Corso di Laurea triennale in Ingegneria Chimica

in condivisione con

Corso di Laurea triennale in

Ingegneria Navale e Scienze dei Materiali

Elementi di Informatica

A.A. 2016/17

prof. Mario Barbareschi

Cenni di Algebra Booleana

Informazioni di Licenza

Proposizioni Logiche

- Una **proposizione semplice** è qualsiasi **enunciato** che può assumere soltanto valore **vero** o **falso** (sono frasi di situazioni di fatto!)

  Esempio:
  - “La capitale d’Italia è Roma”.
  - “Oggi è martedì”.
  - “Questo è il corso di Elementi di Informatica”.

- L’enunciato o è **vero** o **falso**, esso si dice avere un valore **logico** (che è binario, variando tra due scelte, i due valori di verità).
- I concetti della logica delle proposizioni risalgono sino ad Aristotele.

Proposizioni Logiche

- Le proposizioni possono essere composte in **espressioni logiche** tramite **congiunzioni proposizionali (o connettivi logici)**:
  - **la congiunzione** (e), indicata anche con simbolo (**^**), e chiamata anche **prodotto logico.**
  - **la disgiunzione** (o, oppure), indicata anche con simbolo (**v**), e chiamata anche **somma logica.**
  - **la negazione** (non), indicata anche con simbolo (**¬**).

  Esempio:
  - "La capitale d'Italia è Roma" **e** "La capitale della Francia è Berlino".
  - "La capitale della Russia è Mosca" **oppure** "La capitale della Russia è Budapest".
  - "La capitale della Spagna **non** è New York".

I connettivi logici

- I **connettivi logici** agiscono come **operatori** **sulle proposizioni logiche** e la verità dell'**espressione logica** dipende **dalla verità** delle **proposizioni composte**.
  - **Congiunzione:** è vera solo se **entrambe** le proposizioni semplici sono vere.
  - **Disgiunzione**: è vera se **almeno una** delle due proposizioni semplici è Vera.
  - **Negazione**: è vera se la proposizione è falsa.

Cong. (∧)	**F**	**V**
F	F	F
V	F	V

Disg. (∨)	**F**	**V**
F	F	V
V	V	V

	Neg. (¬)
F	V
V	F

Notiamo che la congiunzione e la disgiunzione sono operatori binari (associano coppie di valori), la negazione è un operatore unario!

Esempio operatore di congiunzione

La capitale d'Italia è Roma	**e**	**La capitale della Francia è Berlino**	
VERO	Cong.	FALSO	FALSO

Studio alla Federico II	**e**	**Seguo Elementi di Informatica**	
VERO	Cong.	VERO	VERO

5 è minore di 2	**e**	**8 è un numero primo**	
FALSO	Cong.	FALSO	FALSO

Il cane è un bipede	**e**	**La balena è un mammifero**	
FALSO	Cong.	VERO	FALSO

Cong. ($\wedge$)	**F**	**V**
F	F	F
V	F	V

Esempio operatore di disgiunzione

La capitale d'Italia è Roma	**o**	**La capitale della Francia è Berlino**	
VERO	Disg.	FALSO	VERO

Studio alla Federico II	**o**	**Seguo Elementi di Informatica**	
VERO	Disg.	VERO	VERO

5 è minore di 2	**o**	**8 è un numero primo**	
FALSO	Disg.	FALSO	FALSO

Il cane è un bipede	**o**	**La balena è un mammifero**	
FALSO	Disg.	VERO	VERO

Disg. ($\vee$)	**F**	**V**
F	F	V
V	V	V

Esempio operatore di negazione

La capitale d'Italia è Roma	Negazione
VERO	FALSO

La capitale della Francia è Parigi	Negazione
FALSO	VERO

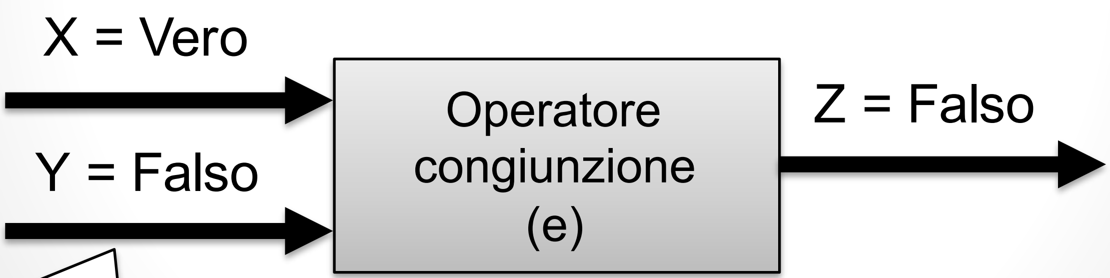
	Neg. (¬)
F	V
V	F

Proposizioni Composte

- Possiamo modellare **i connettivi logici** come **funzioni logiche**, ovvero **funzioni con valori in ingresso ed uscita logici** {Vero, Falso}.

