

**Esercizi e complementi di Algebra lineare e
geometria analitica**

Nicola Durante

13 maggio 2005

Capitolo 1

Matrici e sistemi lineari

1.1 Vettori numerici

Sia $\mathbf{R}$ l'insieme dei numeri reali ossia l'insieme che comprende i numeri naturali $0, 1, 2, \dots$, i numeri interi $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, i numeri razionali come ad esempio $\frac{-12}{5}, \frac{-7}{8}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{5}{6}, \frac{8}{3} \dots$ e i numeri irrazionali come ad esempio $-\sqrt{2}, \sqrt{3}, e, \pi, \log 5, \sin \frac{\pi}{6}$.

Per ogni numero intero positivo n si può considerare l'insieme $\mathbf{R}^n$ i cui elementi sono le n -ple ordinate di numeri reali. Un qualsiasi elemento di $\mathbf{R}$, ossia un numero reale, sarà anche detto uno scalare. Un qualsiasi elemento di $\mathbf{R}^n$, ossia una n -pla ordinata di numeri reali, sarà detto un vettore numerico di ordine n su $\mathbf{R}$. Così come é possibile sommare numeri reali, si possono anche sommare vettori numerici, ma solo se sono dello stesso ordine n . Ricordiamo che se $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ e $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbf{R}^n$ allora

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n).$$

Ad esempio se $n = 4$ e $\mathbf{a} = (1, 2, 0, -2)$ e $\mathbf{b} = (3, -1, 1, 0)$ allora $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (1 + 3, 2 + (-1), 0 + 1, -2 + 0) = (4, 1, 1, -2)$, mentre **non** é possibile sommare il vettore numerico $\mathbf{a} = (1, 2, 0, -2)$ di ordine 4 con il vettore numerico $\mathbf{c} = (1, 0, 0)$ di ordine 3.

E se dobbiamo sommare piú di due vettori ?

Se dobbiamo sommare tre o piú vettori, ovviamente tutti dello stesso ordine, basta sommarli due alla volta.

Cosí se $\mathbf{a} = (1, 4, 0, 5)$, $\mathbf{b} = (-1, 0, 1, 0)$, $\mathbf{c} = (-1, -2, 0, 0)$ allora $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (0, 4, 1, 5)$ e

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = (0, 4, 1, 5) + (-1, -2, 0, 0) = (-1, 2, 1, 5).$$

Inoltre si può definire il prodotto di uno scalare per un vettore numerico di ordine n al seguente modo:

se $h \in \mathbf{R}$ ed $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ allora $h\mathbf{a} = (ha_1, ha_2, \dots, ha_n)$.

Ad esempio se $h = 3$ e $\mathbf{a} = (1, 2, 0)$ allora $h\mathbf{a} = 3(1, 2, 0) = (3, 6, 0)$.

E se dobbiamo moltiplicare piú di uno scalare per un vettore ?

Se dobbiamo moltiplicare ad esempio due scalari per un vettore basta moltiplicare prima gli scalari tra loro e poi per il vettore.

Ad esempio $h = 5$, $k = 2$, $\mathbf{a} = (1, 0, 4, -1, 5)$ allora $hka = 10(1, 0, 4, -1, 5) = (10, 0, 40, -10, 50)$.

Infine si può anche definire un prodotto scalare tra due vettori numerici dello stesso ordine n al seguente modo: $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ allora

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots a_nb_n.$$

Ad esempio se $\mathbf{a} = (-1, 2, 0, 9)$ e $\mathbf{b} = (1, 4, 0, 0)$ allora

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = -1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 0 \cdot 0 + 9 \cdot 0 = 7.$$

Anche il prodotto scalare cosí come la somma di vettori numerici si può fare solo tra vettori dello stesso ordine. Pertanto se $\mathbf{a} = (1, 0, 8, 7, 5)$ e $\mathbf{b} = (1, 0, 0)$ allora $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}$ **non** si può fare.

E il prodotto scalare tra piú di due vettori ? Si può fare ?

Ad esempio se $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{b} = (-1, 1, 1)$, $\mathbf{c} = (1, 2, 5)$ si può svolgere $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} \bullet \mathbf{c}$? Vediamo un pó. $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = -1$ e poi non si può certo svolgere $-1 \bullet \mathbf{c}$. Quindi il prodotto scalare tra piú di due vettori **non** si può **mai** svolgere.

