Michela Procesi

Analisi matematica II

Programma svolto nel corso 2012, dal 27 febbraio all' 8 giugno, lezioni 1-25

Lezione 1 (27/02/2012)

- Richiami sullo spazio euclideo Rn: operazioni di spazio vettoriale, base canonica. - Prodotto scalare e norma euclidea. - Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz. Dimostrazione - Proprieta` del prodotto scalare e della norma euclidea. Dimostrazione.

- Angolo tra due vettori, vettori ortogonali, versori.

Lezione 2 (29/02/2012)

- Successioni di vettori in Rn. Definizione di successione convergente in Rn. Definizione di successione di Cauchy in Rn. - Proposizione: 1) la convergenza di una successione in Rn `e equivalente alla convergenza delle successioni numeriche delle componenti. Dimostrazione. 2) Lo stesso per successioni di Cauchy invece che convergenti. - Proposizione: completezza di Rn. Senza dimostrazione

- Funzioni di n variabili reali a valori in Rm. Esempi e casi notevoli: funzioni scalari, curve (circonferenza, segmento), campi vettoriali. - Definizione di funzione continua. - Proposizione: la continuita` di una funzione vettoriale `e equivalente alla continuita` delle sue funzioni componenti. Dimostrazione.

– Teorema ponte in Rn. Senza dimostrazione. - Alcuni esercizi sulla continuita`. - Proposizione: la somma e il prodotto scalare di funzioni continue sono funzioni continue. Dimostrazione.
– Criteri per la continuita'. Funzioni omogenee. Curve di livello.

Lezione 3 (5/03/2012)

- Svolgimento di vari esercizi sulla continuita` di funzioni di piu` variabili reali. - Composizione di funzioni di piu` variabili: dominio della funzione composta, esempi. - Proposizione: la composizione di funzioni continue `e una funzione continua. - Composizione con curve per lo studio della continuita` di funzioni di piu` variabili. Esempi ed esercizi. - Definizioni di topologia in Rn: palla, insieme aperto, insieme chiuso, insieme limitato, insieme compatto, punto interno, punto esterno, punto di frontiera, interno di un insieme, chiusura di un insieme, frontiera di un insieme. - Teorema di Heine-Pincherle-Borel: un sottoinsieme di Rn `e compatto se e solo se `e chiuso e limitato. Senza dimostrazione.

Lezione 4 (7/03/2012)

- Svolgimento di esercizi assegnati su continuita` e funzioni composte. - Derivate parziali. Definizione, esempi.

- Definizione di gradiente. - Definizione di matrice jacobiana. La matrice jacobiana di una funzione di Rn in Rm nei casi speciali n = 1, m = 1, n = m. Definizione di determinante jacobiano. - Osservazione: per funzioni di piu` variabili reali, l’esistenza delle derivate parziali non implica la continuita`. Dimostrazione tramite un esempio. - Definizione di campo gradiente e di potenziale. Esempio. - Assegnati vari esercizi sul calcolo in piu` variabili: continuita`, esistenza delle derivate parziali, dominio di esistenza, segno, gradiente, potenziale, matrice jacobiana, determinante jacobiano.

Lezione 5 (12/03/2012)

- Definizione di derivata direzionale. Osservazione: le derivate parziali sono le derivate direzionali rispetto ai vettori della base canonica. - Esercizi su derivata direzionale. - Riconsiderazione della definizione di derivata data in Analisi 1 per funzioni reali di variabile reale: la derivabilita` come formula di Taylor di ordine 1 con resto di Peano. Interpretazione grafica: la retta tangente come approssimazione della funzione di ordine 1. - Definizione di funzione lineare di Rn in Rm. - Proposizione: una funzione `e lineare se e solo se si rappresenta come matrice. - Proposizione: le funzioni lineari sono continue. Definizione di funzione differenziabile, definizione di differenziale. - Proposizione: se f `e differenziabile, allora esistono tutte le sue derivate parziali e la matrice che rappresenta il differenziale e' la matrice jacobiana. Dimostrazione. - Proposizione: la differenziabilita` implica la continuita`. Dimostrazione. Proposizione: le funzioni lineari sono differenziabili.- Assegnati alcuni esercizi sulla differenziabilita`.