Oggi è martedì **e** c'è il sole
X = "Oggi è martedì" = Vero.
Y = "C'è il sole" = Falso.
Z = X **e** Y = Falso

B = {Vero, Falso}
Congiunzione: $B \times B \rightarrow B$
Disgiunzione: $B \times B \rightarrow B$
Negazione: $B \rightarrow B$



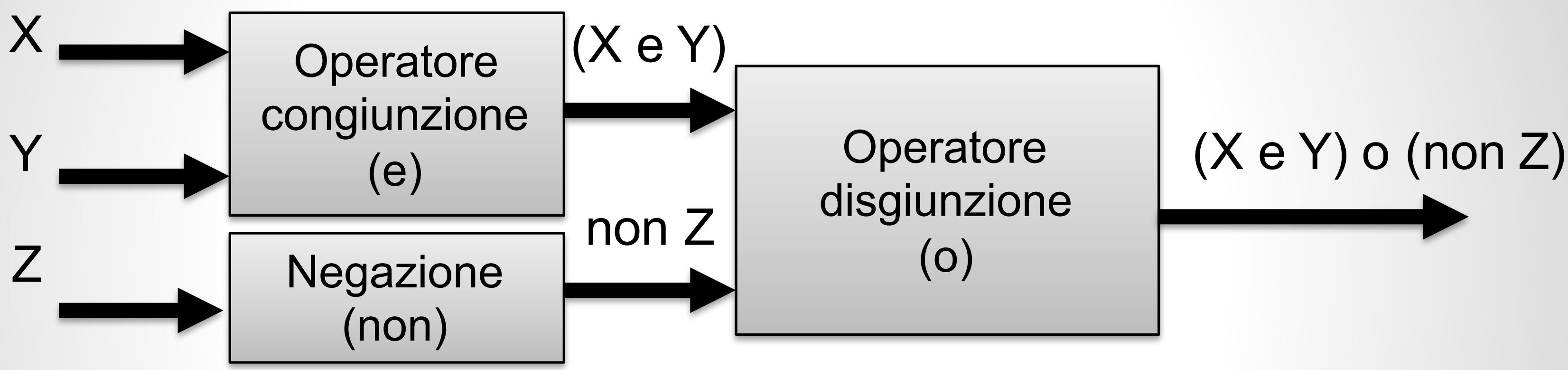
Nel nostro caso i valori in ingresso sono la verità delle proposizioni semplici

Z = e(X, Y) = X e Y

Notazione infissa

Tabelle di verità

- La **rappresentazione tabellare** di una qualsiasi **funzione logica** è detta **tabella di verità**: questa descrive il valore di proposizioni composte al variare della verità delle proposizioni semplici in ingresso.



X	Y	Z	(X e Y)	Non Z	(X e Y) o (non Z)
Falso	Falso	Falso	Falso	Vero	Vero
Falso	Falso	Vero	Falso	Falso	Falso
Falso	Vero	Falso	Falso	Vero	Vero
Falso	Vero	Vero	Falso	Falso	Falso
Vero	Falso	Falso	Falso	Vero	Vero
Vero	Falso	Vero	Falso	Falso	Falso
Vero	Vero	Falso	Vero	Vero	Vero
Vero	Vero	Vero	Vero	Falso	Vero

Operatori di Confronto

- Gli **operatori di confronto (o di relazione)** verificano e stabiliscono relazioni **tra coppie di valori di un insieme**. I più noti sono quelli che confrontano **insiemi numerici**:
  - uguale (simbolo '=')
  - diverso (simbolo '≠')
  - maggiore (simbolo '>')
  - minore (simbolo '<')
  - maggiore o uguale (simbolo '≥')
  - minore o uguale (simbolo '≤')

- Il **risultato di un confronto** assume valore **Vero** o **Falso** **(ovvero, un valore logico)** pertanto lo possiamo comporre in predicati:

  5 < 3 ? Falso

  -1 > -5 ? Vero

Esercizio: operatori di confronto (1/2)

- Costruire la tabella di verità della seguente espressione logica:

  Y = ((X >= 5) e (X <= 10))

