \equiv *trasformatore meccanico* di velocità e forze dallo spazio dei giunti allo spazio operativo
 - ★ rapporto di trasformazione lungo la direzione \mathbf{u} per l'ellissoide in forza

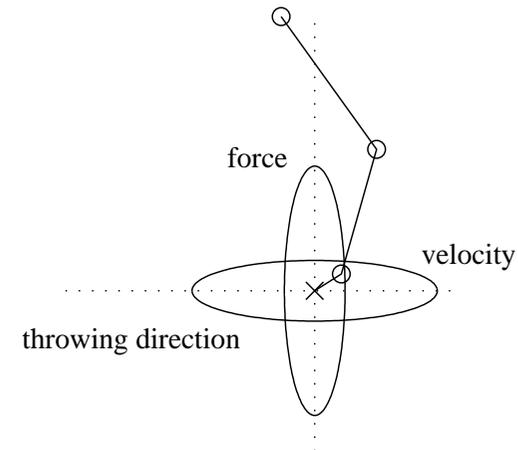
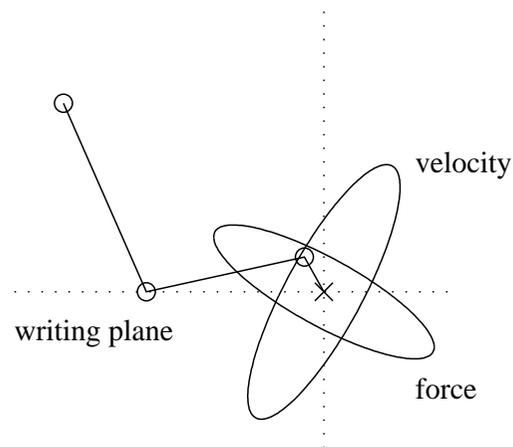
$$\alpha(\mathbf{q}) = \left(\mathbf{u}^T \mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{u} \right)^{-1/2}$$

- ★ rapporto di trasformazione lungo la direzione \mathbf{u} per l'ellissoide in velocità

$$\beta(\mathbf{q}) = \left(\mathbf{u}^T (\mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^T(\mathbf{q}))^{-1} \mathbf{u} \right)^{-1/2}$$

- ★ conservazione energia: $\alpha \uparrow$ dove $\beta \downarrow$ e viceversa
- ★ utilizzo dei gradi di mobilità ridondanti

- Compatibilità della struttura ad eseguire un compito assegnato lungo una direzione
 - ★ compiti di attuazione (elevato rapporto di trasformazione)
 - ★ compiti di controllo (basso rapporto di trasformazione)
- Scrittura su superficie orizzontale (controllo), lancio di un peso in direzione orizzontale (attuazione)



DINAMICA

- Equazioni del moto del manipolatore in funzione delle forze e momenti agenti su di esso

Formulazione di Lagrange

Proprietà notevoli del modello dinamico

Dinamica diretta e dinamica inversa

FORMULAZIONE DI LAGRANGE

- Lagrangiana \equiv (energia cinetica) – (energia potenziale)

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U}$$

★ $\lambda_i, i = 1, \dots, n$: *coordinate generalizzate*

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix} = \mathbf{q}$$

- Equazioni di Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} = \xi_i \quad i = 1, \dots, n$$

★ $\xi_i, i = 1, \dots, n$: *forze generalizzate* associate alle λ_i (forze esterne, forze non conservative)

Equazioni del moto

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathcal{T}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathcal{U}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij}(\mathbf{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^n (m_{\ell_i} \mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_{\ell_i}(\mathbf{q}) + m_{m_i} \mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_{m_i}(\mathbf{q}))$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_{j=1}^n b_{ij}(\mathbf{q}) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{db_{ij}(\mathbf{q})}{dt} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n b_{ij}(\mathbf{q}) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial b_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_k} \dot{q}_k \dot{q}_j$$

$$\frac{\partial \mathcal{T}}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial b_{jk}(\mathbf{q})}{\partial q_i} \dot{q}_k \dot{q}_j \quad \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rightarrow \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial q_i} &= - \sum_{j=1}^n \left(m_{\ell_j} \mathbf{g}_0^T \frac{\partial \mathbf{p}_{\ell_j}}{\partial q_i} + m_{m_j} \mathbf{g}_0^T \frac{\partial \mathbf{p}_{m_j}}{\partial q_i} \right) \quad \left(\sum_{i=1}^n \rightarrow \sum_{j=1}^n \right) \\ &= - \sum_{j=1}^n \left(m_{\ell_j} \mathbf{g}_0^T \mathbf{J}_{P_i}^{(\ell_j)}(\mathbf{q}) + m_{m_j} \mathbf{g}_0^T \mathbf{J}_{P_i}^{(m_j)}(\mathbf{q}) \right) = g_i(\mathbf{q}) \end{aligned}$$

- Quindi (per $i = 1, \dots, n$)

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}(\mathbf{q})\ddot{q}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_{ijk}(\mathbf{q})\dot{q}_k\dot{q}_j + g_i(\mathbf{q}) = \xi_i \quad \text{con } h_{ijk} = \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i}$$

- ★ *termini in accelerazione:*

b_{ii} : rappresenta il momento di inerzia visto all'asse del giunto i , nella configurazione corrente del manipolatore, quando gli altri giunti sono bloccati (non dipende da q_i)

b_{ij} : tiene conto dell'effetto dell'accelerazione del giunto j sul giunto i

- ★ *termini quadratici in velocità:*

$h_{ijj}\dot{q}_j^2$: rappresenta l'effetto *centrifugo* indotto al giunto i dalla velocità del giunto j ; si noti che

$h_{iii} = 0$, poiché $\partial b_{ii}/\partial q_i = 0$

$h_{ijk}\dot{q}_j\dot{q}_k$: rappresenta l'effetto di *Coriolis* indotto al giunto i dalle velocità dei giunti j e k

- ★ *termini dipendenti solo dalla configurazione:*

g_i : rappresenta la coppia generata all'asse del giunto i nella configurazione corrente del manipolatore per effetto della gravità

- Forze non conservative (ξ_i)
 - ★ coppie di attuazione: $\boldsymbol{\tau}$
 - ★ coppie di attrito viscoso: $-\mathbf{F}_v \dot{\mathbf{q}}$
 - ★ coppie di attrito statico: $-\mathbf{f}_s(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \approx \mathbf{F}_s \text{sgn}(\dot{\mathbf{q}})$
 - ★ coppie di bilanciamento di forze di contatto (interazione manipolatore-ambiente): $-\mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{h}$

- Modello dinamico nello spazio dei giunti

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_v \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}_s(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{h}$$

con $\mathbf{C} = \{c_{ij}\}_{i,j=1,n}$, dove i coefficienti c_{ij} sono scelti in modo tale che:

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n h_{ijk} \dot{q}_k \dot{q}_j$$

... sono possibili diverse scelte per i coefficienti c_{ij}

PROPRIETÀ NOTEVOLI DEL MODELLO DINAMICO

- Anti-simmetria della matrice $N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$
se i c_{ij} sono scelti opportunamente, si ha

$$\mathbf{w}^T N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{w} = 0, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = -N^T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

- Principio di conservazione dell'energia (*Hamilton*)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{q}}^T (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{F}_v \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{f}_s(\dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{g}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}^T(\mathbf{q}) \mathbf{h})$$

⇓

$$\dot{\mathbf{q}}^T N(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad \text{valida } \forall \text{ scelta dei } c_{ij}$$

- Linearità nei parametri dinamici

- ★ vettore (11×1) di parametri dinamici (diventa (13×3) con gli attriti)

$$\boldsymbol{\pi}_i = [m_i \quad m_i l_{C_i x} \quad m_i l_{C_i y} \quad m_i l_{C_i z} \quad \hat{I}_{i xx} \quad \hat{I}_{i xy} \quad \hat{I}_{i xz} \quad \hat{I}_{i yy} \quad \hat{I}_{i yz} \quad \hat{I}_{i zz} \quad I_{m_i}]^T$$

\hat{I}_i : tensore d'inerzia valutato rispetto all'origine della Σ_i

$m_i r_{i, C_i}^i$: momento primo d'inerzia

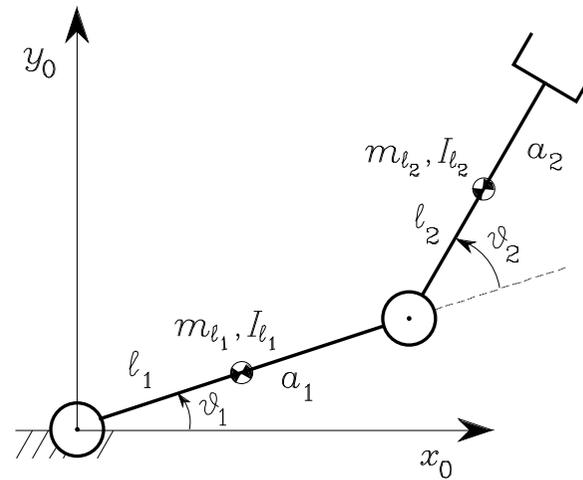
- ★ equazioni del moto in forma lineare nei parametri

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{Y}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}})\boldsymbol{\pi}$$

con

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_{11}^T & \mathbf{y}_{12}^T & \cdots & \mathbf{y}_{1n}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{y}_{22}^T & \cdots & \mathbf{y}_{2n}^T \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \cdots & \mathbf{y}_{nn}^T \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \vdots \\ \pi_n \end{bmatrix}$$

Manipolatore planare a due bracci



- Motori

- ★ masse m_{m_i}

- ★ momenti di inerzia I_{m_i}

- ★ $\mathbf{p}_{m_i} = \mathbf{p}_{i-1}$ $z_{m_i} = z_{i-1}$

$$\mathbf{B}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} b_{11}(\vartheta_2) & b_{12}(\vartheta_2) \\ b_{21}(\vartheta_2) & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$b_{11} = I_{\ell_1} + m_{\ell_1} \ell_1^2 + k_{r1}^2 I_{m_1} + I_{\ell_2} + m_{\ell_2} (a_1^2 + \ell_2^2 + 2a_1 \ell_2 c_2) \\ + I_{m_2} + m_{m_2} a_1^2$$

$$b_{12} = b_{21} = I_{\ell_2} + m_{\ell_2} (\ell_2^2 + a_1 \ell_2 c_2) + k_{r2} I_{m_2}$$

$$b_{22} = I_{\ell_2} + m_{\ell_2} \ell_2^2 + k_{r2}^2 I_{m_2}$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} h\dot{\vartheta}_2 & h(\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2) \\ -h\dot{\vartheta}_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$h_{111} = \frac{1}{2} \frac{\partial b_{11}}{\partial q_1} = 0 \quad h_{112} = h_{121} = \frac{1}{2} \frac{\partial b_{11}}{\partial q_2} = -m_{\ell_2} a_1 \ell_2 s_2 = h$$

$$h_{122} = \frac{\partial b_{12}}{\partial q_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{22}}{\partial q_1} = h \quad h_{211} = \frac{\partial b_{21}}{\partial q_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial b_{11}}{\partial q_2} = -h$$

$$h_{212} = h_{221} = \frac{1}{2} \frac{\partial b_{22}}{\partial q_1} = 0 \quad h_{222} = \frac{1}{2} \frac{\partial b_{22}}{\partial q_2} = 0$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} g_1 &= (m_{\ell_1} \ell_1 + m_{m_2} a_1 + m_{\ell_2} a_1) g c_1 + m_{\ell_2} \ell_2 g c_{12} \\ g_2 &= m_{\ell_2} \ell_2 g c_{12} \end{aligned}$$

- Anti-simmetria

$$\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{\mathbf{B}}(\mathbf{q}) - 2\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} 2h\dot{\vartheta}_2 & h\dot{\vartheta}_2 \\ h\dot{\vartheta}_2 & 0 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} h\dot{\vartheta}_2 & h(\dot{\vartheta}_1 + \dot{\vartheta}_2) \\ -h\dot{\vartheta}_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2h\dot{\vartheta}_1 - h\dot{\vartheta}_2 \\ 2h\dot{\vartheta}_1 + h\dot{\vartheta}_2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Equazioni del moto

$$\begin{aligned} & (I_{\ell_1} + m_{\ell_1}\ell_1^2 + k_{r1}^2 I_{m_1} + I_{\ell_2} + m_{\ell_2}(a_1^2 + \ell_2^2 + 2a_1\ell_2c_2) + I_{m_2} + m_{m_2}a_1^2) \ddot{\vartheta}_1 \\ & + (I_{\ell_2} + m_{\ell_2}(\ell_2^2 + a_1\ell_2c_2) + k_{r2}I_{m_2}) \ddot{\vartheta}_2 \\ & - 2m_{\ell_2}a_1\ell_2s_2\dot{\vartheta}_1\dot{\vartheta}_2 - m_{\ell_2}a_1\ell_2s_2\dot{\vartheta}_2^2 \\ & + (m_{\ell_1}\ell_1 + m_{m_2}a_1 + m_{\ell_2}a_1)gc_1 + m_{\ell_2}\ell_2gc_{12} = \tau_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (I_{\ell_2} + m_{\ell_2}\ell_2^2 + k_{r2}^2 I_{m_2}) \ddot{\vartheta}_2 + (I_{\ell_2} + m_{\ell_2}(\ell_2^2 + a_1\ell_2c_2) + k_{r2}I_{m_2}) \ddot{\vartheta}_1 \\ & + m_{\ell_2}a_1\ell_2s_2\dot{\vartheta}_1^2 + m_{\ell_2}\ell_2gc_{12} = \tau_2 \end{aligned}$$

