

Cognome

15-1-2013 (J-Z)

Nome

Matricola

Prima parte

1. Lo studente esibisca una base \mathcal{B} di uno spazio vettoriale W di \mathbb{R}^4 di dimensione 2 contenente $(2, 2, 2, 2)$ ma non $(0, 1, 0, 1)$;
 - nel caso esista, mostri un sistema $[\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3, \underline{w}_4]$ di generatori per W ;
 - calcoli le componenti rispetto alla base \mathcal{B} di due vettori \underline{u}_1 e \underline{u}_2 fissati a sua scelta in W ;
 - dica per quali $k \in \mathbb{R}$, la quadrupla $(0, 0, k, 0)$ sta in W .
2. Lo studente scelga in $\mathcal{M}_{2 \times 2}$ una matrice invertibile B e risolva, nei casi di compatibilità il sistema $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ h & 1 \end{pmatrix} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. Si determini l'equazione della retta r_{AB} passante per i punti $A \equiv (1, -2, 0)$ e $B \equiv (0, -2, 1)$.
Determinare poi le equazioni di un piano π contenente la retta r_{AB} e non parallelo a \underline{j} , nonché quelle di una retta s contenuta in π che non abbia alcun punto in comune con r_{AB} .

Seconda parte

1. Fissato un riferimento $(O, [\underline{i}, \underline{j}])$, del piano tale che la lunghezza di \underline{i} valga 2, quella di \underline{j} sia 1, e l'angolo fra essi formato sia $\pi/6$, determinare la lunghezza di un vettore \underline{v} scelto dallo studente fra quelli paralleli a r di equazione $x + y + 1 = 0$.
Che equazione ha la retta r nel riferimento $([O, -2\underline{i}, -\underline{j}])$?

2. Si determinino basi dell'immagine e di ciascun autospazio relativi all'endomorfismo

$$f : (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (-3x_1, x_2 + 7x_3, x_2 + 7x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Esistono sottospazi di $U = \langle x^5 + 2, x^3 \rangle$ NON isomorfi né all'immagine di f , né ad alcun autospazio di f ? Se la risposta è positiva, esibirne uno.

3. Dopo aver classificato le coniche di equazione

$$\Gamma_k) x^2 + 2kxy + y^2 - 2y + 1 = 0,$$

si individui il punto doppio di quella riducibile e il centro di una delle parabole.