Lezione 6 (14/03/2012)

- Esercizio: derivate parziali di funzioni della norma. - Teorema del differenziale. Dimostrazione (nel caso n = 3). - Differenziabilita` della funzione norma fuori dall'origine. - Differenziabilita` della funzione composta e formula. - Esempio: differenziale della funzione composta f(φ(t)), con f funzione di n variabili e φ(t) curva in Rn. - Formula per la derivata direzionale di f in x rispetto al vettore v come derivata della funzione composta f(x + sv) in s = 0. - Definizione di funzione di classe C1. - Assegnati esercizi sul differenziale.

- Il gradiente da` la direzione di massima crescita di una funzione. - Definizione di aperto connesso. - Proposizione: funzioni a gradiente nullo su un connesso sono costanti. - Formula di Taylor di ordine 1 con resto di Lagrange. Dimostrazione. - Formula di Taylor di ordine 1 con resto di Peano. Dimostrazione (`e la definizione di differenziabilita`).

Lezione 7 (23/03/2012)

Definizione di punto di massimo/minimo, locale/globale, in senso stretto o no. - Teorema di Weierstrass: funzioni continue su un compatto di Rn hanno massimo e minimo. Dimostrazione. Esempi. - Proposizione: sia x un punto interno al dominio di una funzione f, x di massimo o minimo locale; se esistono le derivate parziali di f in x, allora sono nulle. Dimostrazione. - Senza l'ipotesi che x sia interno la proposizione non vale: esempio di Analisi 1.

- Condizione necessaria del primo ordine: in un punto interno di max/min locale il gradiente, se c'`e, si annulla. Dimostrazione. - Definizione di punto critico. - Descrizione della geometria di un punto di sella. - Svolgimento di esercizio: classificazione dei punti critici di funzioni f(x,y) da considerazioni sul segno di f. - Assegnati vari esercizi su massimi e minimi locali. - Definizione di derivate parziali seconde, di matrice hessiana. - Definizione di funzione di classe C2. - Teorema di Schwartz. Senza dimostrazione.

Lezione 8 (26/03/2012)

-Formula per F′′(s),dove F(s)=f(x+sv),x,v vettori di Rn,f funzione scalare. Dimostrazione. - Formula di Taylor di ordine 2 con resto in forma di Lagrange. Dimostrazione. - Formula di Taylor di ordine 2 con resto in forma di Peano. Dimostrazione. - Definizione di norma euclidea di una matrice.

- Proposizione: la composizione di funzioni di classe C2 `e di classe C2. Senza dimostrazione. - Svolgimento di vari esercizi.

Lezione 9 (30/03/2012)

- Definizione di matrice quadrata definita positiva, definita negativa, definita, semidefinita positiva, semi- definita negativa, semidefinita, indefinita. Esempi con matrici diagonali, cenni al ruolo degli autovalori. - Proposizione: la sfera dei versori di Rn `e un insieme compatto. Dimostrazione. - Proposizione: caratterizzazione delle matrici n × n definite positive e definite negative. Dimostrazione. - Osservazione: il segno degli elementi della diagonale principale.

- Proposizione: per le matrici simmetriche 2 × 2 il segno del determinante determina se la matrice `e definita, semidefinita o indefinita. Senza dimostrazione. - Condizione necessaria del secondo ordine per punti di minimo e massimo locale. Dimostrazione. - Condizione sufficiente del secondo ordine perch ́e un punto critico sia di massimo o minimo. Dimostrazione.

– Esempi. - Svolgimento di alcuni esercizi su massimi e minimi.

Lezione 10 (2/04/2012)

- Il luogo degli zeri di una funzione F (x, y) come grafico y = f (x) o x = g(y): esempio con la circonferenza. - Il teorema di Dini (teorema della funzione implicita in R2). Dimostrazione. - Teorema: regolarita` della funzione implicita e formule per le sue derivate. Dimostrazione. - Esercizio svolto sulla funzione implicita.

Lezione 11 (6/04/2012)

- Svolgimento di un esercizio assegnato sulla funzione implicita. - Assegnati esercizi su massimi e minimi. - Il teorema della funzione implicita in dimensione n + p. Senza dimostrazione. - Assegnato un esercizio su funzione implicita. - Teorema della funzione inversa: trovare l'inversa di una funzione grazie al teorema di Dini. Esempio. - Assegnato un esercizio sulla funzione inversa.