DINAMICA DIRETTA E DINAMICA INVERSA

- Dinamica *diretta* (simulazione)
 - ★ note $\mathbf{q}(t_0)$, $\dot{\mathbf{q}}(t_0)$, $\boldsymbol{\tau}(t)$ (e $\mathbf{h}(t)$), determinare $\ddot{\mathbf{q}}(t)$, $\dot{\mathbf{q}}(t)$, $\mathbf{q}(t)$ per $t > t_0$
- Dinamica *inversa* (pianificazione e controllo)
 - ★ note $\ddot{\mathbf{q}}(t)$, $\dot{\mathbf{q}}(t)$, $\mathbf{q}(t)$ (e $\mathbf{h}(t)$), determinare $\boldsymbol{\tau}(t)$
- Per un manipolatore ad n giunti, il numero di operazioni per il calcolo della dinamica è: $O(n^2)$ per la *dinamica diretta*, $O(n)$ per la *dinamica inversa*
- Schema computazionale per la dinamica diretta

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q})(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}') \Rightarrow \boldsymbol{\tau}'(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_v\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}_s(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) + \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{h}$$

★ note $\mathbf{q}(t_k)$, $\dot{\mathbf{q}}(t_k)$, $\boldsymbol{\tau}(t_k)$, si calcola $\ddot{\mathbf{q}}(t_k) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{q}(t_k))(\boldsymbol{\tau}(t_k) - \boldsymbol{\tau}'(\mathbf{q}(t_k), \dot{\mathbf{q}}(t_k)))$

★ si integra numericamente con passo Δt per calcolare $\dot{\mathbf{q}}(t_{k+1})$ e $\mathbf{q}(t_{k+1})$, ad esempio, mediante l'algoritmo di Eulero:

$$\dot{\mathbf{q}}(t_{k+1}) = \dot{\mathbf{q}}(t_k) + \ddot{\mathbf{q}}(t_k)\Delta t, \quad \mathbf{q}(t_{k+1}) = \mathbf{q}(t_k) + \dot{\mathbf{q}}(t_k)\Delta t$$

PIANIFICAZIONE DI TRAIETTORIE

- Generazione degli ingressi di riferimento per il sistema di controllo del moto

Percorso e traiettoria

Traiettorie nello spazio dei giunti

Traiettorie nello spazio operativo

PERCORSO E TRAIETTORIA

- Limiti attuatori + eccitazione risonanze: generazione di traiettorie a curvatura regolare
- Percorso: luogo dei punti dello spazio dei giunti (spazio operativo) che il manipolatore deve descrivere nell'esecuzione del movimento assegnato (descrizione geometrica)
- Traiettorie: percorso su cui sia specificata la legge oraria di moto (ad es. velocità e/o accelerazioni)
- Algoritmo di *pianificazione della traiettoria*
 - ★ ingressi:
definizione del percorso, vincoli al percorso, vincoli dovuti alla dinamica del manipolatore
 - ★ uscita:
traiettorie dei giunti (o dell'organo terminale) espresse come sequenza temporale di valori assunti da posizione, velocità e accelerazione

- Numero ristretto di parametri
 - ★ percorso:
punti estremi, eventuali punti intermedi, primitive geometriche
 - ★ legge di moto:
tempo complessivo, velocità e/o accelerazione max, velocità e/o accelerazione in punti assegnati
- Traiettorie nello spazio operativo
 - ★ descrizione naturale del compito
 - ★ vincoli sul percorso
 - ★ non è possibile gestire singolarità e ridondanza
- Traiettorie nello spazio dei giunti
 - ★ inversione cinematica
 - ★ azione di controllo

TRAIETTORIE NELLO SPAZIO DEI GIUNTI

- Assegnati \mathbf{x}_i , \mathbf{x}_f (+ eventuali punti intermedi) ed i tempi di percorrenza, si determinano \mathbf{q}_i , \mathbf{q}_f (+ eventuali punti intermedi) attraverso la cinematica inversa o acquisizione diretta (tecnica ad insegnamento)
- Generazione di una funzione $\mathbf{q}(t)$ che interpola i valori assegnati per le variabili di giunto nel rispetto dei vincoli imposti.
 - ★ traiettorie generate poco onerose dal punto di vista computazionale
 - ★ posizioni e velocità (e talvolta accelerazioni) dei giunti funzioni continue del tempo
 - ★ effetti indesiderati minimizzati (ad es., traiettorie a curvatura non regolare)
- *Moto punto–punto*: punti estremi e tempo di transizione
- *Moto su percorso assegnato*: punti estremi, punti intermedi e tempi di transizione

Moto punto–punto

- Generazione di $q(t)$ che realizza il moto da q_i a q_f in un tempo t_f
- Polinomio cubico: posizioni + velocità iniziali e finali (4 vincoli)

$$q(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$$

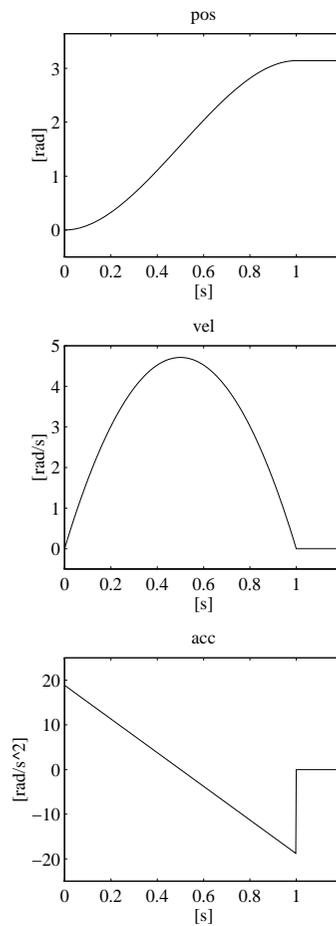
★ Calcolo dei coefficienti in base a $q_i, q_f, \dot{q}_i, \dot{q}_f$ (imponendo i 4 vincoli a $t = 0$ e $t = t_f$)

- Polinomio quintico posizioni + velocità + accelerazioni iniziali e finali (6 vincoli)

$$q(t) = a_5t^5 + a_4t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$$

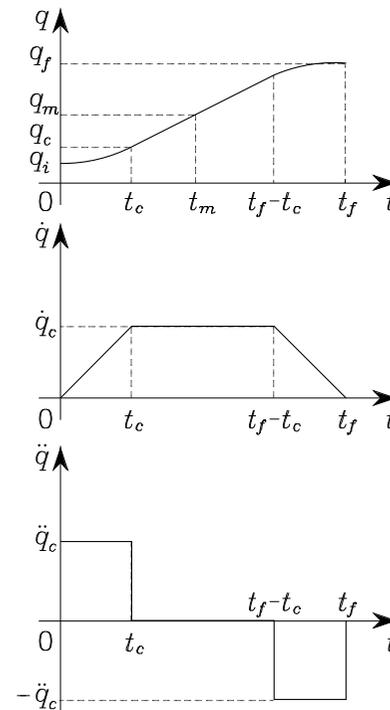
★ Calcolo dei coefficienti in base a $q_i, q_f, \dot{q}_i, \dot{q}_f, \ddot{q}_i, \ddot{q}_f$ (imponendo i 6 vincoli a $t = 0$ e $t = t_f$)

- Esempio ($q(0) = 0$, $q(t_f) = \pi$, $\dot{q}(0) = \dot{q}(t_f) = 0$, $t_f = 1$ s)



- Profilo di velocità trapezoidale

- ★ fase di $\left\{ \begin{array}{l} \text{accelerazione: tratto parabolico (accelerazione costante)} \\ \text{crociera: tratto lineare (velocità costante)} \\ \text{decelerazione: tratto parabolico (accelerazione costante, di segno opposto)} \end{array} \right.$



★ si suppone:

$$\dot{q}(0) = \dot{q}(t_f) = 0$$

tratti di accelerazione e decelerazione di ugual durata

★ pertanto:

accelerazioni uguali e contrarie (\ddot{q}_c e $-\ddot{q}_c$) nei due tratti di accelerazione/decelerazione

traiettoria simmetrica rispetto a $q_m = \frac{q_i + q_f}{2}$ e $t_m = \frac{t_f}{2}$

$$\left. \begin{array}{l} \ddot{q}_c t_c = \frac{q_m - q_c}{t_m - t_c}, \\ q_c = q_i + \frac{1}{2} \ddot{q}_c t_c^2, \end{array} \right\} \Rightarrow \ddot{q}_c t_c^2 - \ddot{q}_c t_f t_c + q_f - q_i = 0$$

★ \ddot{q}_c assegnata ($\text{sgn } \ddot{q}_c = \text{sgn}(q_f - q_i)$) con q_i , q_f e t_f

$$t_c = \frac{t_f}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{t_f^2 \ddot{q}_c - 4(q_f - q_i)}{\ddot{q}_c}} \quad \text{con: } |\ddot{q}_c| \geq \frac{4|q_f - q_i|}{t_f^2} \quad (\text{"="} \Leftrightarrow \text{profilo triangolare})$$

★ \dot{q}_c assegnata con q_i , q_f e t_f

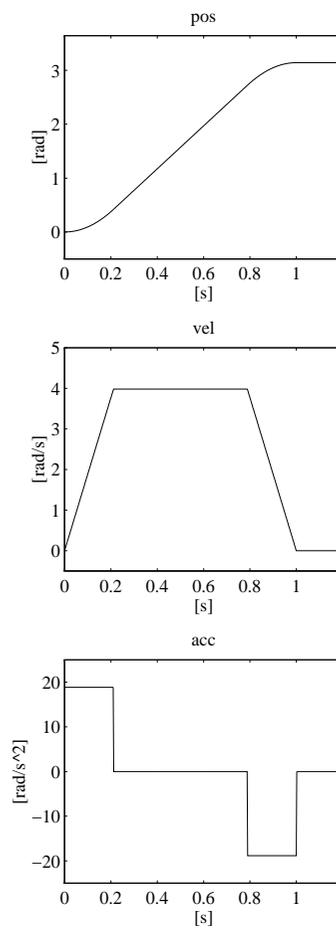
$$\frac{|q_f - q_i|}{t_f} < |\dot{q}_c| \leq \frac{2|q_f - q_i|}{t_f}, \quad t_c = \frac{q_i - q_f + \dot{q}_c t_f}{\dot{q}_c}, \quad \ddot{q}_c = \frac{\dot{q}_c^2}{q_i - q_f + \dot{q}_c t_f}$$

$$(0 < t_c \leq t_f/2 \text{ e } \dot{q}_c = \ddot{q}_c t_c)$$

★ traiettoria

$$q(t) = \begin{cases} q_i + \frac{1}{2} \ddot{q}_c t^2 & 0 \leq t \leq t_c \\ q_i + \ddot{q}_c t_c (t - t_c/2) & t_c < t \leq t_f - t_c \\ q_f - \frac{1}{2} \ddot{q}_c (t_f - t)^2 & t_f - t_c < t \leq t_f \end{cases}$$

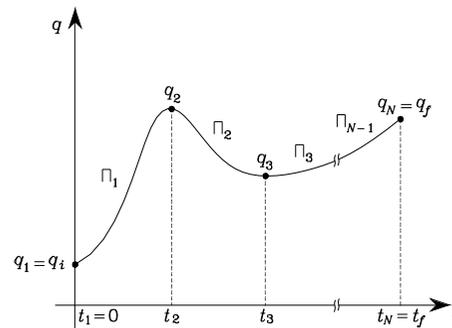
- Esempio ($q(0) = 0, q(t_f) = \pi, \dot{q}(0) = \dot{q}(t_f) = 0, \ddot{q}_c = 6\pi, t_f = 1$ s)



Moto su percorso assegnato

- opportunità di specificare punti intermedi (*sequenza di punti*)
- Assegnati N punti di percorso, trovare una funzione interpolante che passi i punti $q_1 = q_i, q_2, \dots, q_{N-1}, q_N = q_f$ negli istanti assegnati $t_1 = 0, t_2, \dots, t_{N-1}, t_N = t_f$
 - ★ N vincoli \Rightarrow polinomio di grado $N - 1$:
 - non è possibile assegnare velocità iniziale e finale
 - al crescere del grado di un polinomio aumenta il suo carattere oscillatorio (traiettorie poco naturali)
 - l'accuratezza numerica con cui può essere calcolato un polinomio peggiora all'aumentare del suo grado
 - una volta impostato il sistema di equazioni dei vincoli, risulta oneroso risolverlo
 - i coefficienti del polinomio dipendono da tutti i punti assegnati \Rightarrow se si vuole cambiare uno dei punti di percorso, si deve ricalcolare il tutto

- Sequenze di *polinomi interpolatori* ($\Pi_k(t)$, $k = 1, \dots, N - 1$) di grado più basso uniti tra di loro nei punti assegnati lungo il percorso (continuità delle velocità nei punti di percorso)
 - ★ 4 vincoli per ciascun tratto \Rightarrow polinomi cubici



- ★ i valori di $\dot{q}(t)$ in corrispondenza dei punti di percorso sono imposti arbitrariamente
 - ★ i valori di $\dot{q}(t)$ in corrispondenza dei punti di percorso sono assegnati in base ad un opportuno criterio
 - ★ l'accelerazione $\ddot{q}(t)$ deve essere continua in corrispondenza dei punti di percorso
- Sequenze di polinomi di grado minore di tre (passaggio in prossimità dei punti di percorso imposti)

