

Corso di Statistica Facoltà di Economia

a.a. 2010-2011

francesco mola

Lezione n° 16

Sommario

- La disuguaglianza di Cebicev
- Convergenza e Principali Teoremi
 - *Convergenza in probabilità*
 - *Convergenza in distribuzione*
 - *Teorema di Beronoulli*
 - *Legge dei Grandi Numeri (debole e forte)*
 - *Teorema di De Moivre-Laplace*
 - *Teorema Limite Centrale*

Disuguaglianza di Cebicev

Sia X una v.c. che ha il primo momento ed il secondo finito, cioè:

$$\exists E(X) = \mu \quad \exists E(X - \mu)^2 = \sigma^2 < \infty$$

allora:

$$P\{|X - \mu| < \varepsilon\sigma\} \geq 1 - \frac{1}{\varepsilon^2}$$

cioè:

Disuguaglianza di Cebicev

$$P(\mu - \varepsilon\sigma < X < \mu + \varepsilon\sigma) \geq 1 - \frac{1}{\varepsilon^2}$$

se:

$$\varepsilon\sigma = k \Rightarrow \varepsilon = \frac{k}{\sigma} \Rightarrow \varepsilon^2 = \frac{k^2}{\sigma^2}$$

La disuguaglianza di Cebicev diventa:

$$P\{|X - \mu| < k\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{k^2}$$

Convergenza in probabilità

Data una successione di v.c. $X_n \sim F_n(x)$ $X \sim F(x)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|X_n - X| < \varepsilon\} = 1$$

$$X_n \xrightarrow{p} X$$

oppure

$$p \lim X_n \rightarrow X$$

Convergenza in distribuzione

Data una successione di v.c. $X_n \sim F_n(x)$ $X \sim F(x)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

$$X_n \xrightarrow{d} X$$

Convergenza in media quadratica

$X \sim F(x)$

Data una successione di v.c. $X_n \sim F_n(x)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n - X)^2 = 0$$

$$X_n \xrightarrow{m} X$$

Teorema di Bernoulli

E' il primo teorema, in ordine di tempo, sul comportamento di una combinazione di v.c.

Considerato un

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{X}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

$$\text{Con } \frac{X}{n} = \text{v.c. frequenzarelativa} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum X_i \text{ dove le } X_i \text{ sono v.c. bernoulliane}$$

enunciato

Al divergere del numero delle prove, il limite della probabilità che la differenza fra frequenza relativa e probabilità di un evento sia, in valore assoluto, minore di una quantità positiva piccola a piacere, è uguale ad 1

dimostrazione

Si usa la disegualianza di Cebicev

$$P \left\{ \left| \frac{X}{n} - E \left(\frac{X}{n} \right) \right| < \varepsilon \right\} \geq 1 - \frac{\sigma^2 \left(\frac{X}{n} \right)}{\varepsilon^2}$$

$$E \left(\frac{X}{n} \right) = \frac{1}{n} E \left(\sum X_i \right) = \frac{1}{n} \sum (E(X_i)) = \frac{1}{n} p = p$$

$$\sigma^2 \left(\frac{X}{n} \right) = \frac{1}{n^2} \text{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2} \sigma_{(B(n,p))}^2 = \frac{1}{n^2} npq = \frac{pq}{n}$$

Dimostrazione (cont.)

Quindi:

$$P \left\{ \left| \frac{X}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} \geq 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{X}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} \geq 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{pq}{n\varepsilon^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{X}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} \geq 1$$

Dato che la probabilità è sempre minore o uguale ad 1 abbiamo necessariamente che:

Dimostrazione (cont.)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{X}{n} - p \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

Al crescere di n la v.c. **frequenza relativa** si concentra intorno al valore p (infatti la varianza pq/n tende a 0)

Legge debole dei grandi numeri

E' una estensione del Teorema di Bernoulli

Data una successione di v.c. $\{X_n\}$ indipendenti fra loro, aventi tutte la stessa distribuzione, con stessa media μ e varianza finita σ^2 , la successione $\{\bar{X}_n\}$ in cui $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum X_i$, converge in probabilità alla media comune delle v.c. X_i , e cioè:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \bar{X}_n - \mu \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

Si dimostra ricorrendo alla **disuguaglianza di Cebicev**

Legge debole dei grandi numeri (cont.)

- La legge debole dei grandi numeri deriva dall'osservazione sperimentale di un fenomeno.
- Al crescere delle prove la media rilevata su un campione si stabilizza e converge alla media della popolazione.

Legge forte dei grandi numeri

Se fissato

$$\varepsilon > 0 \quad \text{e} \quad \sigma > 0$$

E' possibile determinare un n_0 tale che la probabilità del contemporaneo verificarsi di tutte disuguaglianze

$$\left| \bar{X}_{n_0+1} - \mu \right| < \varepsilon; \quad \left| \bar{X}_{n_0+2} - \mu \right| < \varepsilon; \quad \dots \quad \left| \bar{X}_{n_0+k} - \mu \right| < \varepsilon;$$

$$\text{è, } \forall k, \geq a 1-\sigma$$

Legge forte dei grandi numeri (cont.)

- La legge debole **non implica** che le disuguaglianze valgono per tutti i termini.
- La legge forte **implica** che le disuguaglianze valgono per tutti gli $n > n_0$

Teorema di De Moivre-Laplace

Sia $\{X_n\}$ una successione di v.c. indipendenti ed identicamente distribuite (iid) come v.c. di Bernoulli con parametro p ; allora

$$Z_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

$$\text{con } S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

Teorema Limite Centrale

Sia $\{X_n\}$ una successione di v.c. indipendenti con egual media μ ed egual varianza σ^2 ($0 < \sigma^2 < \infty$), allora data la v.c.

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$$\text{con } E(S_n) = n\mu \\ \text{Var}(S_n) = n\sigma^2$$

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

Teorema Limite Centrale (cont.)

E' un teorema importantissimo!

Se consideriamo la successione $\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n} \sum X_i = \bar{X}_n$ abbiamo:

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$$