X >= 5	**X <= 10**	**Y**
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

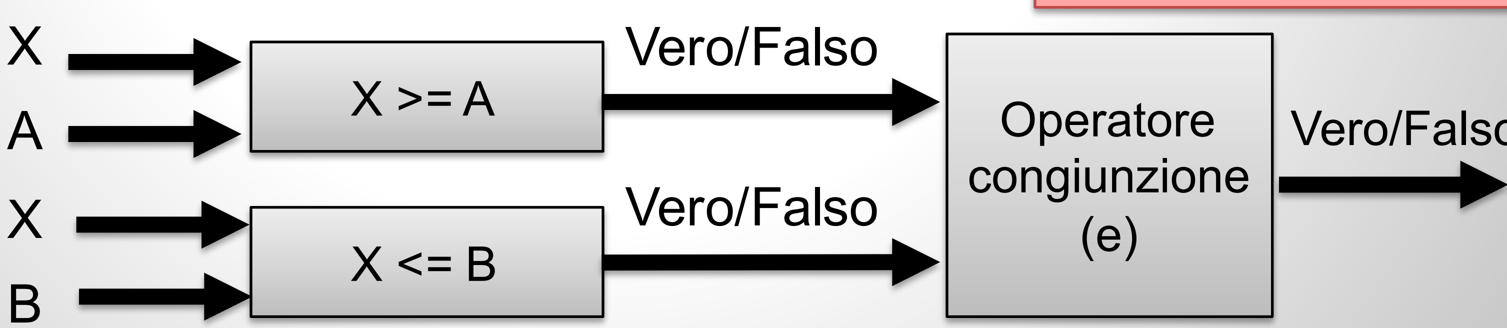
Gli operatori di confronto permettono di creare proposizioni su insiemi non esclusivamente logici (es. su insiemi numerici)

Per quali valori interi di X l'espressione è vera?

$X \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
ovvero quando il numero X appartiene all'intervallo [5; 10].

Risultati sono valori logici (V/F)

X, A, B sono valori numerici!



Esercizio: operatori di confronto (2/2)

- Stabilire il valore di verità delle seguenti espressioni logiche:

  (5 < 10) e (10 = 10)

  (7 >= 7) o (1 < 0)

  (“oggi è il giorno 1/1/1990”) o (7 è un numero primo)

  (81 < 90)

  Non è vero che (81 < 90)

  (81 >= 90)

  ((10 diverso da 9) e (5 >= 3) e “7 è pari”) o (“Roma è la capitale d’Italia”)

La logica delle Proposizioni e l’algebra di Boole

- **George Boole** (1815-1864) studiò **un modello matematico** per descrivere in **forma algebrica** la logica delle proposizioni e definì la cosiddetta **algebra di Boole.**
- L’algebra di Boole ha avuto importanti risvolti ed applicazioni pratiche nelle scienze fisiche, in particolare nel campo dei calcolatori e dell’elettronica:
- Ad esempio, si dimostra che è sempre possibile realizzare una qualsiasi tabella di verità componendo i connettivi logici (e, o, non): ciò nell’elettronica rivela che **è possibile realizzare qualsiasi circuito digitale** (e dunque calcolatori digitali) con **pochi componenti elettronici elementari** realizzabili.

Definizione dell'Algebra di Boole

- Un **insieme K** è un'**algebra** se **in esso sono definite due leggi binarie di composizione interna**, ossia **due funzioni** che facciano corrispondere **ad una qualsiasi coppia di elementi di K ancora un elemento di K.**
- Indicando con + e · le due leggi binarie, un'algebra è la tripla:

  <K, +, · >

- L'**algebra di Boole** è un'algebra che è **dotata di specifiche proprietà:** è un reticolo distribuitivo, dotato di minimo (simbolo 0) e massimo (simbolo 1) assoluti e complementato (simbolo -). È la sestupla:

  <K, +, · , -, 0, 1**>**

- L'algebra di Boole **NON** definisce **l'insieme di sostegno K**, **NÉ le operazioni**, ma soltanto i **postulati** che valgono tra loro.

Postulati dell'algebra di Boole

Commutativa	P1	a+b = b+a	P'1	a•b = b•a
Associativa	P2	(a+b)+c = a+(b+c)	P'2	(a•b)•c = a•(b•c)
Idempotenza	P3	a+a = a	P'3	a•a = a
Assorbimento	P4	a+a•b = a	P'4	a•(a+b) = a
Distributiva	P5	a•(b+c) = a•b+a•c	P'5	a+b•c = (a+b)•(a+c)
Min e max	P6	a•0 = 0	P'6	a+1 = 1
Complemento	P7	a•ā = 0	P'7	a+ā = 1

Algebra di Boole e Logica delle proposizioni

- Se definiamo **l'insieme K** e **le operazioni**, abbiamo **un modello di algebra di Boole**:
  - I modelli di algebra di Boole più semplici (e più impiegati) usano insiemi K di soli due elementi (cardinalità di K = 2).