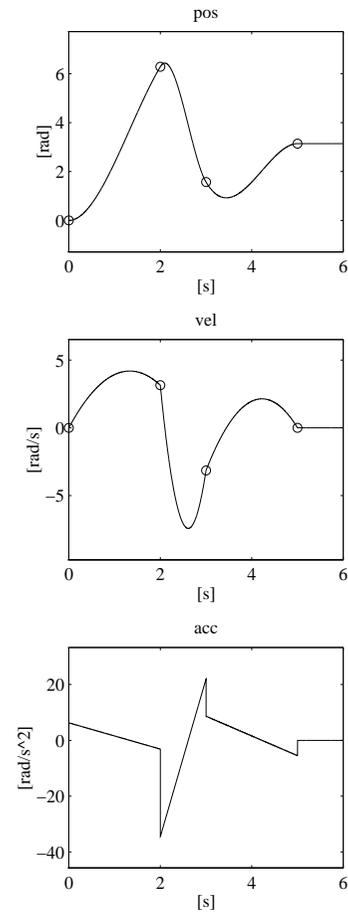
- Sequenza di polinomi con vincoli imposti sulle velocità nei punti di percorso
 - ★ passaggio per i punti di percorso assegnati

$$\begin{aligned} \Pi_k(t_k) &= q_k \\ \Pi_k(t_{k+1}) &= q_{k+1} \\ \dot{\Pi}_k(t_k) &= \dot{q}_k \\ \dot{\Pi}_k(t_{k+1}) &= \dot{q}_{k+1} \end{aligned} \quad k = 1, \dots, N - 1$$

- ★ N-1 sistemi indipendenti di 4 equazioni in 4 incognite
- ★ tipicamente $\dot{q}_1 = \dot{q}_N = 0$ e la continuità delle velocità nei punti intermedi è garantita ponendo

$$\dot{\Pi}_k(t_{k+1}) = \dot{\Pi}_{k+1}(t_{k+1}) \quad k = 1, \dots, N - 2$$

- Esempio ($N = 4$, $q_k = 0, 2\pi, \pi/2, \pi$, $\dot{q}_k = 0, \pi, -\pi, 0$, $t_k = 0, 2, 3, 5$ s)



- Sequenza di polinomi con velocità calcolate nei punti di percorso

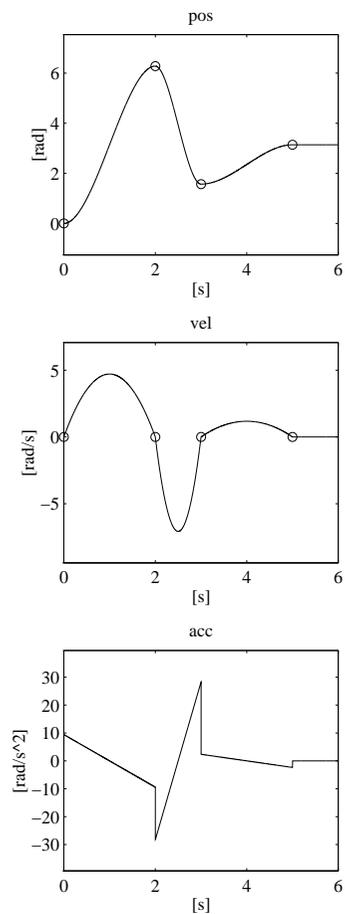
$$\begin{aligned}\dot{q}_1 &= 0 \\ \dot{q}_k &= \begin{cases} 0 & \text{sgn}(v_k) \neq \text{sgn}(v_{k+1}) \\ \frac{1}{2}(v_k + v_{k+1}) & \text{sgn}(v_k) = \text{sgn}(v_{k+1}) \end{cases} \\ \dot{q}_N &= 0\end{aligned}$$

con (pendenza spezzata in $[t_{k-1}, t_k]$)

$$v_k = (q_k - q_{k-1}) / (t_k - t_{k-1})$$

★ si impongono gli stessi vincoli del caso precedente

- Esempio ($N = 4$, $q_k = 0, 2\pi, \pi/2, \pi$, $t_k = 0, 2, 3, 5$ s $\Rightarrow \dot{q}_k = 0, 0, 0, 0$)



- Sequenza di polinomi con accelerazione continua nei punti di percorso (spline)

★ 4 vincoli $\forall t_k, k = 1, \dots, N$ ($q_1 = q_i$ e $q_N = q_f$)

$$\Pi_{k-1}(t_k) = q_k$$

$$\Pi_{k-1}(t_k) = \Pi_k(t_k)$$

$$\dot{\Pi}_{k-1}(t_k) = \dot{\Pi}_k(t_k)$$

$$\ddot{\Pi}_{k-1}(t_k) = \ddot{\Pi}_k(t_k)$$

★ $4N - 2$ equazioni nei $4(N - 1)$ coefficienti incogniti (polinomi di quarto grado per il primo e l'ultimo segmento?):

infatti, $4(N - 2)$ (punti interni) + 6 (punti estremi, poichè Π_0 e Π_N non sono definiti)

★ per utilizzare solo polinomi cubici: 2 *punti virtuali* (continuità su posizione, velocità e accelerazione, posizione non specificata) $\Rightarrow N + 1$ polinomi cubici

- ★ $4(N - 2)$ equazioni per gli $N - 2$ punti di percorso interni ($k = 3, \dots, N$) + 6 equazioni per i punti iniziale e finale ($k = 1, N + 2$)

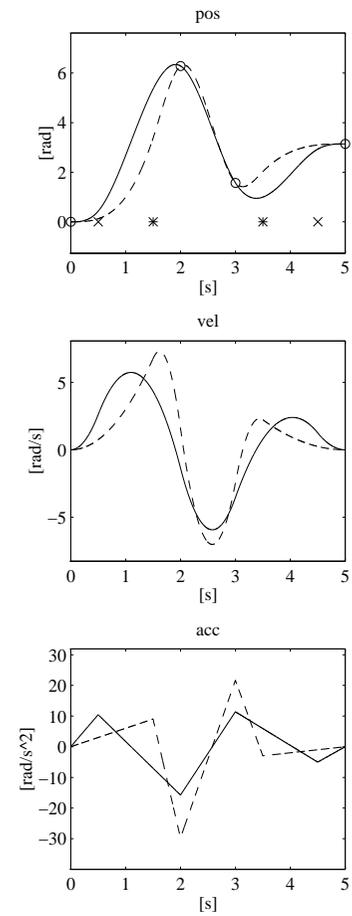
$$\begin{array}{lll}
 \Pi_{k-1}(t_k) = q_k & \Pi_1(t_1) = q_i & \Pi_{N+1}(t_{N+2}) = q_f \\
 \dot{\Pi}_{k-1}(t_k) = \dot{\Pi}_k(t_k) & \dot{\Pi}_1(t_1) = \dot{q}_i & \dot{\Pi}_{N+1}(t_{N+2}) = \dot{q}_f \\
 \ddot{\Pi}_{k-1}(t_k) = \ddot{\Pi}_k(t_k) & \ddot{\Pi}_1(t_1) = \ddot{q}_i & \ddot{\Pi}_{N+1}(t_{N+2}) = \ddot{q}_f
 \end{array}$$

- ★ 6 equazioni per i punti virtuali ($k = 2, N + 1$)

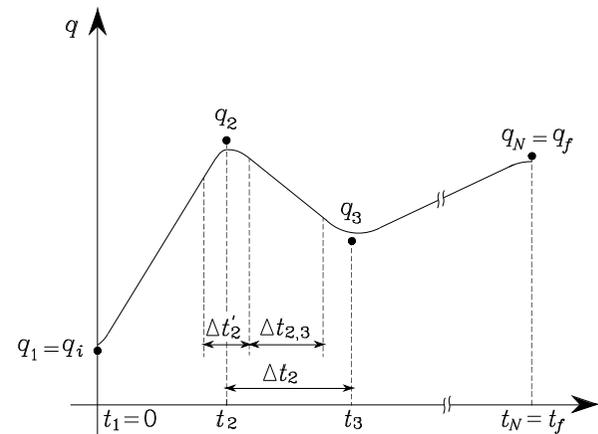
$$\begin{array}{l}
 \Pi_{k-1}(t_k) = \Pi_k(t_k) \\
 \dot{\Pi}_{k-1}(t_k) = \dot{\Pi}_k(t_k) \\
 \ddot{\Pi}_{k-1}(t_k) = \ddot{\Pi}_k(t_k)
 \end{array}$$

- ★ sistema di $4(N + 1)$ equazioni per la determinazione dei $4(N + 1)$ coefficienti degli $N + 1$ polinomi cubici
- ★ è possibile effettuare il calcolo mediante un algoritmo efficiente dal punto di vista computazionale

- Esempio (due diverse scelte per i punti virtuali)



- Sequenza di polinomi parabolico-lineari con passaggio in prossimità di punti di via
 - ★ tratti parabolici per evitare discontinuità di \dot{q}
 - ★ assegnati q_k , $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ e le durate dei tratti parabolici ($\Delta t'_k$)

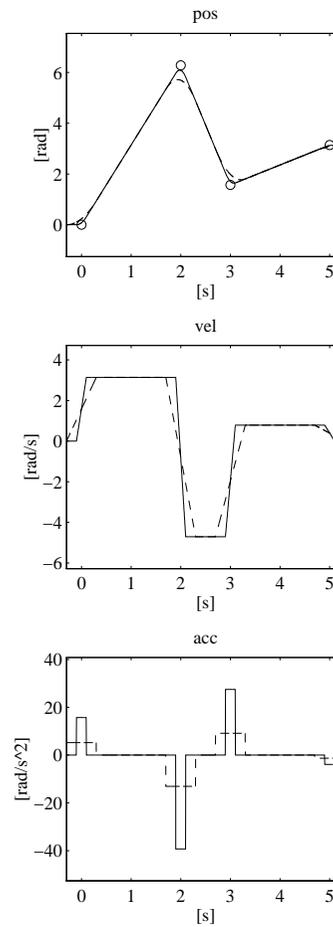


- ★ velocità (tratti lineari) e accelerazioni (tratti parabolici)

$$\dot{q}_{k-1,k} = \frac{q_k - q_{k-1}}{\Delta t_{k-1}}, \quad \ddot{q}_k = \frac{\dot{q}_{k,k+1} - \dot{q}_{k-1,k}}{\Delta t'_k}$$

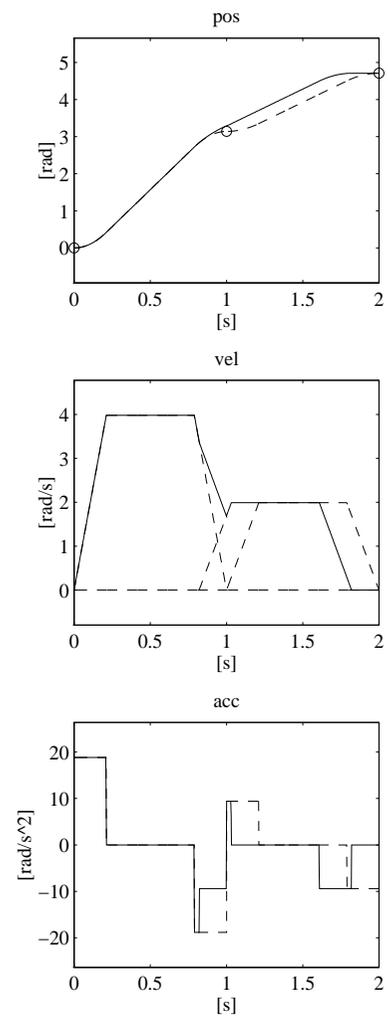
- ★ traiettoria calcolata con durata maggiore ($\dot{q}_{0,1} = \dot{q}_{N,N+1} = 0$) = $t_N - t_1 + (\Delta t'_1 + \Delta t'_N) / 2$

- Esempio ($\Delta t'_k = 0.2$ s, $\Delta t''_k = 0.6$ s)



- Composizione di leggi trapezoidali
 - ★ si usano leggi orarie di tipo trapezoidale
 - ★ assegnati q_i, q_f, t_f e $\dot{q}_i = \dot{q}_f = 0$ ed un solo punto intermedio
 - ★ si genera il secondo tratto trapezoidale in anticipo e si sommano le leggi orarie nell'intervallo in cui si sovrappongono
 - ★ non viene garantito il passaggio per il punto intermedio

- Esempio (anticipo di 0.18 s)

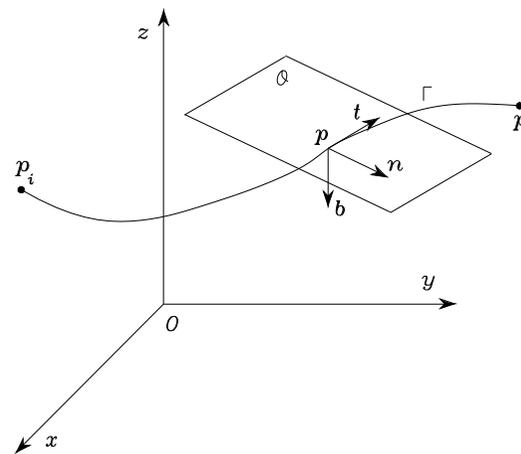


TRAIETTORIE NELLO SPAZIO OPERATIVO

- Sequenze di locazioni nello spazio operativo
 - ★ inversione cinematica
 - ★ traiettorie nello spazio dei giunti
 - ★ microinterpolazione
- Punti di percorso $\boldsymbol{x}(t_k)$
 - ★ componenti $x_i(t_k)$ raccordate secondo sequenze di polinomi interpolatori
- Primitive geometriche di percorso e primitive per le leggi di moto
 - ★ espressione analitica del percorso e della legge di moto

Primitive di percorso

- Rappresentazione parametrica di una curva Γ nello spazio $\Gamma : \mathbf{p} = \mathbf{f}(s)$
 verso positivo di percorrenza fissato sulla curva: $\mathbf{p}_i \rightarrow \mathbf{p}_f$
 $s = \pm \ell(\mathbf{p}_i, \mathbf{p})$: ascissa curvilinea tale che $\mathbf{p}_i \leftrightarrow s = 0$, $\mathbf{p}_f \leftrightarrow s = \ell(\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_f)$



terna di versori: tangente, normale, binormale

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{p}}{ds}, \quad \mathbf{n} = \frac{1}{\left\| \frac{d^2\mathbf{p}}{ds^2} \right\|} \frac{d^2\mathbf{p}}{ds^2}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$$