Esercizi. Eseguire, ove é possibile, la somma e poi il prodotto scalare tra le seguenti n -ple di numeri reali.

- 1) $\mathbf{a} = (1, 2, 6, 0)$, $\mathbf{b} = (-1, 2, 4, 9)$. 2) $\mathbf{a} = (1, -2, 6, 0, 5)$, $\mathbf{b} = (-1, 5, 0, -2)$.
 3) $\mathbf{a} = (\frac{1}{2}, 2, 1)$, $\mathbf{b} = (-1, \frac{2}{3}, 4, -3)$. 4) $\mathbf{a} = (1, 2, 0)$, $\mathbf{b} = (-1, 6, 2, -4)$.
 5) $\mathbf{a} = (e, 2, 1, 0, \pi)$, $\mathbf{b} = (-1, \frac{4}{7}, \frac{e}{2}, \frac{\pi}{3})$. 6) $\mathbf{a} = (1, 2, 0)$, $\mathbf{b} = (-1, -2, 0)$.
 7) $\mathbf{a} = (-1, 2, 0, 9)$, $\mathbf{b} = (0, 2, 4, 7)$, $\mathbf{c} = (0, 0, 0, 0)$.
 8) $\mathbf{a} = (-1, 0)$, $\mathbf{b} = (1, 1)$, $\mathbf{c} = (0, 0)$, $\mathbf{d} = (2, 5)$.
 9) $\mathbf{a} = (-1, 1, 1, 1, 5, 6, 0, 0)$, $\mathbf{b} = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{c} = (0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0)$.
 10) $\mathbf{a} = (1, 2, 0, 9, 5, 6)$, $\mathbf{b} = (0, 1, 1, 1, 0, 1)$, $\mathbf{c} = (0, 0, 0, 3)$.

Eseguire, ove possibile, il prodotto tra i seguenti scalari e le seguenti n -ple di numeri reali.

- 11) $h = 5$, $\mathbf{a} = (1, 4, 0, -2, 5, \frac{1}{5})$. 12) $h = -1$, $\mathbf{a} = (1, 5, 6, 0)$.
 13) $h = \frac{1}{3}$, $\mathbf{a} = (\frac{3}{7}, \frac{5}{4}, 6, 0)$. 14) $h = \frac{\pi}{3}$, $\mathbf{b} = (-1, \frac{2}{3}, 4, \frac{9}{5})$.
 15) $h = 0$, $\mathbf{a} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$. 16) $h = 1$, $\mathbf{a} = (2, \pi, \frac{3}{5}, \sqrt{3})$.
 17) $h = 4$, $k = 2$, $\mathbf{a} = (1, 2, 0, 0, 0)$ 18) $h = -1$, $k = 1$, $l = -3$, $\mathbf{a} = (1, 0, 0, 5)$.
 19) $h = \pi$, $k = 3$, $\mathbf{a} = (1, 0, \frac{1}{\pi}, 2)$. 20) $h = 2$, $k = e$, $\mathbf{a} = (1, 1, 1, 1)$.

1.2 Matrici

Sia $\mathbf{R}_{m,n}$ l'insieme delle matrici con m righe ed n colonne i cui elementi siano numeri reali, ossia le matrici di tipo $[m, n]$ su $\mathbf{R}$, ove m ed n sono due numeri interi positivi.

Un elemento A di $\mathbf{R}_{m,n}$ ossia una matrice di tipo $[m, n]$ su $\mathbf{R}$ é una tabella di mn numeri del tipo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ove $a_{ij} \in \mathbf{R}$ per ogni $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ e per ogni $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

Ad esempio se $m = 3$ ed $n = 2$ una matrice di $\mathbf{R}_{3,2}$ é data da:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \\ \frac{2}{3} & 4 \end{pmatrix}$$

Se $A \in \mathbf{R}_{m,n}$ il vettore numerico $\mathbf{a}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$ é la prima riga di A , il vettore numerico $\mathbf{a}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$ é l' ultima riga di A . In generale per ogni intero $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ il vettore numerico $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ é la i -esima riga di A .

Il vettore numerico $\mathbf{a}^1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1})$ é la prima colonna di A , il vettore numerico $\mathbf{a}^n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})$ é l' ultima colonna di A . In generale per ogni intero $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ il vettore numerico $\mathbf{a}^j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ é la j -esima colonna di A .