- Massimi e minimi locali vincolati: definizione, esempio. - Teorema dei moltiplicatori di Lagrange, caso R2. Dimostrazione. - Svolgimento di un esercizio su massimi e minimi vincolati con il teorema dei moltiplicatori di Lagrange. - Assegnato un esercizio su massimi e minimi locali vincolati e massimi e minimi globali su un compatto.

Lezione 12 (09/04/2012)

- Svolgimento di un esercizio assegnato su massimi e minimi locali vincolati e massimi e minimi globali su un compatto in R2. - Teorema dei moltiplicatori di Lagrange, caso generale. Senza dimostrazione.

- Introduzione alle equazioni differenziali: cenni a equazioni ordinarie e alle derivate parziali, equazioni scalari e vettoriali (sistemi). - Equazioni ordinarie: grado di un'equazione, equazioni in forma normale. Dominio della soluzione. Dati iniziali, problema di Cauchy di ordine n.

-Definizione di funzione Lipschitziana. - Teorema di esistenza e unicita` locale di Cauchy. Senza dimostrazione. - Teorema di esistenza di Peano. Senza dimostrazione. - Proposizione: se f(x,y) e ∂yf(x,y) sono continue su un rettangolo compatto R, allora f `e lipschitziana in y uniformemente in x su R. Dimostrazione.

Lezione 13 (13/04/2012)

- Teorema di regolarita` per equazioni differenziali. Dimostrazione. - Teorema di esistenza e unicita` globale per il problema di Cauchy. Senza dimostrazione. - Esercizio assegnato su lipschitzianita` e ipotesi del teorema di esistenza e unicita` globale.

Alcune tecniche risolutive. - Equazioni a variabili separabili. - Soluzioni costanti (equilibri). - Equazioni risolvibili per sostituzione. - Formula per l'equazione $u' + a(t)u = b(t)$. - Equazioni del tipo $u' = g(at + bu + c)$, con a, b, c costanti.

Lezione 14 (16/04/2012)

- Svolgimento di un esercizio su equazioni a variabili separabili (con attenzione ai domini delle soluzioni) e problema di Cauchy. - Svolgimento di un esercizio su un problema di Cauchy con piu` di una soluzione (nelle ipotesi del teorema di esistenza di Peano).

Altre tecniche risolutive: - Equazioni del tipo $u' = g(u/t)$.

- Equazioni del tipo $u' = g((a t+bu+c)/(A t+B u+ C))$ con a, b, c, A, B, C costanti.

Lezione 15 (23/04/2012)

- Assegnati vari esercizi sulle equazioni differenziali. - Svolgimento di un esercizio assegnato su funzioni lipschitziane e unicita` del problema di Cauchy.

Equazioni lineari. - Definizioni: equazione lineare vettoriale del prim'ordine e equazioni scalari di grado n. coefficienti, coefficienti costanti, termine noto, equazione non omogenea, equazione omogenea associata. - Proposizione: esistenza e unicita` globale del problema di Cauchy. Senza dimostrazione. - Proposizione: l'insieme delle soluzioni di un'equazione omogenea `e uno spazio vettoriale di dimensione n. Costruzione di una base. Dimostrazione. - Definizione di matrice wronskiana e determinante wronskiano. - Teorema del wronskiano. Senza dimostrazione.

- Proposizione: se u, v sono soluzioni della stessa equazione lineare non omogenea, allora $u - v$ `e soluzione dell'equazione omogenea associata. Dimostrazione. - Proposizione: l'insieme delle soluzioni di un'equazione non omogenea `e l'insieme delle somme $y + v$, con y soluzione particolare e v soluzione dell'omogenea associata. Dimostrazione.

Lezione 16 (27/04/2012)

- Il metodo della variazione delle costanti tramite la matrice wronskiana (o un'altra matrice fondamentale). - Esempio per grado 2. - La formula risolutiva per l'equazione lineare $u' + a(t)u = b(t)$ rivisitata: separazione delle variabili e variazione delle costanti.

Equazioni a coefficienti costanti. - Richiami di algebra: radici di un polinomio, molteplicita` di una radice. - Polinomio caratteristico di un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti di grado n. - Teorema: scrittura esplicita di n soluzioni linearmente indipendenti di un'equazione differenziale di grado n a partire dalle radici del polinomio caratteristico. Senza dimostrazione. - Esercizi su equazioni a coefficienti costanti di grado 2, 3, 4. - Costruzione di una soluzione particolare di un'equazione non omogenea con dato b(t) di forma particolare (polinomio, esponenziale, funzioni trigonometriche). - Assegnati esercizi.