- Segmento nello spazio

- ★ equazione parametrica

$$\mathbf{p}(s) = \mathbf{p}_i + \frac{s}{\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|} (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \frac{1}{\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|} (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)$$

$$\frac{d^2\mathbf{p}}{ds^2} = \mathbf{0}$$

- ★ $\mathbf{p}(0) = \mathbf{p}_i, \mathbf{p}(\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|) = \mathbf{p}_f \Rightarrow$ verso positivo $\mathbf{p}_i \rightarrow \mathbf{p}_f$

- ★ $d^2\mathbf{p}/ds^2 = \mathbf{0} \Rightarrow$ non è possibile definire la terna di versori in modo univoco

- Circonferenza nello spazio

- ★ assegnati:

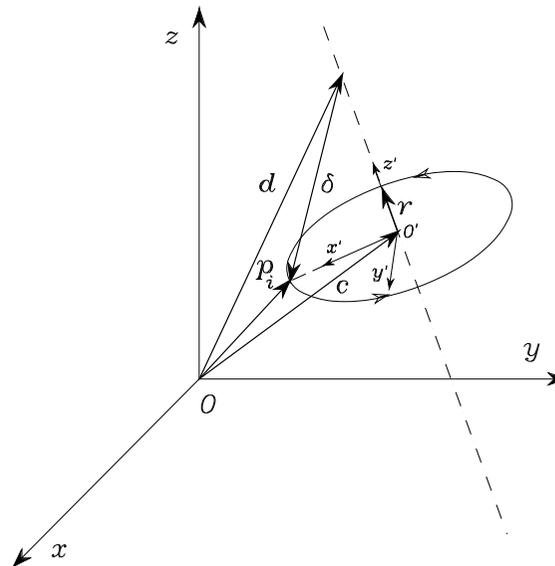
- versore dell'asse della circonferenza, \mathbf{r}

- posizione di un punto dell'asse, \mathbf{d}

- posizione di un punto della circonferenza, \mathbf{p}_i

- ★ centro: $\mathbf{c} = \mathbf{d} + (\boldsymbol{\delta}^T \mathbf{r}) \mathbf{r}$, con $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{p}_i - \mathbf{d}$ e $|\boldsymbol{\delta}^T \mathbf{r}| < \|\boldsymbol{\delta}\|$

- ★ raggio: $\rho = \|\mathbf{p}_i - \mathbf{c}\|$



★ terna Σ_c con: $O_c \equiv \mathbf{c}$, $\mathbf{x}_c \equiv (\mathbf{p}_i - \mathbf{c})/\|\mathbf{p}_i - \mathbf{c}\|$, $\mathbf{z}_c \equiv \mathbf{r}$ ($\mathbf{R}_c = [\mathbf{x}_c \ \mathbf{y}_c \ \mathbf{z}_c]$)

★ equazione parametrica (rispetto alla terna Σ_c)

$$\mathbf{p}^c(s) = \begin{bmatrix} \rho \cos(s/\rho) \\ \rho \sin(s/\rho) \\ 0 \end{bmatrix}$$

★ equazione parametrica (rispetto alla terna base)

$$\mathbf{p}(s) = \mathbf{c} + \mathbf{R}_c \mathbf{p}^c(s) = \mathbf{c} + \mathbf{R}_c \begin{bmatrix} \rho \cos(s/\rho) \\ \rho \sin(s/\rho) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{ds} = \mathbf{R}_c \begin{bmatrix} -\sin(s/\rho) \\ \cos(s/\rho) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{d^2\mathbf{p}}{ds^2} = \mathbf{R}_c \begin{bmatrix} -\cos(s/\rho)/\rho \\ -\sin(s/\rho)/\rho \\ 0 \end{bmatrix}$$

★ è possibile definire la terna di versori in modo univoco

Traiettorie di posizione e di orientamento

- Posizione dell'origine della terna utensile: $\mathbf{p} = \mathbf{f}(s)$

verso positivo su Γ : $\mathbf{p}_i \rightarrow \mathbf{p}_f$

$$\begin{cases} t = 0 : & s = 0, & \mathbf{p} = \mathbf{p}_i \\ t = t_f : & s = s_f, & \mathbf{p} = \mathbf{p}_f \end{cases}$$

- ★ legge oraria $s(t)$: polinomio interpolatore

$$\dot{\mathbf{p}} = \dot{s} \frac{d\mathbf{p}}{ds} = \dot{s} \mathbf{t}$$

- ★ $|\dot{s}| = |\dot{\mathbf{p}}|$

- ★ $\text{sgn}(\dot{s}) = \text{sgn}(\dot{\mathbf{p}}^T \mathbf{t})$

★ segmento

$$\mathbf{p}(s) = \mathbf{p}_i + \frac{s}{\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|} (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i), \quad \dot{\mathbf{p}} = \frac{\dot{s}}{\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|} (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) = \dot{s} \mathbf{t}, \quad \ddot{\mathbf{p}} = \frac{\ddot{s}}{\|\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i\|} (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) = \ddot{s} \mathbf{t}$$

★ circonferenza

$$\mathbf{p}(s) = \mathbf{c} + \mathbf{R} \begin{bmatrix} \rho \cos(s/\rho) \\ \rho \sin(s/\rho) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} -\dot{s} \sin(s/\rho) \\ \dot{s} \cos(s/\rho) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{p}} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} -\dot{s}^2 \cos(s/\rho)/\rho - \ddot{s} \sin(s/\rho) \\ -\dot{s}^2 \sin(s/\rho)/\rho + \ddot{s} \cos(s/\rho) \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Orientamento: $\Sigma : \Sigma_i \rightarrow \Sigma_f \Rightarrow \mathbf{R} : \mathbf{R}_i \rightarrow \mathbf{R}_f$
 - ★ interpolazione delle componenti di $\mathbf{n}(t)$, $\mathbf{s}(t)$, $\mathbf{a}(t)$ non garantisce ortonormalità
- Interpolazione di $\phi(t)$

$$\phi(s) = \phi_i + \frac{s}{\|\phi_f - \phi_i\|}(\phi_f - \phi_i)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\dot{s}}{\|\phi_f - \phi_i\|}(\phi_f - \phi_i)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{\ddot{s}}{\|\phi_f - \phi_i\|}(\phi_f - \phi_i)$$

- ★ $\boldsymbol{\omega}(t)$ e $\dot{\boldsymbol{\omega}}(t)$ si calcolano utilizzando le relazioni $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{T}(\phi)\dot{\phi}$ e $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\mathbf{T}}(\phi, \dot{\phi})\dot{\phi} + \mathbf{T}(\phi)\ddot{\phi}$

- Asse equivalente di rotazione ($\mathbf{R}_f = \mathbf{R}_i \mathbf{R}_f^i$)

$$\mathbf{R}_f^i = \mathbf{R}_i^T \mathbf{R}_f = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \vartheta_f &= \cos^{-1} \left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2} \right) \\ \mathbf{r}^i &= \frac{1}{2 \sin \vartheta_f} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- ★ transizione da \mathbf{R}_i a \mathbf{R}_f descritta dalla matrice tempo-variante $\mathbf{R}^i(t)$: $\mathbf{R}^i(0) = \mathbf{I}$, $\mathbf{R}^i(t_f) = \mathbf{R}_f^i$

$$\mathbf{R}^i(t) = \mathbf{R}^i(\vartheta(t), \mathbf{r}^i) \Rightarrow \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_i \mathbf{R}^i(\vartheta(t), \mathbf{r}^i)$$

$\vartheta(0) = 0$, $\vartheta(t_f) = \vartheta_f \Rightarrow \vartheta(t)$ mediante le solite tecniche di interpolazione

- ★ velocità ed accelerazione angolare:
$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}(t) &= \mathbf{R}_i \boldsymbol{\omega}^i(t) &= \mathbf{R}_i \dot{\vartheta}(t) \mathbf{r}^i \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) &= \mathbf{R}_i \dot{\boldsymbol{\omega}}^i(t) &= \mathbf{R}_i \ddot{\vartheta}(t) \mathbf{r}^i \end{cases}$$

SCALATURA DINAMICA DI TRAIETTORIE

★ vincoli dinamici (coppie troppo elevate)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\tau}(t) &= \mathbf{B}(\mathbf{q}(t))\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}(\mathbf{q}(t), \dot{\mathbf{q}}(t))\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{q}(t)) \\ &= \mathbf{B}(\mathbf{q}(t))\ddot{\mathbf{q}}(t) + \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{q}(t))[\dot{\mathbf{q}}(t)\dot{\mathbf{q}}(t)] + \mathbf{g}(\mathbf{q}(t)) \\ &= \boldsymbol{\tau}_s(t) + \mathbf{g}(\mathbf{q}(t))\end{aligned}$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} = \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{q})[\dot{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}]$$

$$[\dot{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}] = [\dot{q}_1^2 \quad \dot{q}_1\dot{q}_2 \quad \dots \quad \dot{q}_{n-1}\dot{q}_n \quad \dot{q}_n^2]^T$$

★ scalatura temporale $r(t)$: $r(0) = 0$ $r(t_f) = \bar{t}_f$

$$\mathbf{q}(t) = \bar{\mathbf{q}}(r(t))$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \dot{r}\bar{\mathbf{q}}'(r)$$

$$\ddot{\mathbf{q}} = \dot{r}^2\bar{\mathbf{q}}''(r) + \ddot{r}\bar{\mathbf{q}}'(r)$$

↓

$$\boldsymbol{\tau} = \dot{r}^2 \left(\mathbf{B}(\bar{\mathbf{q}}(r))\bar{\mathbf{q}}''(r) + \boldsymbol{\Gamma}(\bar{\mathbf{q}}(r))[\bar{\mathbf{q}}'(r)\bar{\mathbf{q}}'(r)] \right) + \ddot{r}\mathbf{B}(\bar{\mathbf{q}}(r))\bar{\mathbf{q}}'(r) + \mathbf{g}(\bar{\mathbf{q}}(r)) = \boldsymbol{\tau}_s(t) + \mathbf{g}(\bar{\mathbf{q}}(r))$$

$$\bar{\boldsymbol{\tau}}_s(r) = \mathbf{B}(\bar{\mathbf{q}}(r))\bar{\mathbf{q}}''(r) + \boldsymbol{\Gamma}(\bar{\mathbf{q}}(r))[\bar{\mathbf{q}}'(r)\bar{\mathbf{q}}'(r)]$$

↓

$$\boldsymbol{\tau}_s(t) = \dot{r}^2\bar{\boldsymbol{\tau}}_s(r) + \ddot{r}\mathbf{B}(\bar{\mathbf{q}}(r))\bar{\mathbf{q}}'(r)$$

★ scelta semplice $r(t) = ct$

$$\tau_s(t) = c^2 \bar{\tau}_s(ct)$$

giunto q_i in corrispondenza della violazione maggiore

$$\frac{|\tau_s|}{|\bar{\tau}_i - g(q_i)|} = c^2$$

ATTUATORI E SENSORI

Sistema di attuazione dei giunti

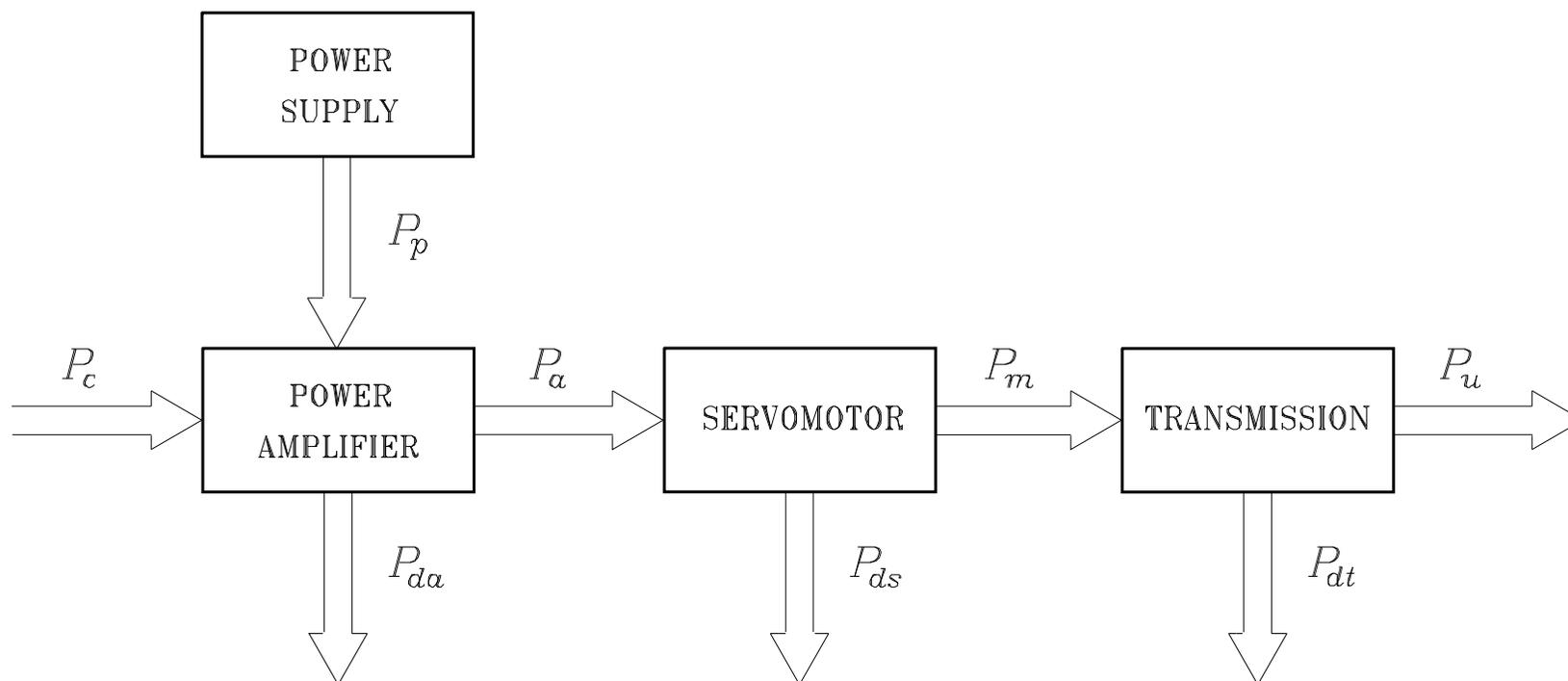
Servomotori

Classificazione di sensori

Sensori propriocettivi

Sensori esteroceettivi

SISTEMA DI ATTUAZIONE DEI GIUNTI



Organi di trasmissione

- Moto dei giunti
 - ★ basse velocità
 - ★ elevate coppie

- *Ruote dentate*
 - ★ variano l'asse di rotazione e/o traslano il punto di applicazione
 - ★ denti a sezione larga e alberi tozzi (deformazioni limitate)