L'elemento a_{11} sulla prima riga e prima colonna é detto elemento di posto $(1, 1)$ in A . Più in generale per ogni intero $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ e per ogni intero $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ l'elemento sulla riga i e la colonna j ossia l'elemento a_{ij} é detto l'elemento di posto (i, j) in A .

Ad esempio nella matrice $A \in \mathbf{R}_{3,2}$ prima assegnata risulta $\mathbf{a}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (-3, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (\frac{2}{3}, 4)$ e $\mathbf{a}^1 = (1, -3, \frac{2}{3})$, $\mathbf{a}^2 = (0, 1, 4)$.

Inoltre, sempre in A , risulta $a_{11} = 1$, $a_{21} = -3$, $a_{31} = \frac{2}{3}$, $a_{32} = 4$.

Ricordiamo che data A di tipo $[m, n]$ si dice trasposta di A la matrice A_t di tipo $[n, m]$ che ha per prima riga la prima colonna di A , per seconda riga la seconda colonna di A e cosí via per ultima riga l'ultima colonna di A .

Ad esempio se A é la matrice di tipo $[3, 2]$ prima assegnata risulta:

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & -3 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Sia A una matrice di tipo $[m, n]$. Se $m = n$ la matrice A si dice quadrata di ordine n . Solo per matrici quadrate si parla di diagonalí di A . La diagonale principale che é data dalla n -pla ordinata $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ e la diagonale secondaria é data da $(a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1})$.

Ad esempio se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & -5 & 9 \end{pmatrix}$$

allora il vettore numerico $(1, 1, 9)$ é la diagonale principale di A , mentre il vettore numerico $(\frac{2}{3}, 1, 3)$ é la diagonale secondaria di A .

Anche due matrici, cosí come due numeri reali o come due vettori numerici si possono sommare. Per poter far ciò le matrici devono essere dello stesso tipo.

Ad esempio se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

allora risulta

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & \frac{8}{3} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mentre **non** é possibile sommare la matrice B di tipo $[2, 3]$ con la matrice A_t data in precedenza di tipo $[3, 2]$.

E se si devono sommare piú matrici, tutte dello stesso tipo ? Basta sommarle due alla volta. Cosí se A, B sono le matrici appena assegnate e

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

allora risulta

$$A + B + C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{20}{3} \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Si puó anche moltiplicare un numero reale h per una matrice A di qualsiasi tipo.

Ad esempio se $h = 2$ e

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

allora

$$hA = 2A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

E se dobbiamo moltiplicare piú numeri per A ? Basta prima moltiplicare i numeri tra di loro e poi il risultato per la matrice A .

Cosí se $h = 2, k = 3, l = \frac{1}{2}$ ed A é la matrice appena assegnata allora é

$$hklA = 3A = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 0 \\ 0 & 3 & 12 \\ \frac{3}{2} & \frac{15}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Infine si definisce un prodotto righe per colonne tra due matrici A e B considerando una matrice che ha per elementi i prodotti scalari delle righe di A per le colonne di B . Per poter far ciò ogni riga di A deve avere tanti elementi quanti ne ha ogni colonna di B . Sia n il numero di elementi di ogni riga di A e di ogni colonna di B allora risulta $A \in \mathbf{R}_{mn}$ e $B \in \mathbf{R}_{np}$ la matrice prodotto sarà la seguente matrice di $\mathbf{R}_{mp}$.

$$AB = (\mathbf{a}_i \bullet \mathbf{b}^j)$$

Ad esempio se é

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

allora $\mathbf{a}_1 \bullet \mathbf{b}^1 = (2, -6, 0) \bullet (2, 0, 1) = 4$, $\mathbf{a}_1 \bullet \mathbf{b}^2 = (2, -6, 0) \bullet (6, 2, 5) = 0$, $\mathbf{a}_2 \bullet \mathbf{b}^1 = (0, 2, 8) \bullet (2, 0, 1) = 8$, $\mathbf{a}_2 \bullet \mathbf{b}^2 = (0, 2, 8) \bullet (6, 2, 5) = 44$, quindi la matrice AB é la seguente:

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 44 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che A é di tipo $[2, 3]$, B é di tipo $[3, 2]$ ed AB é di tipo $[2, 2]$.

In generale se A é di tipo $[m, n]$, B é di tipo $[n, p]$ allora AB sar  di tipo $[m, p]$.