Lezione 17 (30/04/2012)

Curve in Rn. - Definizioni: curva in Rn, sostegno di una curva, curva chiusa, curva semplice, curva regolare, curva regolare a tratti, vettore tangente, versore tangente, retta tangente. - Vari esempi. - Esercizio svolto: calcolo della retta tangente ad una curva data (sia equazioni parametriche che equazioni cartesiane della retta). - Assegnati esercizi. - Definizione di diffeomorfismo tra due intervalli [a, b] e [c, d]. - Definizione di curve equivalenti. - Osservazione: due curve equivalenti hanno lo stesso sostegno. Dimostrazione. - Esercizio svolto su curve equivalenti.

Verso di percorrenza di una curva: definizione di punto che precede/segue un altro punto sulla curva. - Definizione di lunghezza di una curva regolare (o regolare a tratti). Esempi. - Definizione di integrale curvilineo di una funzione continua su una regolare (o regolare a tratti). Esempi. - Proposizione: curve equivalenti hanno gli stessi integrali curvilinei di funzione e la stessa lunghezza. Dimostrazione. - Definizione di baricentro di una curva. Calcolo di momenti d'inerzia. - Esercizi assegnati su integrali curvilinei, lunghezza, baricentro. L'ascissa curvilinea. - Assegnati e svolti alcuni esercizi.

Lezione 18 (04/05/2012)

Ancora esercizi sull'integrazione di una funzione lungo una curva.

Le forme differenziali. - Lo spazio duale (Rn)* delle funzioni lineari di Rn in R. - Definizione: forma differenziale, coefficienti di una forma differenziale, forma differenziale di classe Ck. - Corrispondenza tra forme differenziali e campi vettoriali. - Forme differenziali gia` note: il differenziale di una funzione scalare di n variabili. - Definizione di integrale di una forma differenziale lungo una curva. Esempio. - Definizione di lavoro di un campo vettoriale lungo una curva, corrispondenza con l'integrale della forma differenziale. - Assegnato esercizio su integrale di forme differenziali lungo curve.

Lezione 19 (07/05/2012)

Proposizione: integrale curvilineo di una forma differenziale lungo due curve equivalenti. Dimostrazione. - Linearita` dell'integrale curvilineo di forme differenziali. Dimostrazione: per esercizio. - Esercizio svolto sul lavoro di un campo vettoriale.

- Definizione: forma esatta, primitiva. - Esercizio svolto su forme esatte. - Corrispondenza tra forma esatta e campo gradiente, corrispondenza tra primitiva di una forma differenziale e potenziale di un campo gradiente.

- Teorema: integrale curvilineo di una forma esatta, lavoro di un campo gradiente. Dimostrazione. - Definizione di campo conservativo. - Teorema: caratterizzazione delle forme esatte. Dimostrazione. - Definizione di forma chiusa. Il rotore di un campo vettoriale in R3.

- Osservazione: forme esatte C1 sono chiuse.

Lezione 20 (09/05/2012)

Assegnati vari esercizi su integrali curvilinei di forme differenziali e campi vettoriali. - Definizione di omotopia, curve omotope, dominio semplicemente connesso. -

Proposizione: forme chiuse di classe C1 su un cubo sono esatte. Teorema: forme chiuse di classe C1 su un dominio semplicemente connesso sono esatte. Senza dimostrazione. - Assegnato esercizio su una forma esatta in un dominio che non `e semplicemente connesso. - Svolgimento di esercizio assegnato.

- Definizione di rotore di un campo vettoriale di R3, definizione di prodotto vettoriale tra due vettori di R3. - Definizione: campo irrotazionale, campo solenoidale. - Assegnati esercizi su divergenza e rotore di campi in R3.

Lezione 21 (16/05/2012)

- Esercizi svolti: forma esatta su un dominio non semplicemente connesso, integrali curvilinei di forme differenziali, potenziale di un campo vettoriale centrale,

Misura di Peano-Jordan di un insieme. Integrali doppi. - Definizione di insieme normale rispetto all’asse delle x o delle y. - Definizione di integrale di una funzione continua su un dominio normale (“formule di riduzione”). - Proposizione: su un dominio normale rispetto a entrambi gli assi, le formule di riduzione danno lo stesso valore. Senza dimostrazione. - Definizione di integrale di una funzione continua su un insieme ottenuto dall’unione di insiemi normali a interni disgiunti. - - Volume del solido 0 < z < f (x, y) come integrale doppio di f (x, y). - Assegnati esercizi.