- *Coppie vite–madrevite*
 - ★ convertono il moto di rotazione in moto di traslazione
 - ★ viti a ricircolazione di sfere precaricate (riduzione attriti, aumento rigidità, riduzione gioco)

- *Cinghie dentate*
 - ★ consentono di allocare il motore lontano dall'asse del giunto attuato
 - ★ alte velocità e basse forze (deformabili)

- *Catene*

- ★ consentono di allocare il motore lontano dall'asse del giunto attuato
- ★ basse velocità (vibrazione)

- *Accoppiamento diretto*

- ★ si eliminano elasticità e gioco
- ★ algoritmi di controllo più sofisticati

Servomotori

- *Motori pneumatici*
 - ★ energia pneumatica fornita da un compressore, trasformata in energia meccanica mediante pistoni o turbine ad aria

- *Motori idraulici*
 - ★ energia idraulica immagazzinata in un serbatoio di accumulazione mediante opportune pompe, trasformata in energia meccanica

- *Motori elettrici*
 - ★ energia elettrica della rete di distribuzione

- Motori per robot industriali

- ★ bassa inerzia ed elevato valore del rapporto potenza/peso
- ★ elevata possibilità di sovraccarico e sviluppo di coppie impulsive
- ★ capacità di sviluppare elevate accelerazioni
- ★ elevato campo di variazione di velocità (da 1 a 1000)
- ★ elevata precisione di posizionamento (almeno 1/1000 di giro)
- ★ basso fattore di ondulazione della coppia in modo da garantire rotazioni continue anche a bassa velocità



- Servomotori

- ★ inseguimento di traiettoria
- ★ regolazione di posizione

- Servomotori *elettrici*

- ★ servomotori in corrente continua a magneti permanenti

- ★ servomotori a commutazione elettronica
- ★ motori a passo (micromanipolatori)
- Servomotori *idraulici*
 - ★ coppia pistone–cilindro (moti di traslazione)
 - ★ servomotori idraulici con pistoni assiali o radiali

- Servomotori elettrici

Pro:

- ★ disponibilità diffusa di sorgente di alimentazione
- ★ costo contenuto e vasta gamma di prodotti
- ★ buon rendimento di conversione di potenza
- ★ facile manutenzione
- ★ assenza di inquinamento dell'ambiente di lavoro

Contro:

- ★ problemi di surriscaldamento in situazioni statiche a causa dell'effetto della gravità sul manipolatore (freni di stazionamento)
- ★ necessità di particolari protezioni per impiego in ambienti infiammabili

- Servomotori idraulici

Pro:

- ★ non presentano problemi di surriscaldamento in situazioni statiche
- ★ sono autolubrificati e il fluido circolante facilita lo smaltimento del calore
- ★ sono intrinsecamente sicuri in ambienti pericolosi
- ★ hanno un ottimo rapporto potenza/peso

Contro:

- ★ necessità di una centrale idraulica di alimentazione
- ★ costo elevato, ridotta gamma di prodotti, difficoltà di miniaturizzazione
- ★ basso rendimento nella conversione di potenza
- ★ necessità di manutenzione periodica
- ★ inquinamento dell'ambiente di lavoro per perdite di olio

- Servomotori elettrici
 - ★ buone caratteristiche dinamiche
 - ★ ottima flessibilità di controllo
 - ★ necessità di organi di trasmissione

- Servomotori idraulici
 - ★ caratteristiche dinamiche dipendenti dalla temperatura del fluido in pressione
 - ★ coppie elevate a basse velocità

Amplificatori di potenza

- Funzione di modulazione del flusso di potenza dall'alimentazione verso l'attuatore (sotto l'azione del controllo)

- Servomotori elettrici
 - ★ amplificatori a transistori
 - convertitori controllati c.c./c.c. (chopper)
 - convertitori controllati c.c./c.a. (inverter)

- Servomotori idraulici
 - ★ servovalvole elettroidrauliche

Sorgenti di alimentazione

- Azionamenti elettrici
 - ★ trasformatore + ponte raddrizzatore (non controllato)
- Azionamenti idraulici
 - ★ pompa azionata da motore primo (asincrono trifase) a velocità costante + serbatoio di accumulazione + filtri + valvole

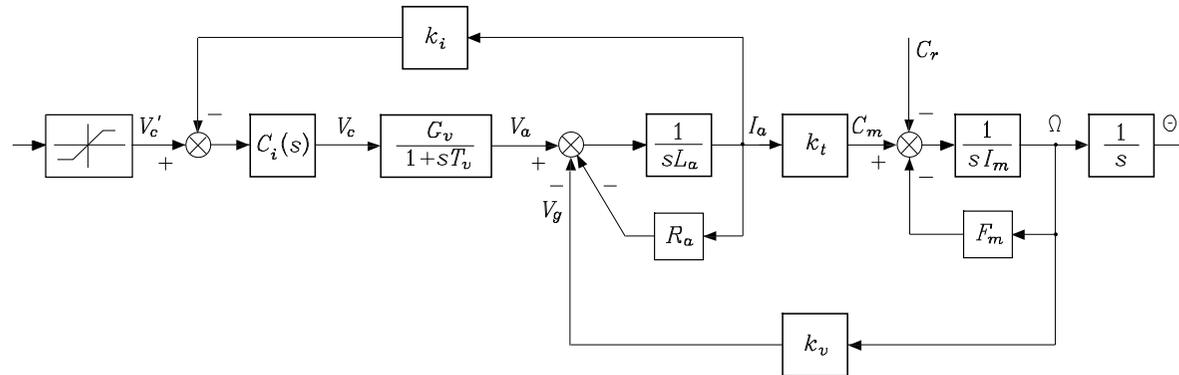
SERVOMOTORI

Servomotori elettrici

- *Servomotore a corrente continua a magneti permanenti*
 - ★ un circuito statorico che genera il flusso magnetico di eccitazione (induttore): questo generatore è sempre a magneti permanenti realizzati con materiali ceramici o con terre rare (campi elevati in spazi ridotti)
 - ★ un circuito di armatura (indotto) che reca un avvolgimento costituito dalle spire di un solenoide avvolto su materiale ferromagnetico che costituisce il rotore
 - ★ un collettore che consente di collegare, mediante delle spazzole, i circuiti rotorici ad un circuito esterno di alimentazione secondo una logica di commutazione attuata dal movimento del rotore

- *Servomotore a commutazione elettronica*
 - ★ un generatore di flusso magnetico di eccitazione (induttore) che funge da rotore; questo generatore è a magneti permanenti di materiale ceramico o a terre rare
 - ★ un circuito di armatura (indotto) costituito da un avvolgimento polifase che funge da statore
 - ★ un circuito di commutazione statico che, a partire dai segnali forniti da un sensore di posizione posto sull'albero motore, genera la sequenza di alimentazione delle fasi del circuito di armatura in dipendenza del moto di rotazione del rotore

- Servomotore elettrico con amplificatore



- Equilibrio elettrico

$$V_a = (R_a + sL_a)I_a + V_g$$

$$V_g = k_v \Omega$$

- Equilibrio meccanico

$$C_m = (sI_m + F_m)\Omega + C_r$$

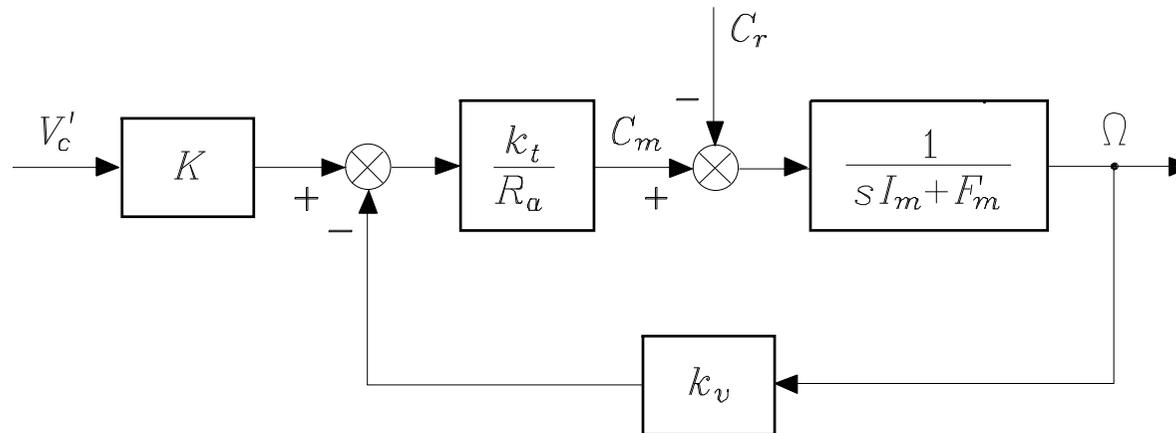
$$C_m = k_t I_a$$

- Amplificatore di potenza

$$\frac{V_a}{V_c} = \frac{G_v}{1 + sT_v}$$

- Retroazione di corrente

- Generatore controllato di velocità



- ★ $k_i = 0$

- ★ $F_m \ll k_v k_t / R_a$

- ★ $K = C_i(0)G_v$

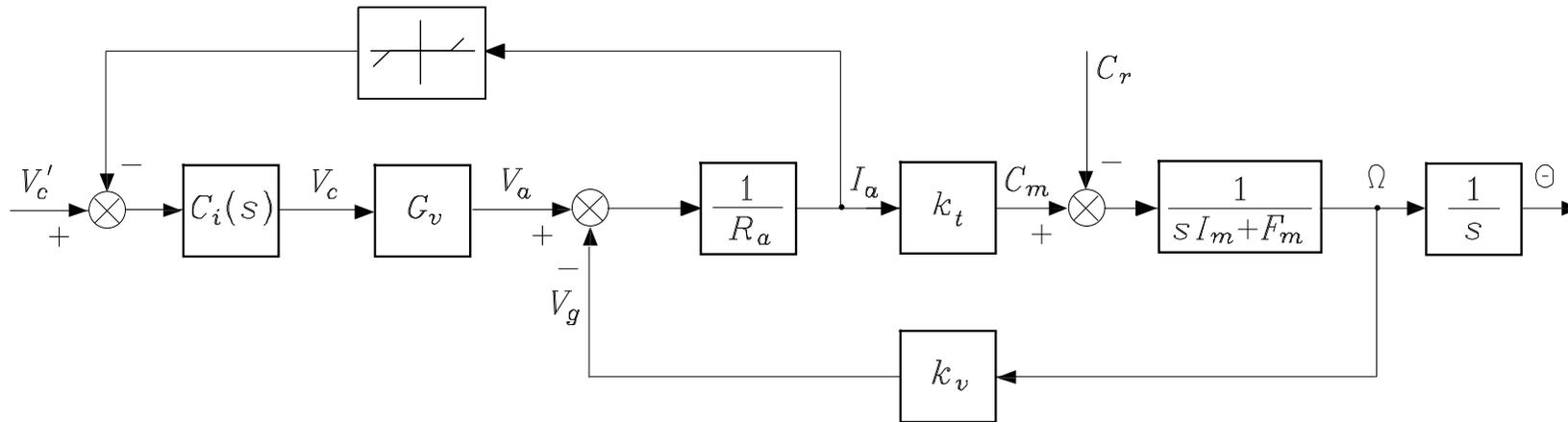
- ★ $C_r = 0$

$$\Omega = \frac{\frac{K}{k_v}}{1 + s \frac{R_a I_m}{k_v k_t}} V'_c - \frac{\frac{R_a}{k_v k_t}}{1 + s \frac{R_a I_m}{k_v k_t}} C_r$$

