

APPUNTI SU FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE E LORO LIMITI

1. LIMITI

Definizione 1 (Funzione continua). Una funzione $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ si dice continua in $x_0 \in D$ se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

$f(x)$ si dice continua in un insieme $I \subset D$ se è continua in ogni punto di I .

1.1. Limiti di funzioni elementari: Tutte le funzioni elementari sono continue in tutto il loro dominio. Vediamo i limiti per $x \rightarrow x_0$ quando x_0 non è nel dominio.

Funzioni potenza

$a > 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} x^a = (0)^a = 0$	$\lim_{x \rightarrow \infty} x^a = +\infty$
$a < 0$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^a = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow \infty} x^a = 0$

Se l'esponente è un numero razionale con denominatore dispari ($a = p/q$ con p, q primi tra loro e q dispari) ha senso considerare anche i limiti a $-\infty$ e a 0^- .

$p/q > 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} x^{p/q} = 0$	$\lim_{x \rightarrow \infty} x^a = (+\infty)^a = +\infty$
$p/q < 0$, e p pari	$\lim_{x \rightarrow 0^-} x^{p/q} = (0)^{p/q} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow \infty} x^a = (+\infty)^a = 0$

Funzione esponenziale

$a > 1$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$	$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = +\infty$
$0 < a < 1$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$

È utile ricordarsi che $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$.

Funzione logaritmo

$a > 1$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln_a(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln_a(x) = +\infty$
$0 < a < 1$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln_a(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln_a(x) = -\infty$

I limiti per $x \rightarrow \pm\infty$ di $\sin(x)$ e $\cos(x)$ non esistono dato che $\sin(x)$ e $\cos(x)$ sono funzioni periodiche non costanti.

1.2. operazioni sui limiti. Per dedurre i limiti delle funzioni ottenute sommando moltiplicando dividendo e componendo funzioni elementari è utile il seguente

Teorema 1. Date $f(x)$ e $g(x)$ supponiamo che esistano i limiti $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2 \in \mathbb{R}$. Supponiamo inoltre che $l_1 \neq 0$ e $l_2 \neq 0$. Allora vale:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \times g(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \times \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$

Vorremmo applicare queste formule anche quando l_1 o l_2 prendono il valore 0 o $+\infty$ o $-\infty$. È utile introdurre la seguente definizione:

Definizione 2. Data la funzione $f(x)$ e il punto x_0 supponiamo che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ e che esiste un intorno I_{x_0} tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in (I_{x_0} \cap D) \setminus \{x_0\}$. Indicheremo allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0^+$. Allo stesso modo se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ e esiste un intorno I_{x_0} tale che $f(x) < 0$ per ogni $x \in (I_{x_0} \cap D) \setminus \{x_0\}$. Indicheremo $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0^-$.

Nota bene: Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ e $f(x)$ non è costantemente zero, ci sono tre possibilità:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0^+$: in tal caso $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$;
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0^-$: in tal caso $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$;
3. Per ogni intorno I_{x_0} esistono punti $x_1, x_2 \in (I_{x_0} \cap D) \setminus \{x_0\}$ tali che $f(x_1) > 0$ e $f(x_2) < 0$; in tal caso $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$ non esiste.

Si costruisce una aritmetica sulla retta estesa $\mathbb{R}^*$ ponendo le seguenti regole:

- Se $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ valgono le solite regole.
- $0 \times 0 = 0 \times a = \frac{0}{a} = 0$ per ogni $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$.
- $a + 0 = a - 0 = a$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.
- $+\infty \times +\infty = -\infty \times -\infty = +\infty$, $+\infty \times -\infty = -\infty$.
- $+\infty \times a = +\infty$ se $a > 0$ e $+\infty \times a = -\infty$ se $a < 0$.
- $\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$.
- $+\infty + a = +\infty$ e $-\infty + a = -\infty$ per ogni $a \in \mathbb{R}$. $+\infty + \infty = +\infty$ e $-\infty - \infty = -\infty$.
- $(+\infty)^a = +\infty$ se $a > 0$ mentre $(+\infty)^a = 0$ se $a < 0$.
- $(-\infty)^a$ è ben definito se $a = \frac{p}{q}$ con q dispari. In tal caso se a è positivo: $(-\infty)^a = +\infty$ se p è pari e $(-\infty)^a = -\infty$ altrimenti. Se a è negativo $(-\infty)^a = 0$.
- $a^0 = 1$, $a^{+\infty} = +\infty$ se $a > 1$ $a^{+\infty} = 0$ se $a < 1$.
- L'espressione $\frac{a}{0}$ è indeterminata ma $\frac{1}{0^+} = +\infty$ e $\frac{1}{0^-} = -\infty$.
- Le espressioni

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad , \quad 1^{\pm\infty}, \quad (\infty)^0, \quad 0^\infty, 0^0$$

sono indeterminate.