Infine ricordiamo il concetto di matrice a gradini. Una matrice   a gradini se il numero di zeri che precedono il primo elemento diverso da zero in ogni riga aumenta di riga in riga finch  troviamo, eventualmente, righe costituite da tutti zero. In una matrice a gradini il primo elemento diverso da zero in ogni riga   detto un pivot.

Ad esempio

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

  a gradini perch  il numero di zeri prima del primo elemento diverso da zero nella prima riga   : 1. Il numero di zeri prima del primo elemento diverso da zero nella seconda riga   : 2.

I pivot di A sono: $-6, 8$.

Anche la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

  a gradini perch  il numero di zeri prima di 1, pivot della prima riga   0, il numero di zeri prima di 2, pivot della seconda riga   1.

Altri esempi di matrici a gradini sono:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mentre le seguenti matrici non sono a gradini

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 2 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Infine ricordiamo che assegnata una qualsiasi matrice A si dicono operazioni elementari sulle righe di A le seguenti operazioni:

E₁ scambio di due righe ($\mathbf{a}_i \leftrightarrow \mathbf{a}_j$).

E₂ moltiplicare una riga per un numero reale $h \neq 0$ ($h\mathbf{a}_i \rightarrow \mathbf{a}_i$).

E₃ sostituire una riga con la somma di lei e un'altra riga ($\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j \rightarrow \mathbf{a}_i$).

Osserviamo inoltre che la combinazione delle operazioni **E₂** ed **E₃** dá luogo all'operazione ($\mathbf{a}_i + h\mathbf{a}_j \rightarrow \mathbf{a}_i$).

Una matrice ottenuta da A tramite operazioni elementari (di riga) si dice equivalente ad A (per righe).

Ricordiamo che assegnata una qualunque matrice A é **sempre** possibile, tramite operazioni elementari E_1, E_2, E_3 sulle righe di A , ottenere una nuova matrice $\bar{A}$ a gradini equivalente ad A .

Ad esempio se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 8 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dopo aver riscritto la prima riga, le operazioni $\mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}_1 \rightarrow \mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_3 - 3\mathbf{a}_1 \rightarrow \mathbf{a}_3$ danno luogo alla matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Infine l'operazione $\mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2 \rightarrow \mathbf{b}_3$ dá luogo alla matrice

$$C = \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}.$$

Se

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

bisogna prima considerare l'operazione $\mathbf{a}_3 \leftrightarrow \mathbf{a}_1$ ottenendo cosí la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

poi bisogna scambiare la seconda e terza riga di B , ossia bisogna effettuare l'operazione $\mathbf{b}_3 \leftrightarrow \mathbf{b}_2$ ottenendo cosí la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a questo punto tramite l'operazione $\mathbf{c}_4 - \frac{2}{3}\mathbf{c}_2 \rightarrow \mathbf{c}_4$ si ottiene

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 2 & -\frac{10}{3} \end{pmatrix}$$

infine tramite l'operazione $\mathbf{d}_4 + \frac{2}{3}\mathbf{d}_3 \rightarrow \mathbf{d}_4$ si ottiene la seguente matrice a gradini equivalente ad A

$$D = \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{3} & -\frac{10}{3} \end{pmatrix}.$$

Infine se

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

tramite l'operazione $\mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_1 \rightarrow \mathbf{a}_4$ si ottiene la seguente matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

poi tramite l'operazione $\mathbf{b}_3 + -\frac{1}{3}\mathbf{b}_2 \rightarrow \mathbf{b}_3$ si ottiene la seguente matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

infine tramite lo scambio tra l'ultima e la penultima riga, ossia tramite l'operazione $\mathbf{c}_4 \leftrightarrow \mathbf{c}_3$ si ottiene la seguente matrice a gradini equivalente ad A

$$D = \overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esercizi. Svolgere i seguenti esercizi:

1) Assegnata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 3 & \pi \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Si determinino gli elementi a_{11}, a_{32}, a_{41} , le righe $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_4$, le colonne $\mathbf{a}^1$ e $\mathbf{a}^4$, le diagonali principali e secondaria e la matrice A_t , trasposta di A .

2) Assegnata la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 10 \\ -1 & 2 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Si determinino gli elementi b_{11}, b_{22}, b_{42} , le righe $\mathbf{b}_2$ e $\mathbf{b}_3$, le colonne $\mathbf{b}^1$ e $\mathbf{b}^2$ e la matrice B_t , trasposta di B .