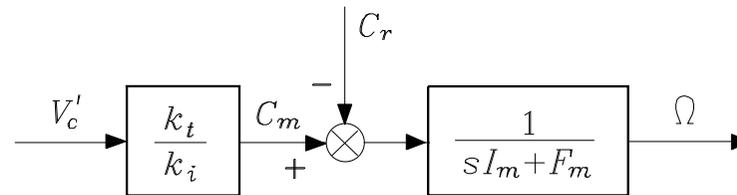
- ★ a regime:

$$\omega \approx \frac{K}{k_v} v'_c$$

- Protezione di corrente



- Generatore controllato di coppia



$$\star Kk_i \gg R_a$$

$$\star k_v \Omega / Kk_i \approx 0$$

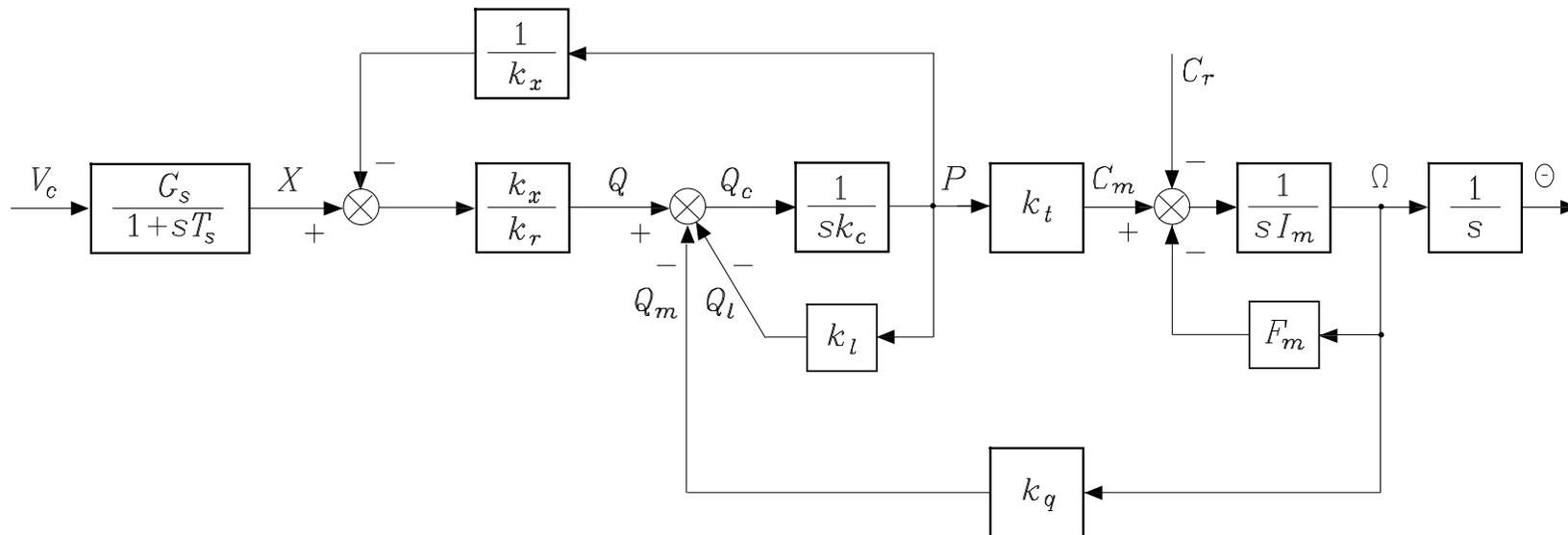
$$\Omega = \frac{\frac{k_t}{k_i F_m}}{1 + s \frac{I_m}{F_m}} V'_c - \frac{\frac{1}{F_m}}{1 + s \frac{I_m}{F_m}} C_r$$

★ a regime:

$$c_m \approx \frac{k_t}{k_i} \left(v'_c - \frac{k_v}{K} \omega \right)$$

Servomotori idraulici

- *Coppie pistone-cilindro*
 - ★ servomotori lineari
 - ★ servomotori rotanti
- Motore idraulico con servovalvola e distributore



CLASSIFICAZIONE DI SENSORI

- Sensori *eterocettivi*

- ★ sensori tattili

- ★ sensori di prossimità

- ★ sensori di campo

- ★ sistemi di visione (ad alto o basso livello)

- ★ sensori per applicazioni particolari (suono, umidità, fumo, pressione, temperatura)

 fusione dei dati sensoriali (robot \equiv organo intelligente di connessione tra percezione e azione)

- Sensori *propriocettivi*

- ★ posizioni dei giunti

- ★ velocità dei giunti

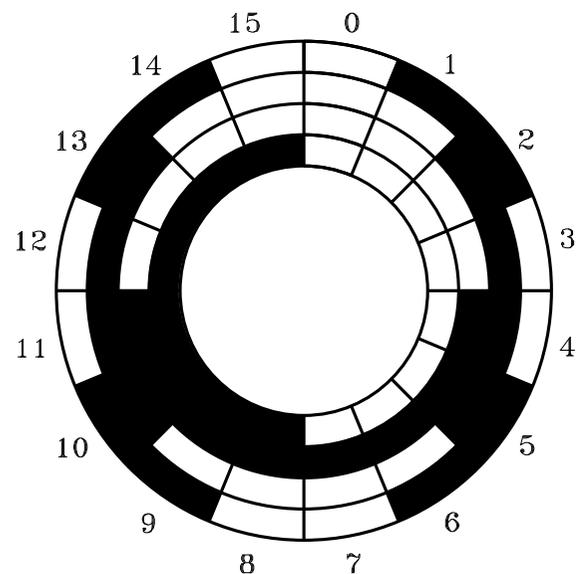
- ★ forze agenti sulla struttura meccanica

Trasduttori di posizione

- Spostamenti lineari (robot di misura)
 - ★ potenziometri
 - ★ trasformatori differenziali (LVDT)
 - ★ inductosyn

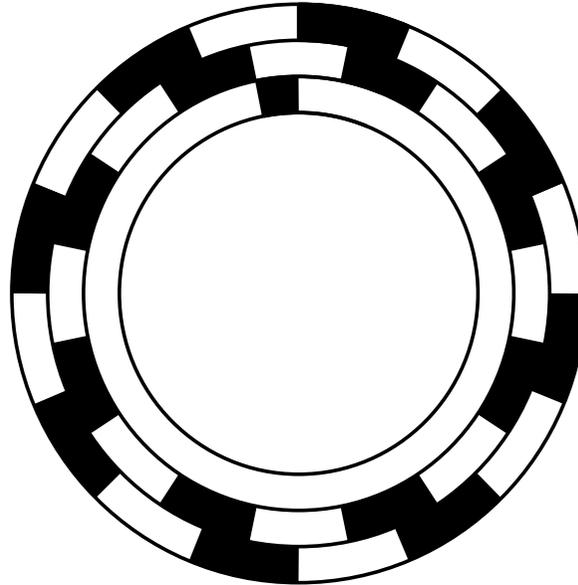
- Spostamenti angolari
 - ★ potenziometri
 - ★ encoder (dischi codificatori)
 - ★ resolver
 - ★ synchro

- Encoder assoluto



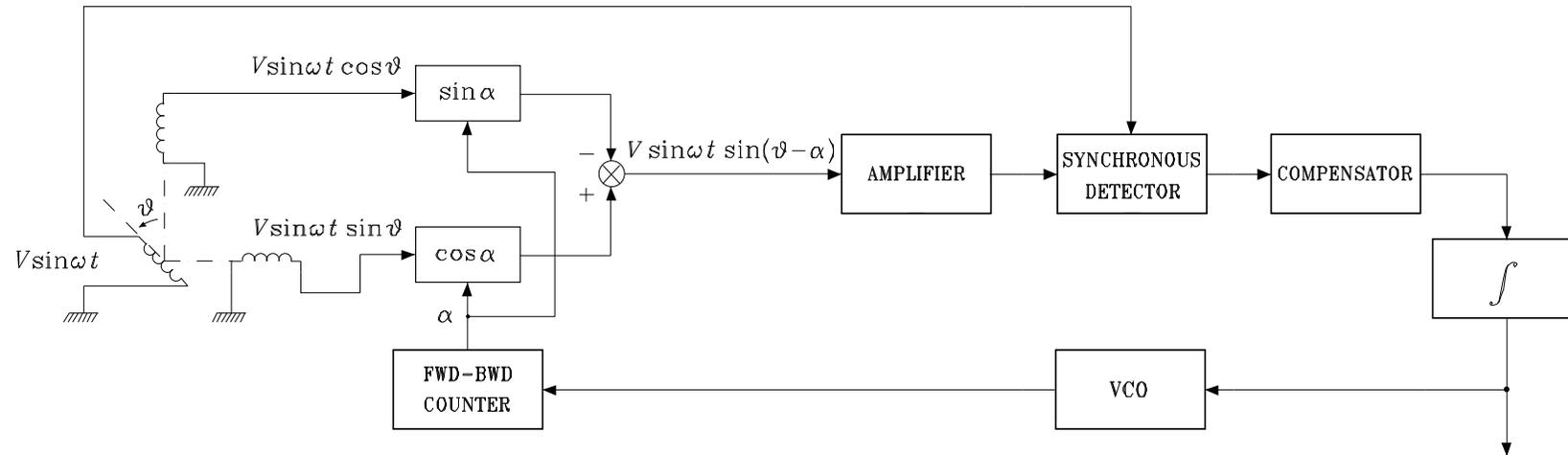
#	Codice	#	Codice
0	0000	8	1100
1	0001	9	1101
2	0011	10	1111
3	0010	11	1110
4	0110	12	1010
5	0111	13	1011
6	0101	14	1001
7	0100	15	1000

- Encoder incrementali



- Ricostruzione della velocità (impulso in corrispondenza di ogni transizione)
 - ★ convertitore frequenza/tensione (uscita analogica)
 - ★ misura della frequenza (digitale)
 - ★ misura del periodo di campionamento (digitale)

- Resolver



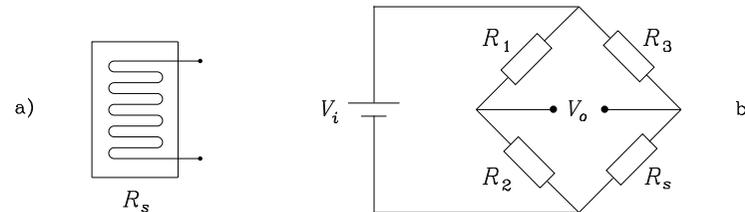
Trasduttori di velocità

- Dinamo tachimetrica
 - ★ generatore in c.c.
 - ★ magnete permanente (campo di eccitazione)
 - ★ tensione di uscita proporzionale alla velocità angolare
 - ★ ondulazione residua

- Generatore tachimetrico in corrente alternata
 - ★ macchina elettrica
 - ★ rotore a coppa (basso momento di inerzia)
 - ★ due avvolgimenti statorici in quadratura
 - ★ tensione sinusoidale proporzionale alla velocità angolare
 - ★ tensione residua a rotore fermo

Sensori di forza

- Estensimetro (*strain gage*)



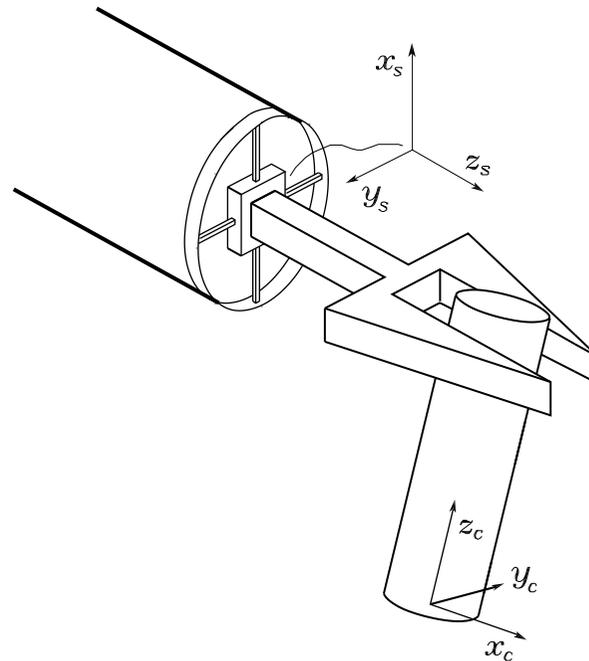
$$V_o = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_s}{R_3 + R_s} \right) V_i$$

★ impiego di una coppia di estensimetri (riduzione degli effetti di variazioni di temperatura)

- Sensore di coppia all'albero

- ★ servomotore come generatore controllato di coppia
- ★ misura di coppia con estensimetri montati su un organo deformabile (albero cavo) interposto tra motore e giunto (bassa rigidezza torsionale ed elevata rigidezza flessionale)
- ★ coppia misurata senza effetti inerziali e di attrito del servomotore

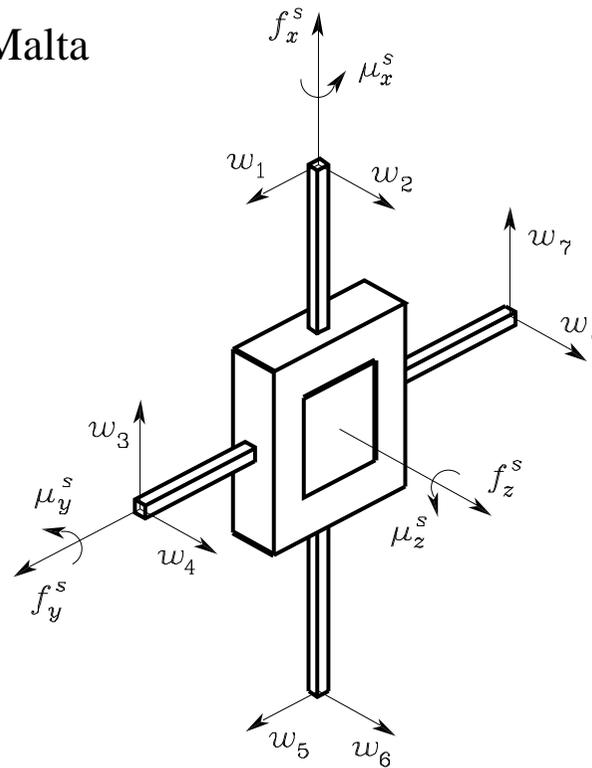
- Sensore di forza al polso



- ★ diametri ≈ 10 cm
- ★ altezza ≈ 5 cm
- ★ (50, 500) N (risoluzione 0.1%)
- ★ (5, 70) N·m (risoluzione 0.05%)
- ★ frequenza in uscita ≈ 1 kHz

$$\begin{bmatrix} f_c^c \\ \mu_c^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_s^c & O \\ S(r_{cs}^c) R_s^c & R_s^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_s^s \\ \mu_s^s \end{bmatrix}$$