Tabelle per l'aritmetica della retta estesa

Somma

$x + y$	$-\infty$	-1	0	$a > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	indet.
-1	$-\infty$	-2	-1	$-1 + a$	$+\infty$
0	$-\infty$	-1	0	a	$+\infty$
$b > 0$	$-\infty$	$b - 1$	b	$a + b$	$+\infty$
$+\infty$	indet.	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Prodotto

$x \times y$	$-\infty$	-1	0	$a > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	indet.	$-\infty$	$-\infty$
-1	$+\infty$	$+1$	0	$-a$	$-\infty$
0	indet.	0	0	0	indet.
$b > 0$	$-\infty$	$-b$	0	$a \times b$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	indet.	$+\infty$	$+\infty$

Rapporto

x/y	$-\infty$	-1	0^+	0^-	$a > 0$	$+\infty$
$-\infty$	indet.	0	0	0	0	indet.
-1	$+\infty$	$+1$	0	0	$-a$	$-\infty$
0^+	$-\infty$	$-\infty$	indet.	indet.	$+\infty$	$+\infty$
0^-	$+\infty$	$+\infty$	indet.	indet.	$-\infty$	$-\infty$
$b > 0$	$-\infty$	$-1/b$	0	0	a/b	$+\infty$
$+\infty$	indet.	0	0	0	0	indet.

nella prima riga ci sono
i valori del numeratore;
nella prima colonna
i valori del denominatore.

Con questa aritmetica vale il seguente:

Teorema 2. Date $f(x)$ e $g(x)$ supponiamo che esistano i limiti $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$. Allora vale:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \times g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \times \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$

in tutti i casi in cui il secondo membro non è una forma indeterminata.

Un'altra formula molto importante è la formula di composizione (o equivalentemente di cambio di variabile)

Proposizione 1. Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni. Supponiamo che per un qualche $x_0 \in \mathbb{R}^*$ esista il limite: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}^*$ supponiamo inoltre che esista un

intorno I_{x_0} tale che $f(x) \neq l$ per ogni $x \in (I_{x_0} \cap D) \setminus \{x_0\}$. Allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow l} g(y)$$

ogni qual volta uno di questi due limiti esista.

Concludiamo con una lista di limiti notevoli (o semplicemente utili!):

Funzioni trigonometriche:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$ (per il teorema dei carabinieri)
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(x)}{x} = 0$ (sempre teorema dei carabinieri)
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ (sempre teorema dei carabinieri)
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

Funzione esponenziale: Per prima cosa si definisce il numero di Nepero $2 < e < 3$:

$$e := \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x,$$

con questa definizione e ponendo $\ln(x) := \ln_e(x)$ si ha:

$$a^x = e^{x \cdot \ln(a)}, \quad \ln_a(x) = \frac{1}{\ln(a)} \ln(x),$$

dove ricordiamo che $\ln(a) > 0$ se $a > 1$.

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^p} = \infty$ per ogni $p > 0$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^p e^x = 0$ per ogni $p > 0$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

per dedurre i corrispondenti limiti per a^x si usa la formula $a^x = e^{x \cdot \ln(a)}$ e il cambiamento di variabili $y = x \cdot \ln(a)$. Per esempio $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln(a)$ dato che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \cdot \ln(a)} - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(e^y - 1) \ln(a)}{y} = \ln(a) \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(e^y - 1)}{y}.$$

Funzione logaritmo:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^p} = 0$ per ogni $p > 0$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} x^p \ln(x) = 0$ per ogni $p > 0$;
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$ o equivalentemente ponendo $y = x - 1$ $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$

per dedurre i corrispondenti limiti per $\ln_a(x)$ si usa la formula $\ln_a(x) = \frac{1}{\ln(a)} \ln(x)$.

