

Corso di Statistica Facoltà di Economia

a.a. 2010-2011

francesco mola

Lezione n° 11

Sommario

- Probabilità ed Elementi di Calcolo delle Probabilità
- Le Diverse scuole
- L'algebra degli eventi
- Diagrammi di Venn
- Postulati e Teoremi fondamentali
- Probabilità Condizionata ed Indipendenza Stocastica

Interpretazione della Probabilità

- La **Probabilità** è un concetto che viene usato in molte discipline e che è ormai entrato a far parte del linguaggio corrente in quanto usualmente si devono prendere **decisioni** che, anche dopo aver esaminato le informazioni disponibili, vengono maturate **in condizioni di incertezza**.
- Nonostante ciò è difficile dare un'interpretazione, e quindi una definizione, di probabilità che sia completamente soddisfacente ed esente da critiche

Le Definizioni di Probabilità

Scuola Classica:

- la probabilità è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli al verificarsi di un risultato e il numero totale dei possibili risultati, ammesso che questi siano egualmente possibili.

Scuola Frequentista:

- la probabilità è il limite della frequenza relativa di un evento ripetibile quando cresce, oltre ogni limite, il numero delle prove.

Scuola Soggettivista:

- la probabilità rappresenta il grado di fiducia che un individuo coerente attribuisce al presentarsi di un evento, ovvero, per quantificare, come la somma p che è disposto a scommettere quando, verificandosi l'evento, vince 1.

L'Impostazione Assiomatica

- 1. Si introducono i **Concetti Primitivi** e la loro reciproca relazione:
- "la **Prova** genera l'**Evento** con una certa **Probabilità**"
- **Prova**: è un esperimento soggetto a incertezza e può suddividersi in sottoprove.
- **Evento**: è uno dei possibili risultati della prova e costituisce un insieme di descrizioni circa i possibili risultati dell'esperimento. L'insieme di tutti i risultati possibili prende il nome di **Spazio Campionario**.

- **Probabilità**: è un numero reale compreso tra 0 e 1 associato al presentarsi di un evento e gode di proprietà intuitive formalizzate nei postulati

...Impostazione Assiomatica

- 1. Si stabiliscono delle affermazioni, detti **Postulati o Assiomi**, che non si dimostrano.
- 2. Dai postulati si deducono tutte le possibili conseguenze, sia logiche sia matematiche, pervenendo alla dimostrazione dei **Teoremi** del calcolo delle probabilità.

L'Algebra degli Eventi

- a) **Unione o Somma Logica** fra due eventi A e B è quell'evento C che si verifica quando si verifica A oppure B oppure A e B contemporaneamente:

$$C = A \cup B \text{ ("A o B")}$$

- b) **Intersezione o Prodotto Logico** fra due eventi A e B è quell'evento D che si verifica quando si verifica sia A sia B contemporaneamente:

$$D = A \cap B \text{ ("A e B")}$$

- c) **Negazione** di un evento A è quell'evento E che si verifica allorquando A non si verifica:

$$E = (\text{"non A"})$$

Si può anche indicare con

$$\overline{A}$$

Eventi particolari

- **Evento Certo** = I: è l'evento che si verifica sempre;
- **Evento Impossibile** = $\emptyset$: è l'evento che non può mai verificarsi;
- **Evento Incompatibile**: $A \cap B = \emptyset$

Eventi particolari (cont.)

- **Evento Necessario**: $A \cup B = I$
- **Evento Elementare**: per ogni A si ha $A \cup E = E$
oppure $A \cap E = \emptyset$
- **Spazio Campionario S**: è l'insieme di tutti i risultati possibili dell'esperimento.

Alcune definizioni

Spazio degli Eventi: una classe di eventi ai quali si vuole assegnare una probabilità e che questa classe sia un'algebra, ovvero che contenga S e $\emptyset$ come elementi e sia chiusa rispetto alla complementazione e all'unione.

Quando S è costituito da un numero finito k di elementi, lo spazio degli eventi può essere rappresentato dall'insieme di tutti i possibili sottoinsiemi di S ed ha cardinalità 2^k .

Esempi

- lancio di una moneta

Spazio Campionario : $S = \{T, C\}$

sottoinsiemi possibili di S : $\emptyset, \{T\}, \{C\}, S$

numero totale di eventi = 4

Esempi

- lancio di un dado

Spazio Campionario : $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

sottoinsiemi possibili di S : n° eventi

$\emptyset$ 1

$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \dots$ 6

$\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \dots$ 15

Esempi

- lancio di un dado (cont.)

sottoinsiemi possibili di S : n° eventi

$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 5\}, \dots$ 20

$\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 5\}, \dots$ 15

$\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{1, 2, 3, 4, 6\}, \dots$ 6

