

Corso di Statistica Facoltà di Economia

a.a. 2010-2011

francesco mola

Lezione n° 13

Sommario

- Le Variabili Casuali o Variabili Aleatorie

Lez.13_a.a. 20109-2011

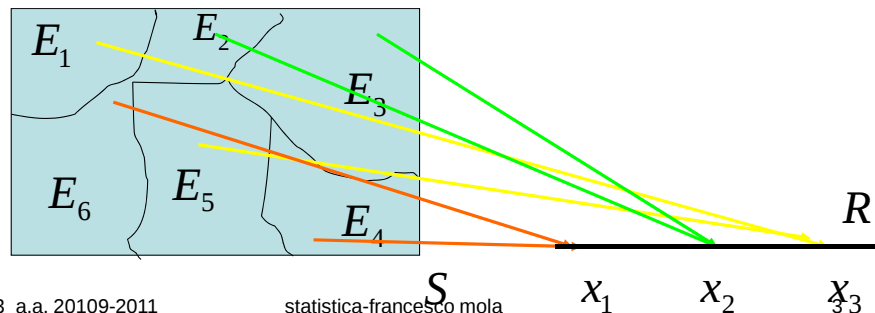
statistica-francesco mola

2

Variabili Casuali

Una Variabile Casuale è una regola (funzione reale) che associa ad E (evento elementare di S) uno ed un solo numero reale

$\forall E \in S$ la v.c. X assume il valore reale x



Lez.13_a.a. 20109-2011

statistica-francesco mola

Variabili Casuali (cont.)

Attenzione: la corrispondenza precedente è UNIVOCA e NON BIUNIVOCA!

La prova ha dato quel particolare risultato
La v.c. X ha generato quel particolare valore x
Sarà possibile associare una misura di probabilità allo spazio numerico della v.c. utilizzando la misura di probabilità definita sui sottoinsiemi dello spazio campionario S .

"Si verifica l'evento E con probabilità $P(E)$ "
"La v.c. X assume il valore x con probabilità $P(x)$ "

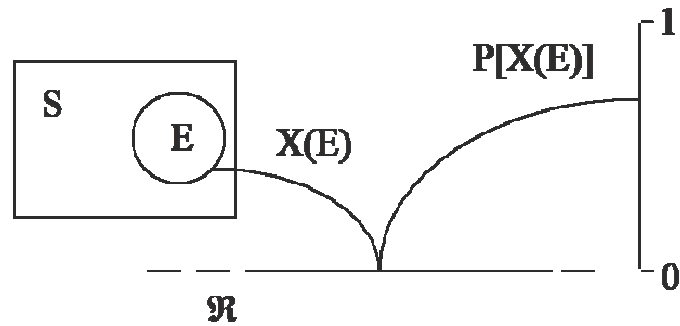
Lez.13_a.a. 20109-2011

statistica-francesco mola

4

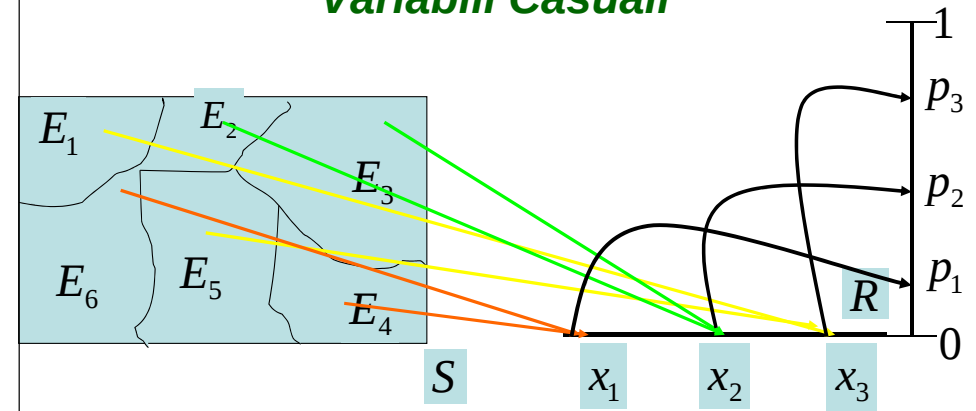
Variabili Casuali (cont.)

Una v.c. X è una variabile che assume valori nello spazio dei numeri reali secondo una funzione di probabilità $P(X)$.