Definizione: Funzioni asintotiche

Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ definite in D diverse da zero in un intorno $(I_{x_0} \cap D) \setminus \{x_0\}$ e tali che esistono i limiti $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ diciamo che f è **asintotica a g per $x \rightarrow x_0$** :

$$f(x) \sim g(x) \text{ per } x \rightarrow x_0,$$

se vale

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Nota bene: se $f(x) \sim g(x)$ allora $g(x) \sim f(x)$; inoltre $f(x) \sim f(x)$ e se $f(x) \sim g(x)$ in x_0 e $g(x) \sim P(x)$ in x_0 allora $f(x) \sim P(x)$ in x_0 ($\sim$ è una relazione di equivalenza).

Operazioni con le Funzioni asintotiche

Date delle funzioni $f(x) \sim F(x)$, $g(x) \sim G(x)$, $h(x) \sim H(x)$ in un punto x_0 , si ha che $\ln(f) \sim \ln(F)$,

$$\frac{f(x) \cdot g(x)}{h(x)} \sim \frac{F(x) \cdot G(x)}{H(x)}.$$

In generale questa proprietà non è vera per la somma o per l'esponenziale.

Definizione: Ordini di grandezza

Date due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ definite in D diverse da zero in un intorno $(I_{x_0} \cap D) \setminus \{x_0\}$ e tali che esistono i limiti $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ diciamo che f è **dominata da g per $x \rightarrow x_0$** :

$$f(x) \ll g(x) \text{ per } x \rightarrow x_0$$

se vale

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Nota bene: se $f(x) \ll g(x)$ allora $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)}$ se esiste è pari a $\pm\infty$.

Notazione: Ordini di infinitesimo e infinito

Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$$

e $f \ll g$ in x_0 , allora anche $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$ e si dice che g ha un **infinito** di ordine **superiore** ad f (cioè va all'infinito più rapidamente di f); equivalentemente si può dire che f ha un infinito di ordine **inferiore** a g .

Al contrario se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

e $f \ll g$ in x_0 , allora si dice che g ha un **infinitesimo** di ordine **inferiore** a f (cioè va a zero più lentamente).

Nota bene: se esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}$ con $l \neq 0$ allora $f(x) \sim l \cdot g(x)$.

Alcuni ordini di grandezza utili:

Scriviamo gli ordini di grandezza nella variabile y e nella forma $f(y) \ll g(y)$ (o nel caso $f(y) \sim g(y)$) per $y \rightarrow y_0$. Le stesse relazioni valgono per $y = f(x)$ e $x \rightarrow x_0$ se è vero che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$.

1. Limiti per $y \rightarrow 0$:

$$y^p \ll y^q \text{ se } p > q, \text{ inoltre } y^p \ll (\ln(y))^{-1} \text{ per ogni } p > 0.$$

Infine

$$\sin(y) \sim y \text{ e } (1 - \cos(y)) \sim y^2/2$$

Nota bene: Le funzioni descritte tendono a 0 quando $y \rightarrow 0$.

Ricordando che se $f \ll g$ allora $1/g \ll 1/f$, si ha:

$$y^{-p} \ll y^{-q} \text{ se } p < q \text{ inoltre } \ln(y) \ll y^{-p} \text{ per ogni } p > 0.$$

Nota bene: Le funzioni descritte sopra tendono a $\pm\infty$ quando $y \rightarrow 0^+$.

1. Limiti per $y \rightarrow 1$:

$$\ln(y) \sim y - 1$$

Nota bene: La funzione descritta tende a 0 quando $y \rightarrow 1$.

1. Limiti per $y \rightarrow +\infty$:

$$\ln(y) \ll y^p \ll y^q \ll e^x \text{ per ogni } 0 < p < q.$$

Nota bene: Le funzioni descritte sopra tendono a ∞ quando $y \rightarrow \infty$. Ricordando che se $f \ll g$ allora $1/g \ll 1/f$, si ha:

$$e^{-y} \ll y^{-p} \ll y^{-q} \ll (\ln(y))^{-1} \text{ se } p > q > 0,$$

Nota bene: Le funzioni ora tendono a 0 quando $y \rightarrow \infty$.