★ sensore di forza a croce di Malta



$$\begin{bmatrix} f_x^s \\ f_y^s \\ f_z^s \\ \mu_x^s \\ \mu_y^s \\ \mu_z^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c_{13} & 0 & 0 & 0 & c_{17} & 0 \\ c_{21} & 0 & 0 & 0 & c_{25} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{32} & 0 & c_{34} & 0 & c_{36} & 0 & c_{38} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 & 0 & c_{48} \\ 0 & c_{52} & 0 & 0 & 0 & c_{56} & 0 & 0 \\ c_{61} & 0 & c_{63} & 0 & c_{65} & 0 & c_{67} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \\ w_7 \\ w_8 \end{bmatrix}$$

CONTROLLO

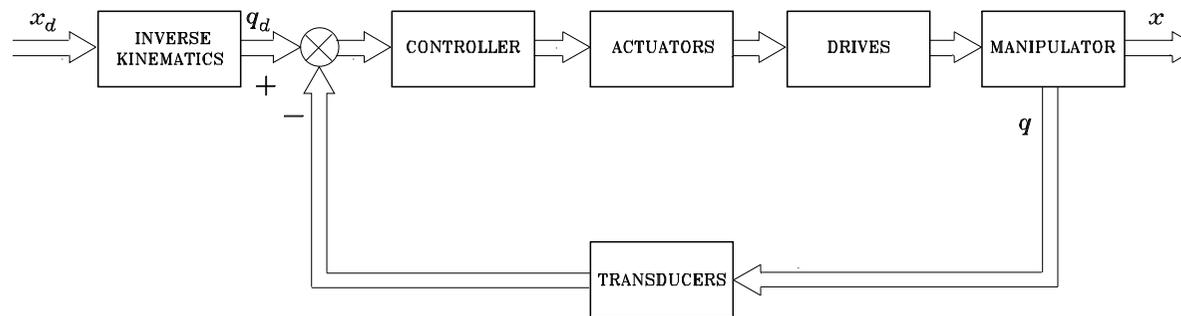
Controllo del moto

- Controllo nello spazio dei giunti
- Controllo indipendente ai giunti
- Controllo centralizzato
- Controllo nello spazio operativo

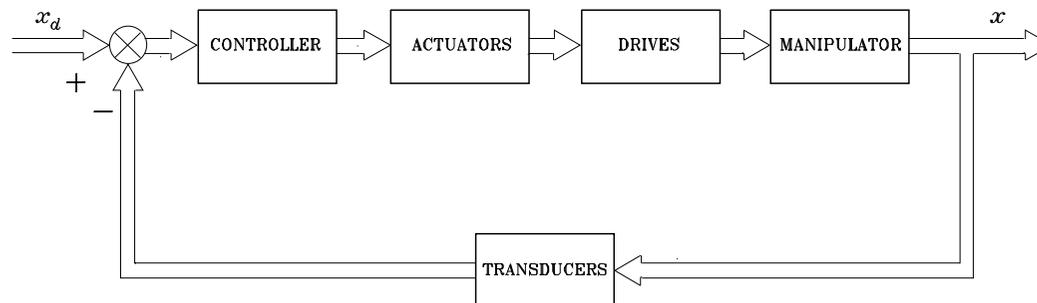
Controllo dell'interazione

IL PROBLEMA DEL CONTROLLO

- Controllo nello spazio dei giunti



- Controllo nello spazio operativo



CONTROLLO NELLO SPAZIO DEI GIUNTI

- Modello dinamico

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_v\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau}$$

- Controllo \equiv determinare $\boldsymbol{\tau}$: $\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_d(t)$

★ trasmissioni: $\mathbf{K}_r = \text{diag}\{k_{ri}\} \Rightarrow \mathbf{K}_r\mathbf{q} = \mathbf{q}_m, \quad \boldsymbol{\tau}_m = \mathbf{K}_r^{-1}\boldsymbol{\tau}$

★ inerzie medie: $\bar{\mathbf{B}} = \text{diag}\{\bar{b}_{ii}\} \Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{q}) = \bar{\mathbf{B}} + \Delta\mathbf{B}(\mathbf{q})$

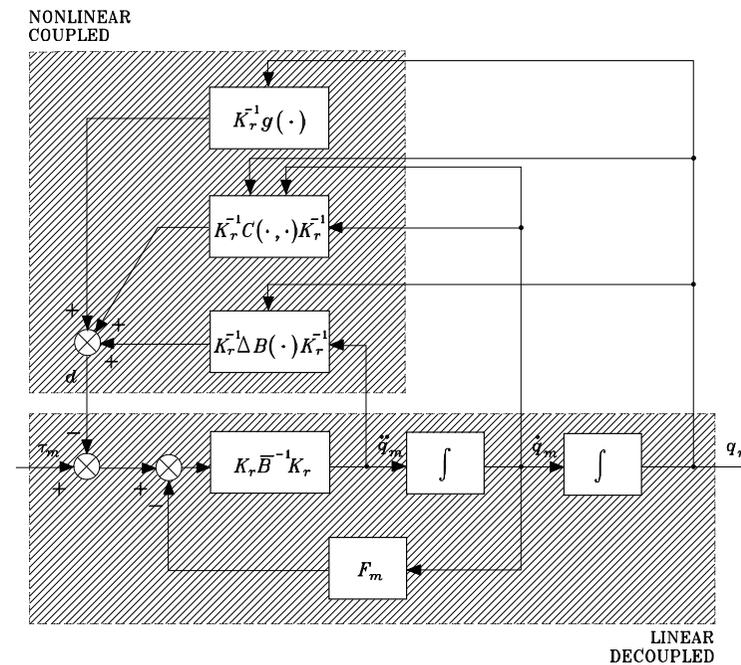
★ attrito viscoso: $\mathbf{F}_m = \mathbf{K}_r^{-1}\mathbf{F}_v\mathbf{K}_r^{-1}$

- ★ modello dinamico (\mathbf{d} = disturbo)

$$\boldsymbol{\tau}_m = \mathbf{K}_r^{-1}\bar{\mathbf{B}}\mathbf{K}_r^{-1}\ddot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{F}_m\dot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{d}$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{K}_r^{-1}\Delta\mathbf{B}(\mathbf{q})\mathbf{K}_r^{-1}\ddot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{K}_r^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\mathbf{K}_r^{-1}\dot{\mathbf{q}}_m + \mathbf{K}_r^{-1}\mathbf{g}(\mathbf{q})$$

- Manipolatore + attuatori



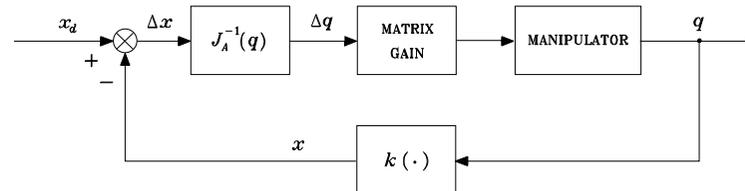
★ d trascurabile ($k_{ri} \gg 1$): controllo decentralizzato (indipendente ai giunti)

★ d non trascurabile ($k_{ri} \simeq 1$): controllo centralizzato (non lineare)

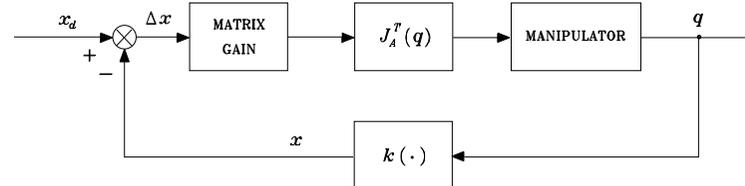
CONTROLLO NELLO SPAZIO OPERATIVO

- Specifiche di moto, relazioni cinematiche, carico computazionale
- Schemi di principio

Controllo con *inversa* dello Jacobiano: dinamica a ciclo chiuso assimilabile ad una molla generalizzata n -dimensionale agente nello spazio dei giunti con forza di richiamo $K \Delta q$



Controllo con *trasposta* dello Jacobiano: dinamica a ciclo chiuso assimilabile ad una molla generalizzata r -dimensionale agente nello spazio operativo con forza di richiamo $K \Delta x$



- Schemi di dettaglio: tipicamente di tipo centralizzato

CONTROLLO DELL'INTERAZIONE DEL MANIPOLATORE CON L'AMBIENTE

- Moto vincolato
- Controllo posizionale \Leftrightarrow pianificazione accurata del compito!
 - ★ errori di posizionamento e incertezza sull'ambiente
 - ★ contatto instabile (rigidezza dell'ambiente e accuratezza del controllo posizionale)
- Strategie di controllo con misura della forza di contatto
 - ★ indirette
 - controllo di cedevolezza*
 - controllo di impedenza*
 - ★ dirette
 - controllo di forza* (controllo con anello interno di posizione, controllo parallelo)
 - controllo ibrido forza/posizione*

UNITÀ DI GOVERNO

Architettura funzionale

Ambiente di programmazione

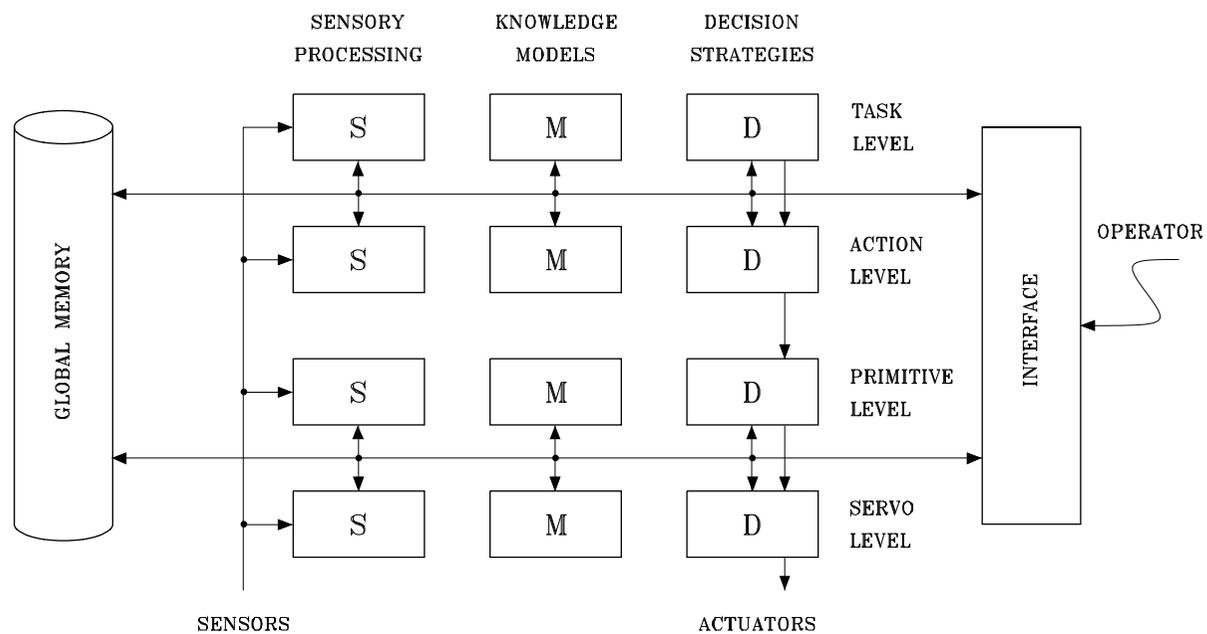
Architettura hardware

ARCHITETTURA FUNZIONALE

- L'unità di governo deve conferire al robot
 - ★ abilità di muovere oggetti fisici nell'ambiente di lavoro, (capacità di *manipolazione*)
 - ★ abilità di ottenere informazioni sullo stato del sistema e su quello dell'ambiente di lavoro (capacità *sensoriali*)
 - ★ abilità di utilizzare informazioni per modificare il comportamento del sistema in maniera preprogrammata (capacità di comportamento *intelligente*)
 - ★ abilità di immagazzinare, elaborare e rendere disponibili dati relativi all'attività del sistema (capacità di *processamento dati*)

Modello di riferimento

- Modello gerarchico suddiviso in 4 livelli e 3 tipologie di moduli funzionali (S, M, D)