Rappresentazione grafica dello schema di costruzione di una v.c. discreta

Variabili Casuali



Esempio: consideriamo una famiglia con 3 figli

$E_1 \quad E_2 \quad E_3 \quad E_4 \quad E_5 \quad E_6 \quad E_7 \quad E_8$

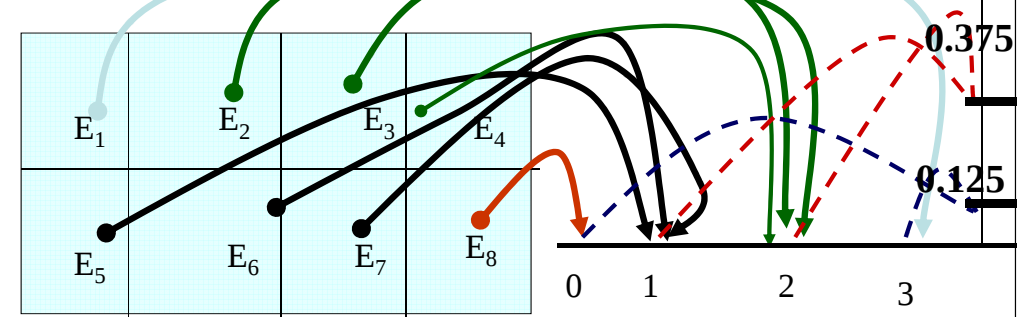
$S = \{MMM, MME, MFM, FMM, MFE, FME, FFM, FFF\}$

$1/8 \quad 1/8 \quad 1/8 \quad 1/8 \quad 1/8 \quad 1/8 \quad 1/8 \quad 1/8$

Definiamo la variabile casuale $X = \text{"numero dei figli maschi"}$

$\{E_i\}$	X	p_i
$\{E_8\}$	0	$1/8$
$\{E_5 \cup E_6 \cup E_7\}$	1	$3/8$
$\{E_2 \cup E_3 \cup E_4\}$	2	$3/8$
$\{E_1\}$	3	$1/8$

X	P_X
0	0.125
1	0.375
2	0.375
3	0.125



Consideriamo come esempio due variabili: Titolo di studio e condizione occupazionale

A=titolo di studio **B=condizione occupazionale**

E= elementare

O= occupato

M= media

D= inoccupato

S= superiore

Possiamo definire i seguenti possibili eventi elementari.

$S = A \cdot B = \{EO, ED, MO, MD, SO, SD\}$

$\frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6}$

Dato l'insieme S è possibile da cui derivare diverse variabili casuali

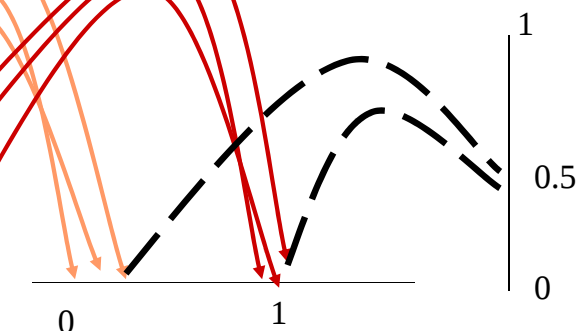
Consideriamo la variabile casuale $X = \text{"condizione occupazionale"}$

$$X = \begin{cases} 0 & \text{occupato} \\ 1 & \text{inoccupato} \end{cases}$$

X	Px
0	0.5
1	0.5

X	Px
0	0.5
1	0.5

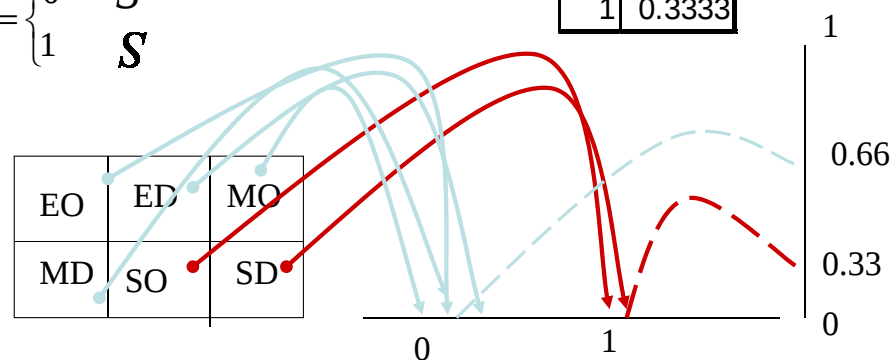
EO	ED
MO	MD
SO	SD



Sempre partendo da S consideriamo la variabile casuale $Y = \text{"studi superiori"}$

$$Y = \begin{cases} 0 & \bar{S} \\ 1 & S \end{cases}$$

Y	Py
0	0.667
1	0.3333



Schematicamente

Esempio: lancio di un dado, di una moneta, estrazione di un numero al lotto (a k eventi sono associati k valori della V.C.)