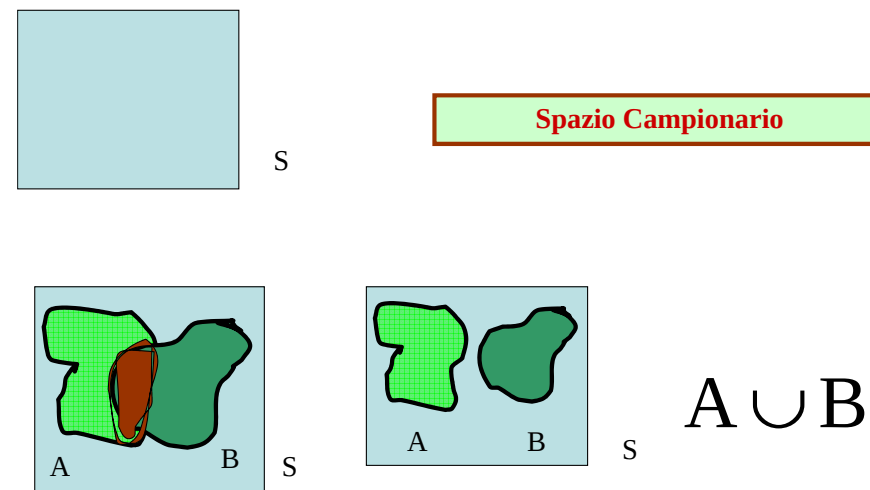
$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 1

numero totale di eventi = 64

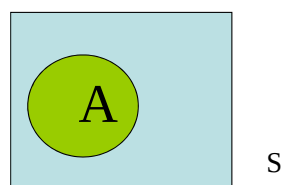
Diagrammi di Venn

- Le relazioni dell'algebra degli eventi vengono illustrate su un piano mediante grafici caratteristici detti **Diagrammi di Venn** nei quali lo spazio campionario viene disegnato come un rettangolo all'interno del quale vengono posti insiemi chiusi che rappresentano gli eventi. Non interessa l'esatto contorno, quanto piuttosto le mutue relazioni fra di essi e con lo spazio campionario.

Diagrammi di venn

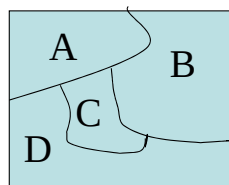


Diagrammi di venn



$\overline{A}$

S



$$A \cup B \cup C \cup D = S$$

$$A \cap B \cap C \cap D = \emptyset$$

S

I postulati del Calcolo delle Probabilità

I. Positività: La Probabilità di un evento A è un numero unico maggiore di 0: $P(A) \geq 0$.

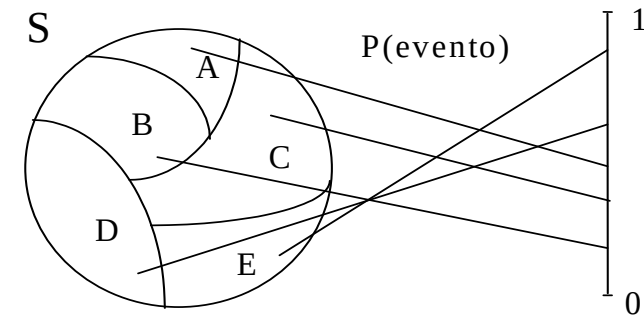
II. Certezza: La Probabilità dell'evento certo e quindi dello Spazio Campionario S è sempre 1: $P(I) = P(S) = 1$.

III. Unione: Se A e B sono eventi **incompatibili**, allora la probabilità della loro unione è la somma delle singole probabilità di A e B :

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Modello Probabilistico

- Consiste nell'insieme ipotizzato dei risultati possibili di una prova e nella descrizione delle probabilità assegnate a tali risultati.
- Spazio Campionario S:** E' l'insieme di tutti i risultati possibili dell'esperimento.



Uno spazio campionario S al quale viene associata una funzione di probabilità $P(.)$ è chiamato spazio probabilistico.

Quando l'assegnazione delle probabilità ad eventi soddisfa i tre postulati, la funzione $P(\text{evento})$ viene definita funzione di probabilità.

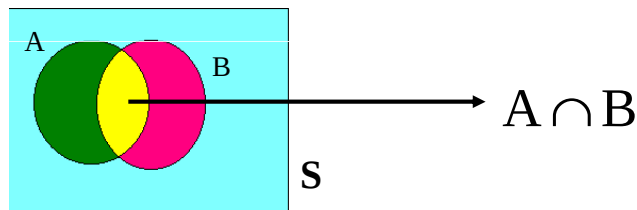
Alcuni Teoremi Fondamentali

$$P(\emptyset) = 0$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Teorema delle Probabilità Totali

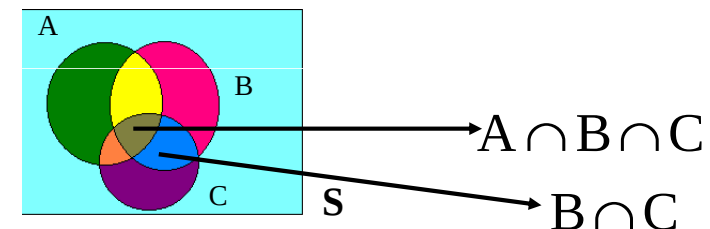
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



I Teoremi Fondamentali (cont.)

Generalizzazione al caso di 3 eventi

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$



Probabilità Condizionata

La probabilità dell'evento B, dato che si è verificato l'evento A, è il rapporto fra la probabilità del contemporaneo verificarsi di A e B e la probabilità di A, se questa è diversa da zero:

$$P(A) \neq 0 \Rightarrow P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Teorema delle Probabilità Composte

$$P(A \cap B) = P(A | B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B | A)$$

Indipendenza Stocastica

Due Eventi A e B sono Stocasticamente Indipendenti se:

$$P(A | B) = P(A)$$

oppure

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$