- Evoluzione verso livelli superiori
 - ★ compiti complessi
 - ★ missioni

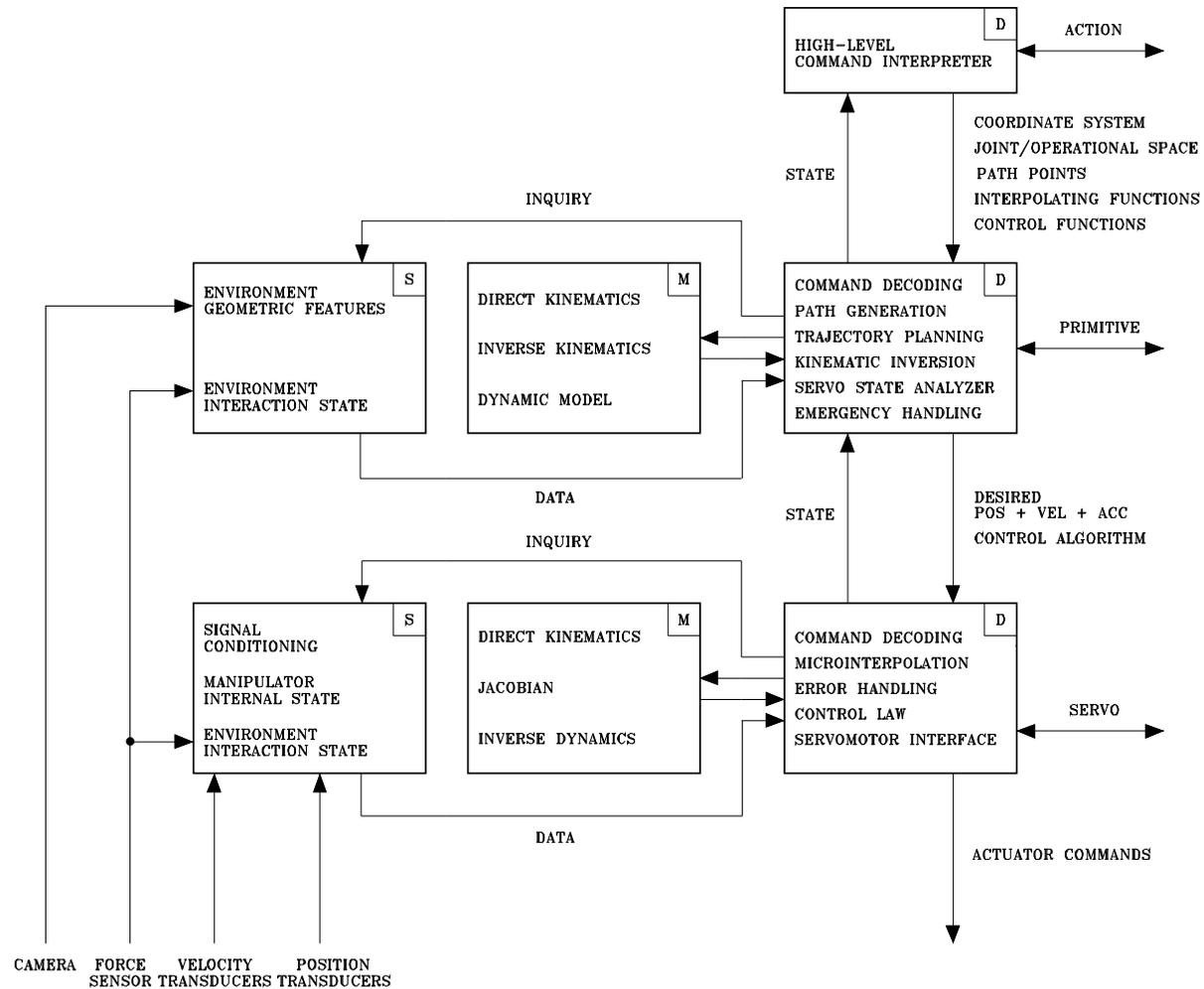
- Livello del *compito*
 - ★ specifica del compito a un livello di astrazione elevato
 - ★ decomposizione in una serie di azioni (coordinamento spazio-temporale)
 - ★ scelta sulla base dei modelli della conoscenza e delle informazioni sulla scena

- Livello delle *azioni*
 - ★ comandi simbolici dal livello del compito tradotti in percorsi di moto (azioni elementari)
 - ★ scelta sulla base dei modelli del manipolatore e delle informazioni sull'ambiente

-
- Livello delle *primitive*
 - ★ sequenza di configurazioni dal livello delle azioni
 - ★ calcolo traiettorie di moto (riferimenti per i servo)
interpolazione e cinematica inversa
 - ★ definizione della strategia di controllo
 - ★ scelta sulla base del modello dinamico e delle informazioni dei sensori

 - Livello dei *servo*
 - ★ direttive dal livello delle primitive
 - ★ calcolo algoritmi di controllo (segnali di attuazione)
 - ★ microinterpolazione
 - ★ aggiornamento sulla base delle misure dei sensori

Architettura funzionale per robot industriali



AMBIENTE DI PROGRAMMAZIONE

- Caratteristiche (comuni con quelli dei calcolatori + ...)
 - ★ sistema operativo in tempo reale
 - ★ modellazione del mondo
 - ★ controllo del moto
 - ★ lettura dei dati sensoriali
 - ★ interattività con il sistema fisico
 - ★ capacità di rivelazione di errori
 - ★ capacità di ripristino di situazioni operative corrette
 - ★ struttura specifica dei linguaggi

Requisiti imposti dall'articolazione in moduli

- Trattamento dei dati sensoriali
 - ★ servo (condizionamento segnali in tempo reale)
 - ★ primitive (dati sensoriali in terne di riferimento)
 - ★ azioni (elaborazione dati ad alto livello)
 - ★ compito (riconoscimento oggetti nella scena)

- Consultazione dei modelli di conoscenza
 - ★ servo (calcolo numerico dei modelli in tempi brevi)
 - ★ primitive (trasformazioni di coordinate)
 - ★ azioni (simulazione + rappresentazione CAD)
 - ★ compito (sistema esperto)

- Funzioni decisionali

- ★ servo (calcolo in tempo reale)
- ★ primitive (condizionamento logico)
- ★ azioni (sincronizzazione + sistema di interruzioni)
- ★ compito (gestione di processi concorrenti + debugger)

Generazioni di ambienti di programmazione

Programmazione a basso livello (Assembly, C)

- Programmazione per insegnamento
- Programmazione orientata al robot
- Programmazione orientata agli oggetti
 - ★ la generazione successiva incorpora le caratteristiche della generazione precedente

Programmazione per insegnamento

- Guida dell'operatore lungo il percorso desiderato attraverso teach pendant
- Registrazione delle posizioni dei giunti
- Ripetizione del moto
 - ★ capacità di programmazione limitata (tecnico di officina)
 - ★ disponibilità del robot
 - ★ saldatura a punti, verniciatura, palettizzazione

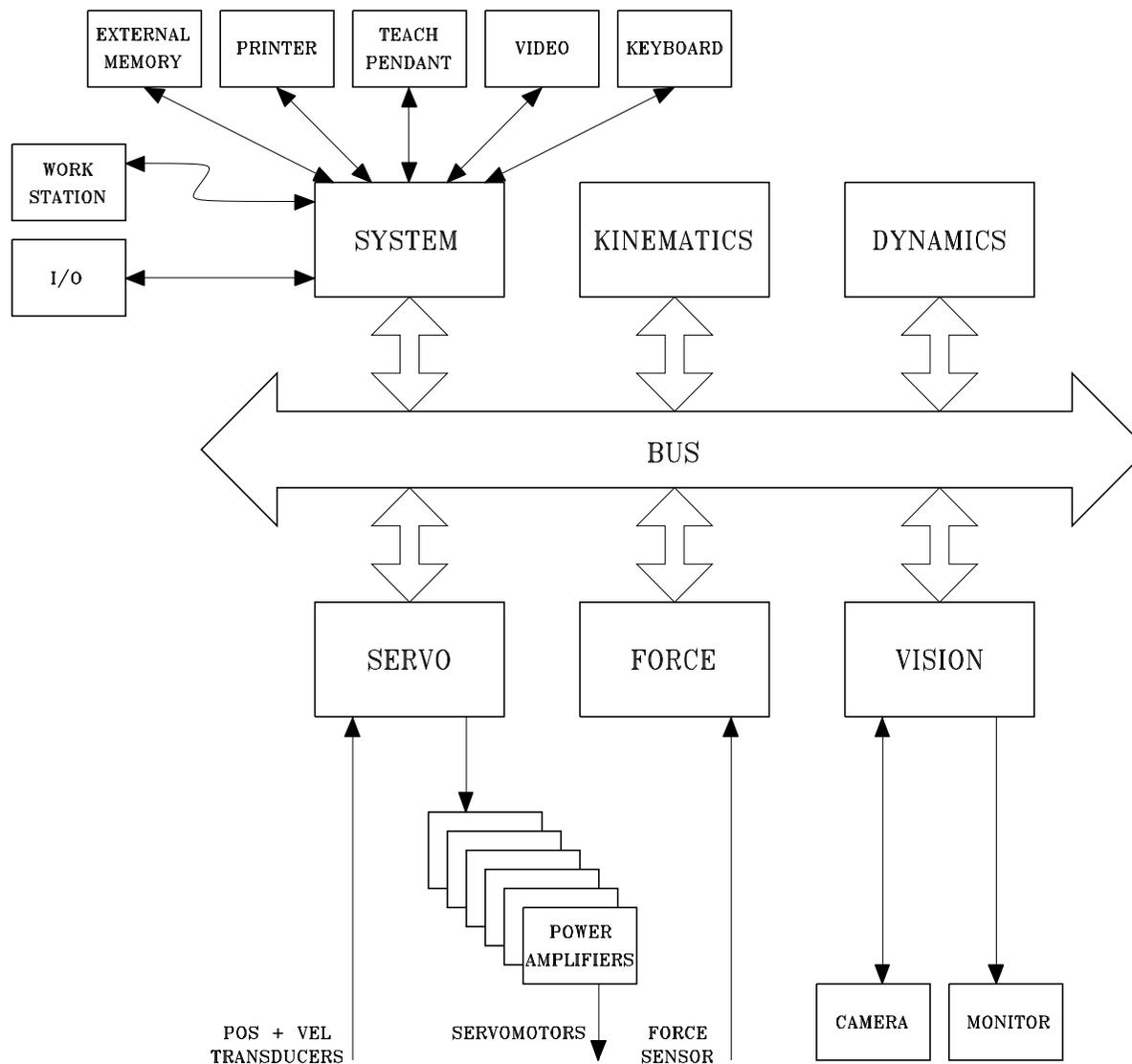
- Adozione di linguaggi
 - ★ acquisizione di posture significative mediante apprendimento
 - ★ calcolo della locazione dell'organo terminale rispetto ad una terna di riferimento (cinematica diretta)
 - ★ assegnazione di primitive di moto con parametri di traiettoria
 - ★ calcolo dei riferimenti dei servo (cinematica inversa)
 - ★ condizionamento delle sequenze di apprendimento a semplici sensori (presenza oggetto nella pinza)
 - ★ correzione delle sequenze di moto a mezzo di semplici editori di testo
 - ★ semplici operazioni di collegamento tra sottoinsiemi di sequenze elementari

Programmazione orientata al robot

- ★ integrazione di numerose funzioni di linguaggi di programmazione ad alto livello (BASIC, PASCAL) con quelle specifiche richieste nelle applicazioni robotiche
- Alternative
 - ★ sviluppo di *linguaggi ad hoc* per applicazioni robotiche
 - ★ sviluppo di *librerie di programmi* per robotica di supporto a linguaggi standard di programmazione
 - ★ programmatore esperto
 - ★ programmazione fuori linea
 - ★ interazione con altre macchine

- Caratteristiche di linguaggio di *programmazione strutturata*
 - ★ editore di testo
 - ★ strutture complesse di rappresentazione dei dati
 - ★ uso estensivo di variabili di stato predefinite
 - ★ realizzazione di operazioni di algebra matriciale
 - ★ uso estensivo di rappresentazioni simboliche per le terne di coordinate
 - ★ possibilità di specificare il moto coordinato di più terne relative ad oggetti connessi rigidamente per il tramite di una sola terna
 - ★ inclusione di sottoprogrammi con scambio di dati e parametri
 - ★ uso di funzioni di condizionamento logico e cicli di attesa mediante semafori
 - ★ capacità di parallelizzazione del calcolo
 - ★ funzioni di controllore logico programmabile (PLC)

ARCHITETTURA HARDWARE



- Scheda *sistema*

- ★ un microprocessore con coprocessore matematico
- ★ una memoria EPROM di inizializzazione
- ★ una memoria RAM locale
- ★ una memoria RAM condivisa con le altre schede attraverso il bus
- ★ un insieme di porte seriali e parallele di interfaccia con il bus e con il mondo esterno
- ★ contatori, registri, temporizzatori
- ★ gestore delle interruzioni

- Funzioni

- ★ interfaccia con l'operatore attraverso teach pendant, tastiera, video, stampante
- ★ interfaccia con una memoria esterna (disco rigido) usata per immagazzinare dati e programmi applicativi
- ★ interfaccia con rete locale di connessione (ad esempio, Ethernet) con stazioni di lavoro e con altre unità di governo
- ★ interfaccia I/O con apparecchiature periferiche presenti nell'area di lavoro (alimentatori, nastri trasportatori, sensori ON/OFF)
- ★ inizializzazione del sistema
- ★ interprete del linguaggio di programmazione
- ★ arbitro del bus

- Processori suppletivi o alternativi (DSP, Transputer)

- Funzioni della scheda *cinematica*
 - ★ calcolo delle primitive di moto
 - ★ calcolo della cinematica diretta, della cinematica inversa e dello Jacobiano
 - ★ verifica di congruenza della traiettoria
 - ★ gestione della ridondanza cinematica

- Funzioni della scheda *dinamica*
 - ★ calcolo della dinamica inversa

- Funzioni della scheda *servo*
 - ★ microinterpolazione dei riferimenti
 - ★ calcolo dell'algoritmo di controllo
 - ★ conversione D/A ed interfaccia con amplificatori di potenza
 - ★ trattamento dati dei trasduttori di posizione e di velocità
 - ★ interruzione del moto in situazioni di malfunzionamento

- Funzioni della scheda *forza*
 - ★ condizionamento dei segnali forniti dal sensore di forza
 - ★ rappresentazione delle forze in terne di coordinate assegnate

- Funzioni della scheda *visione*
 - ★ elaborazione dei segnali forniti dalla telecamera
 - ★ estrazione di caratteristiche geometriche della scena
 - ★ localizzazione degli oggetti in terne di coordinate assegnate