Event	p(E)	V.c.X	p_x
E_1	p_1	x_1	p_{x_1}
E_2	p_2	x_2	p_{x_2}
E_3	p_3	x_3	p_{x_3}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
E_k	p_k	x_k	p_{x_k}

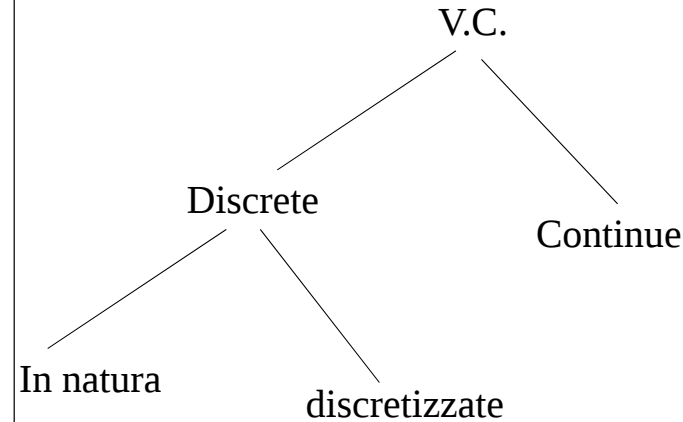
Schematicamente

Esempio: #figli, condizione occupazionale. Ecc.
(a k eventi sono associati h < k valori della V.C.)

Eventi	p(E)	V.c.X	p_x con $h \neq k$
E_1	p_1	x_1	p_{x_1}
E_2	p_2	x_2	p_{x_2}
E_3	p_3	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	x_h	p_{x_h}
E_k	p_k		

(S,A,p) = spazio di probabilità e A è l'insieme di tutti gli eventi generabili da S con l'unione e la negazione

Tipi di variabili casuali



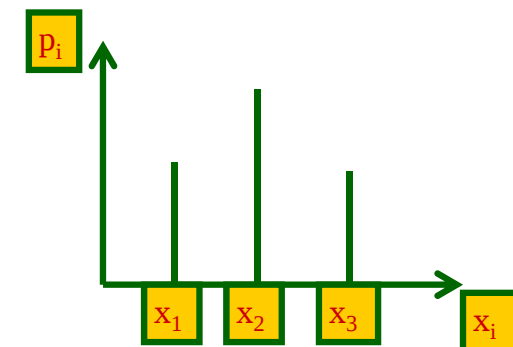
variabili casuali discrete

Una Variabile Casuale è nota se conosciamo la sua distribuzione di probabilità

Le x possono essere arbitrarie, mentre le probabilità non possono essere arbitrarie perché:

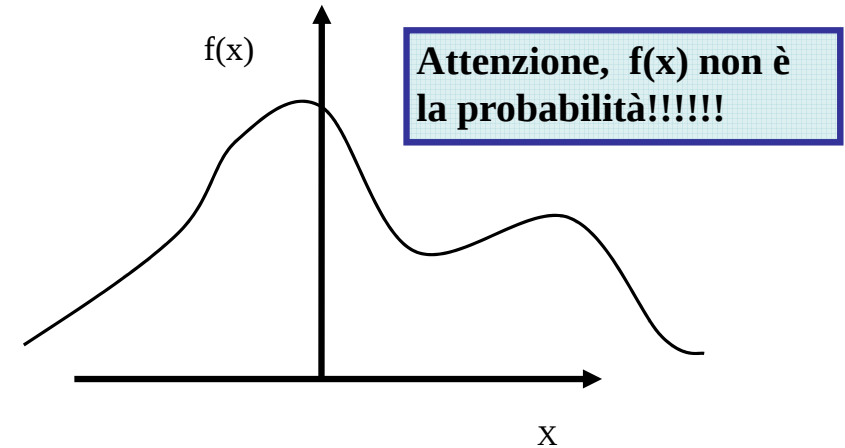
$$\begin{cases} p_i \geq 0 & \forall_i = 1, \dots, k \\ \sum p_i = 1 \end{cases}$$

Una variabile casuale discreta può essere rappresentata graficamente



Variabili Casuali continue

- Ammette infiniti valori, quindi **non è possibile** attribuire le singole probabilità ad ogni x .
- Si associa ad ogni intervallo una funzione $f(x)$ detta funzione di densità.



$f(x)$ è proporzionale (a meno di un infinitesimo) alla probabilità di un intervallo sufficientemente piccolo

Se X è una variabile casuale che assume valori in $[a,b]$, essa è definita se:

$$\exists f(x): \forall x_0 \in (a,b)$$

$$P(x_0 \leq X \leq x_0 + dx) = f(x_0)dx$$

Esempio:

le variabili casuali continue sono definite in $(-\infty, +\infty)$

con la conseguenza che la funzione di densità è nulla per quei valori compresi in intervalli esterni al campo di definizione!