- La **logica delle proposizioni** è un modello di algebra di Boole, perché secondo le definizioni che si danno delle operazioni sulle proposizioni si dimostra che nel modello valgono i 14 postulati dell'algebra di Boole:

  <{Vero, Falso}, o, e, non, Falso, Vero>

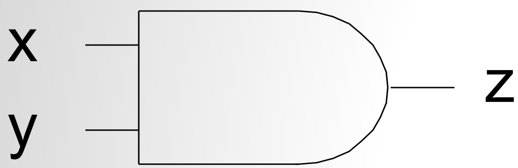
- Siccome i **valori logici** (Vero, Falso) rispettano le leggi dell'algebra di Boole, possiamo riferirci a loro come **valori booleani.**
- Analogamente, possiamo chiamare le **funzioni logiche** anche **funzioni booleane**, avendo in ingresso ed uscita valori booleani, ovvero valori che rispettano un'algebra di Boole.

Proprietà della logica delle proposizioni

Commutativa	P1	A oppure B = B oppure A	P'1	A e B = B e A
Associativa	P2	(A oppure B) oppure C = A oppure (B oppure C)	P'2	(A e B) e C = A e (B e C)
Idempotenza	P3	A oppure A = A	P'3	A e A = A
Assorbimento	P4	A oppure (A e B) = A	P'4	A e (A oppure B) = A
Distributiva	P5	A e (B oppure C) = (A e B) oppure (A e C)	P'5	A oppure (B e C) = (A oppure B) e (A oppure C)
Min e max	P6	A e Falso = Falso	P'6	A oppure Vero = Vero
Complemento	P7	A e (non A) = Falso	P'7	A oppure (non A) = Vero

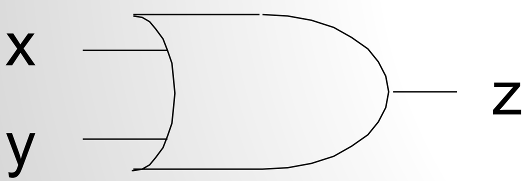
Algebra dei circuiti

- In elettronica si utilizza l'algebra dei circuiti per modellare circuiti digitali.
- L'algebra dei circuiti è un'algebra di boole che utilizza componenti circuitali elementari, le porte logiche, per trasformare segnali digitali.



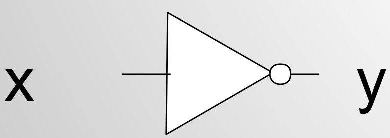
z = x AND y

x	y	x AND y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



z = x OR y

x	y	x OR y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



y = NOT x

x	NOT x
0	1
1	0

Logica delle proposizioni e scelte

- Grazie al valore (non ambiguo!) di **verità o falsità delle espressioni logiche** è possibile compiere delle **scelte**

se (“c’è fila all’ufficio postale”) e
(“ho altri impegni nella giornata”) e
(“le bollette da pagare non scadono oggi”) allora:
ritorna il giorno dopo.

If (X and Y and Z) **then:**
do *action*.

L’azione è eseguita solo quando l’espressione assume valore di verità!

Logica delle proposizioni e scelte

Es.: nei giorni stabiliti di blocco del traffico, possono circolare solo le auto conformi alle norme antinquinamento EURO 6, oppure le auto con almeno tre passeggeri.

Se "oggi c'è il blocco del traffico" e
"la mia auto NON è EURO 6" e
"ho meno di tre passeggeri in auto" allora:
prendi l'autobus.
Altrimenti:
prendi l'auto.

Logica delle proposizioni e scelte

Se "oggi c'è il blocco del traffico" e
"la mia auto NON è EURO 6" e
"ho meno di tre passeggeri in auto" allora:
prendi l'autobus.
Altrimenti:
prendi l'auto.

X=Oggi blocco traffico	**Y=La mia auto è EURO 6**	**Z=Passeggeri < 3**	**Non Y**	**X e (non Y) e Z**	**Azione**
F	F	F	V	F	Auto
F	F	V	V	F	Auto
F	V	F	F	F	Auto
F	V	V	F	F	Auto
V	F	F	V	F	Auto
V	**F**	**V**	**V**	**V**	**Autobus**
V	V	F	F	F	Auto
V	V	V	F	F	Auto

Logica delle proposizioni e scelte

Se "oggi piove" e
("non ho l'ombrello" o
"non ho voglia di uscire") allora:
rimani a casa.
Altrimenti:
esci da casa.

X=Oggi piove	**Y=ho l'ombrello**	**Z=ho voglia di uscire**	**(Non Y) o (Non Z)**	**X e ((Non Y) o (Non Z))**	**Azione**
F	F	F	V	F	Esci
F	F	V	V	F	Esci
F	V	F	V	F	Esci
F	V	V	F	F	Esci
V	**F**	**F**	**V**	**V**	**Rimani**
V	**F**	**V**	**V**	**V**	**Rimani**
V	**V**	**F**	**V**	**V**	**Rimani**
V	V	V	F	F	Esci