3) Siano A la matrice dell'esercizio 1) e B la matrice dell'esercizio 2. Si calcolino, ove possibile, le matrici $A+B$, A_t+B , $A+B_t$, A_t+B_t , $A \cdot B$, $A \cdot B_t$, $A_t \cdot B$, $A_t \cdot B_t$, $4A$, $3B$, $2A_t$, $1B_t$, $0A$.

4) Per ciascuna delle matrici nei precedenti esercizi 1), 2) e 3) si determini una matrice equivalente a gradini e poi si individuino i pivot.

5) Assegnata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 12 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 16 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 7 & -8 \end{pmatrix}$$

si determini una matrice a gradini equivalente ad A ed una equivalente ad A_t e si individuino i loro pivot.

6) Assegnata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 5 \\ -2 & 0 & 2 & -9 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & -8 \\ -2 & 1 & 16 & 8 & 0 & -7 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 0 & -9 \\ -5 & 6 & 30 & 6 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

si determini una matrice a gradini equivalente ad A ed una equivalente ad A_t e si individuino i loro pivot.

7) Assegnata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & -1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si determini una matrice a gradini equivalente ad A ed una equivalente ad A_t e si individuino i loro pivot.

8) Assegnata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & 4 & -4 & 5 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

si determini una matrice a gradini equivalente ad A ed una equivalente ad A_t e si individuino i loro pivot.

9) Assegnata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ -2 & -4 & -6 & -8 & -10 & -12 & -14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & -5 & -6 & -7 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si determini una matrice a gradini equivalente ad A ed una equivalente ad A_t e si individuino i loro pivot.

10) Assegnata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

si determini una matrice a gradini equivalente ad A ed una equivalente ad A_t e si individuino i loro pivot.

11) Assegnata la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -2 & 6 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si determini una matrice a gradini equivalente ad A ed una equivalente ad A_t e si individuino i loro pivot.

1.3 Sistemi lineari

Un'equazione lineare su $\mathbf{R}$ nelle incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$ é un'equazione del tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \quad (1.1)$$

con $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}$, ossia é un'equazione in cui le incognite compaiono solo al primo grado.

a_i é detto coefficiente dell'incognita x_i e b é detto il termine noto.

Ad esempio

$3x + 2y - z = 1$ é un'equazione lineare in x, y, z , mentre $2x^2 - 4y + z = 4$ **non** é un'equazione lineare.

$\frac{1}{2}x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 7x_4 + \pi x_5 = 1$ é un'equazione lineare in $x_1, \dots, x_5$, mentre $x + 3y + \log z$ **non** é un'equazione lineare.

$\pi x - 3y + 5z - \frac{2}{3}t = 2$ é un'equazione lineare, mentre $xy - 3sz + t = 0$ **non** é un'equazione lineare.

Una soluzione di un'equazione lineare del tipo (1.1) é una n -pla ordinata di numeri reali $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ che verifica l'uguaglianza:

$$a_1k_1 + a_2k_2 + \dots + a_nk_n = b.$$

Ad esempio assegnata l'equazione lineare

$$3x - y - z - t = 0$$

la quaterna ordinata $(1, 1, 1, 1)$ é una soluzione dell'equazione perché $3 \cdot 1 - 1 - 1 - 1 = 0$ é verificata ed anche la quaterna ordinata $(0, 1, -1, 0)$ é una soluzione perché verifica $3 \cdot 0 - 1 - (-1) - 0 = 0$, **mentre** la quaterna ordinata $(1, 0, 0, 0)$ **non** é una soluzione dell'equazione perché $3 \cdot 1 - 0 - 0 - 0 = 3 \neq 0$ **non** é verificata.

Poiché l'equazione assegnata ha quattro incognite x, y, z, t allora l'insieme delle soluzioni di tale equazione sarà un sottoinsieme di $\mathbf{R}^4$.

Piú in generale l'insieme delle soluzioni di un'equazione di tipo (1.1) é un sottoinsieme di $\mathbf{R}^n$.

Consideriamo ora un'equazione lineare in un sola incognita x , ossia un'equazione del tipo

$$ax = b$$

con a, b numeri reali.

Cosa sappiamo dire sull'insieme delle soluzioni di tale equazione? Poiché tale equazione ha una sola incognita x allora una soluzione dell'equazione è un numero reale k che verifica l'uguaglianza $a \cdot k = b$ e l'insieme delle soluzioni dell'equazione sarà un sottoinsieme di $\mathbf{R}$.