Condizione necessaria affinché una funzione di densità $f(x)$ individui una v.c. X continua è:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 & \forall x: -\infty < X < +\infty \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \end{cases}$$

Nota bene:

$$P(X = x_0) = \int_{x_0}^{x_0} f(x)dx = 0$$

Funzione di ripartizione

La funzione di ripartizione fornisce la probabilità di un qualsiasi evento

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \sum_{x_i \leq x} p_i & \text{Variabili Casuali Discrete} \\ \int_{-\infty}^x f(\omega) d\omega & \text{Variabili Casuali Continue} \end{cases}$$

$\forall x \in (-\infty, +\infty)$

Funzione di ripartizione (proprietà)

1) è non decrescente

$$\forall x_i < x_j \Rightarrow F(x_i) \leq F(x_j)$$

2) è sempre compresa tra 0 ed 1

$$0 \leq F(x) \leq 1$$

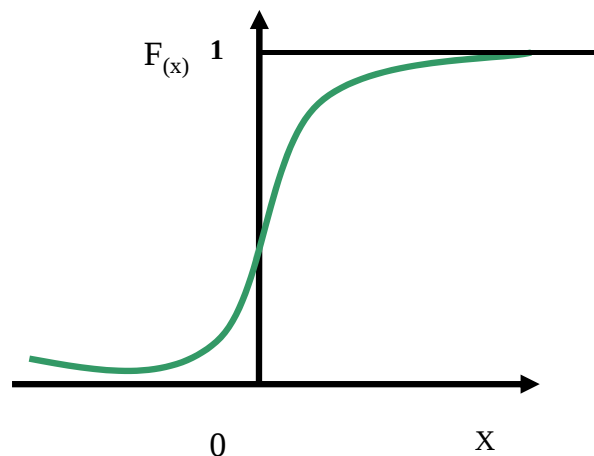
3) si ha che:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

4) $F(x)$ è continua da destra

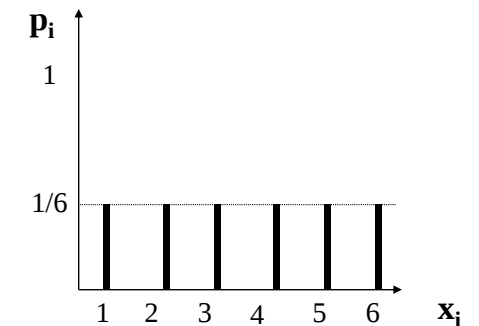
Grafico della funzione



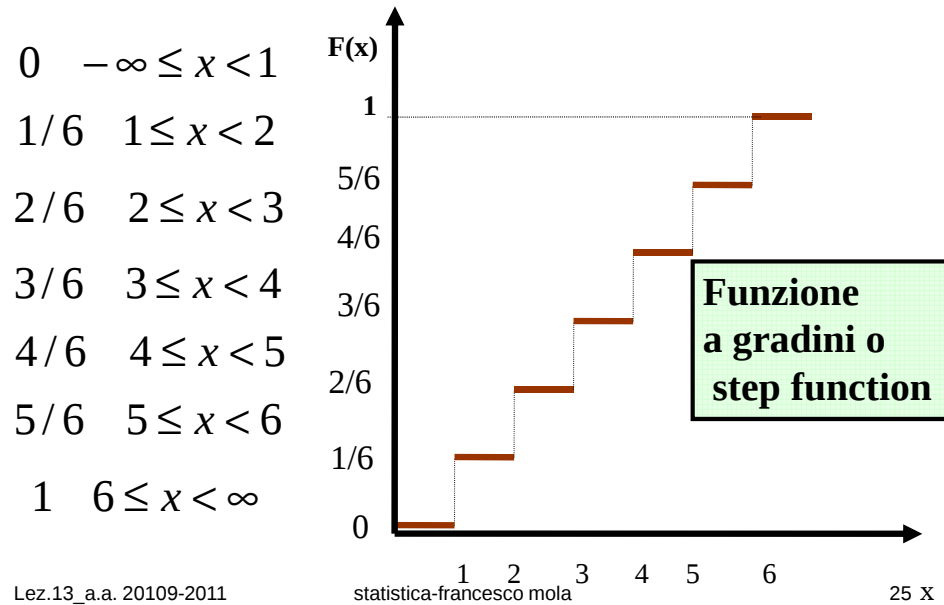
caso X discreta

Esempio: lancio di un dado

X	P(x)
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6



Analizziamo la F(X)