Definizione di baricentro di un dominio in R2. - Definizione di dominio normale regolare e dominio regolare in R2. Integrali tripli. - Definizioni: insieme normale di R3, insieme normale regolare, insieme regolare. - Definizione di integrale triplo con le formule di riduzione. - Definizione di volume di un insieme normale di R3. - Assegnato esercizio su integrale triplo.

Lezione 22 (21/05/2012)

– Esercizio svolto su integrali doppi. - Teorema di cambiamento di variabili per integrali doppi. Senza dimostrazione. - Coordinate polari nel piano. Proposizione: cambiamento di coordinate da cartesiane a polari per integrali doppi. - Esercizio svolto: calcolo di un integrale doppio passando a coordinate polari. - Assegnati alcuni esercizi su integrali doppi, baricentro. Integrali tripli. - Definizioni: insieme normale di R3, insieme normale regolare, insieme regolare. - Definizione di integrale triplo con le formule di riduzione. - Definizione di volume di un insieme normale di R3. - Assegnato esercizio su integrale triplo. - Teorema di cambiamento di variabili per integrali tripli. Senza dimostrazione. - Coordinate sferiche in R3, significato geometrico. - Proposizione: cambiamento di coordinate da cartesiane a sferiche per integrali tripli. Senza dimostrazione. - Esercizi svolti: il volume della palla e dell’ellissoide. - Coordinate cilindriche in R3. - Proposizione: cambiamento di coordinate da cartesiane a cilindriche per integrali tripli. Senza dimostrazione. - Definizione di baricentro di un insieme di R3. - Esercizi.

Lezione 23 (25/05/2012)

– - Definizione di orientamento positivo della frontiera di un dominio regolare del piano. Esempi principali: il cerchio e la corona circolare. - Teorema: formule di Gauss-Green (per domini regolari del piano). Dimostrazione: solo nel caso in cui il dominio `e un rettangolo.
– - Esercizio svolto su Gauss-Green. - Definizione di divergenza di un campo vettoriale in Rn. - Teorema della divergenza in R2. Dimostrazione. - Teorema di Stokes in R2. Dimostrazione. - Teorema di Stokes in R2 enunciato per forme differenziali. Conseguenza: integrali curvilinei di forme chiuse. - Assegnati vari esercizi su integrali doppi, su Gauss-Green, divergenza e Stokes in R2.

Lezione 24 (28/05/2012)

- Teorema di Guldino per i volumi dei solidi di rotazione. Traccia della dimostrazione. Esercizio: completare i dettagli della dimostrazione.

Superfici e integrali di superficie. - Definizione: superficie regolare in R3, sostegno di una superficie, superfici equivalenti. - Esempi ed esercizi assegnati. - Piano tangente ad una superficie: equazioni parametriche e cartesiane. Esercizio svolto. - Vettore normale, versore normale ad una superficie. - Definizione: integrale di una funzione continua su una superficie regolare, area di una superficie regolare. - Proposizione: superfici equivalenti hanno gli stessi integrali di superficie e la stessa area. Senza dimostrazione. - Esempio: l’area della superficie sferica. - Definizione: baricentro di una superficie. - Assegnati esercizi sugli integrali di superficie. - Superfici di rotazione: formula generale, esempi notevoli: cono, tronco di cono, paraboloide, superficie sferica, toro. - Teorema di Guldino per l’area delle superfici di rotazione. Traccia della dimostrazione. Esercizio:

completare i dettagli della dimostrazione. - Esercizio svolto su campi vettoriali.

Lezione 25 (1/06/2012)

- Definizione: superficie regolare con bordo. - Orientamento di una superficie. - Orientamento del bordo di una superficie con bordo. - Definizione di flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie. - Proposizione: flusso di un campo vettoriale attraverso superfici equivalenti. Senza dimostrazione. - Flusso entrante e flusso uscente. - Esercizio sul flusso.

Teorema di Stokes in R3. Senza dimostrazione. - Teorema della divergenza in R3. Senza dimostrazione. - Esercizi sulla formula di Stokes.

Lezione 26 (01/06/2012)

- Esercitazione (simulazione di prova scritta). - Soluzione degli esercizi.