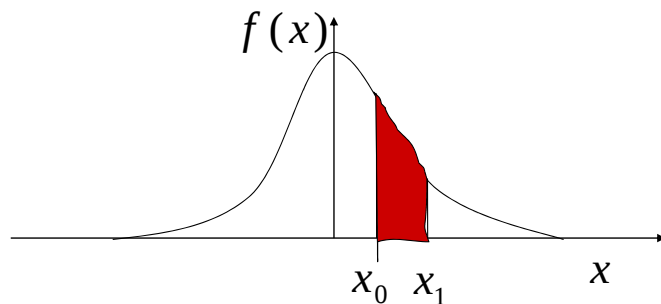


caso X continua

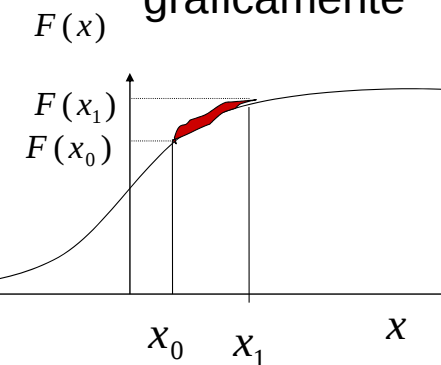
$$P(x_0 \leq X \leq x_1) = P(X \leq x_1) - P(X \leq x_0) = F(x_1) - F(x_0) =$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx$$

graficamente



graficamente



...una relazione importante

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(\omega) d\omega$$

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

Momenti centrali

Valore medio; valore atteso; Expectation

$$\mu = E(X) = \sum x_i p_i$$

V.c. discrete

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

V.c. continue

In generale abbiamo:

$$\mu_r = E(X^r) = \sum x_i^r p_i$$

V.c. discrete

V.c. continue

$$\mu_r = E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x) dx$$

Momenti centrali: casi particolari

$$r=0 \Rightarrow \mu_0 = E(X^0) = \sum x_i^0 p_i = \sum p_i = 1$$

$$r=1 \Rightarrow \mu_1 = E(X) = \sum x_i p_i = \mu$$

Momenti scarto dalla media

$(x - \mu)$

$$\overline{\mu_r} = E(X - \mu)^r = \begin{cases} \sum (x_i - \mu)^r p_i & \text{V.c. discrete} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x_i - \mu)^r f(x) dx & \text{V.c. continue} \end{cases}$$

Momenti scarto dalla media: casi particolari

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_1 &= E(X - \mu) = \sum (x_i - \mu) p_i = \\ &= \sum x_i p_i - \mu \sum p_i = \mu - \mu = 0\end{aligned}$$

Momenti scarto dalla media: casi particolari

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_2 &= E(X - \mu)^2 = \sum (x_i - \mu)^2 p_i = \\ &= \sum (x_i^2 + \mu^2 - 2\mu x_i) p_i = \\ &= \sum x_i^2 p_i + \mu^2 \sum p_i - 2\mu \sum x_i p_i = \mu_2 + \cancel{\mu^2} - \cancel{2\mu^2} = \\ &= \mu_2 - \mu^2 = \sigma^2 = \text{VAR}(X) = \text{VARIANZA}\end{aligned}$$

Momenti standardizzati

$$\bar{\bar{\mu}}_r = E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^r = \sum \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^r p_i \quad \text{V.c. discrete}$$

$$\bar{\bar{\mu}}_r = E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^r = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)^r f(x) dx \quad \text{V.c. continue}$$

Momenti standardizzati: casi particolari

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\mu}}_1 &= E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma} \sum (x_i - \mu) p_i = \frac{0}{\sigma} = 0 \\ \bar{\bar{\mu}}_2 &= E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum (x_i - \mu)^2 p_i = \frac{1}{\sigma^2} \sigma^2 = 1\end{aligned}$$

Momenti standardizzati: casi particolari

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\mu}}_3 &= E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^3 = \frac{1}{\sigma^3} \sum (x_i - \mu)^3 p_i = \\ &= \frac{1}{\sigma^3} \bar{\mu}_3 = \gamma_1 = \text{coefficiente di asimmetria}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\mu}}_4 &= E\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right)^4 = \frac{1}{\sigma^4} \sum (x_i - \mu)^4 p_i = \\ &= \frac{1}{\sigma^4} \bar{\mu}_4\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \bar{\bar{\mu}}_4 - 3 = \gamma^2 = \frac{\bar{\mu}_4}{\sigma^4} - 3 = \text{Coefficiente di Curtosi}$$