Possono verificarsi tre casi:

- a) Se $a \neq 0$ allora l'equazione $ax = b$ ha un'unica soluzione $x = \frac{b}{a}$.
- b) Se $a = 0$ e $b \neq 0$ allora l'equazione $0x = b$ non ha soluzioni perché non esiste alcun numero reale k che verifichi $0 \cdot k = b$.
- c) Se $a = 0$ e $b = 0$ allora l'equazione $0x = 0$ ha per soluzioni tutti i numeri reali k perché $0 \cdot k = 0$ è verificata da qualsiasi numero reale k . Pertanto l'insieme delle soluzioni dell'equazione $0x = 0$ è tutto $\mathbf{R}$.

Ad esempio l'equazione $2x = 6$ ha per soluzione solo il numero reale $x = \frac{6}{2} = 3$; l'equazione $0x = 5$ non ha soluzioni perché non esiste un numero reale k tale che $0 \cdot k = 5$ possa essere verificata; infine l'equazione $0x = 0$ ha per soluzioni tutti i numeri reali perché $0 \cdot k = 0$ è verificata qualunque sia il numero reale k .

Consideriamo ora le equazioni lineari in due incognite

$$ax + by = c$$

ove a, b, c sono numeri reali ed x, y sono incognite. In tal caso l'insieme delle soluzioni è un sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$. Anche per le equazioni lineari in due incognite si possono distinguere tre casi:

- a) Se $a \neq 0$ oppure $b \neq 0$ allora si può ricavare una delle due incognite in funzione dell'altra. Ad esempio se $a \neq 0$, allora si può ricavare dall'equazione l'incognita x in funzione di y ottenendo $x = \frac{c - by}{a}$ e l'insieme delle soluzioni è dato da $\mathcal{S} = \{(\frac{c - by}{a}, y)\}_{y \in \mathbf{R}}$, pertanto l'equazione ammette infinite soluzioni che formano un sottoinsieme infinito di $\mathbf{R}^2$. Se fosse $a = 0$ ma $b \neq 0$ ossia l'equazione fosse del tipo $0 \cdot x + by = c$ allora ricavando y si ottiene $y = \frac{c}{b}$ e le soluzioni dell'equazione sono $\mathcal{S} = \{(x, \frac{c}{b})\}_{x \in \mathbf{R}}$.

- b) Se $a = b = 0$ e $c \neq 0$ allora l'equazione $0 \cdot x + 0 \cdot y = c$ non ha soluzioni perché non esiste una coppia (h, k) di numeri reali tali che $0 \cdot h + 0 \cdot k = c$.
- c) Se $a = b = 0$ e $c = 0$ allora l'equazione $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$ ha per soluzioni qualsiasi coppia (x, y) di numeri reali, ossia $\mathcal{S} = \mathbf{R}^2$.

Ad esempio nell'equazione $2x - 4y = 3$ ricavando l'incognita x si ottiene $x = \frac{3+4y}{2}$ e pertanto l'insieme delle soluzioni é $\mathcal{S} = \{(\frac{3+4y}{2}, y)\}_{y \in \mathbf{R}}$. Se al posto della x ricavavamo l'incognita y in funzione di x ottenevamo $y = \frac{-3+2x}{4}$ e l'insieme delle soluzioni $\mathcal{S} = \{(x, \frac{-3+2x}{4})\}_{x \in \mathbf{R}}$. Ovviamente, seppur scritto in maniera diversa l'insieme delle soluzioni dell'equazione é sempre lo stesso in entrambi i casi.

Nell'equazione $0x + 3y = 5$ possiamo ricavare solo la y ottenendo $y = \frac{5}{3}$ e l'insieme delle soluzioni dell'equazione é $\mathcal{S} = \{(x, \frac{5}{3})\}_{x \in \mathbf{R}}$.

Se invece abbiamo l'equazione $0x + 0y = 3$, tale equazione non ha soluzioni perché non esiste una coppia (h, k) di $\mathbf{R}^2$ tale che $0 \cdot h + 0 \cdot k = 3$.

Se infine abbiamo l'equazione $0x + 0y = 0$ allora l'insieme delle sue soluzioni é tutto $\mathbf{R}^2$ perché qualsiasi coppia (h, k) di $\mathbf{R}^2$ verifica $0 \cdot h + 0 \cdot k = 0$.

In generale anche per un'equazione lineare in n incognite del tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

si possono distinguere tre casi:

- a) Se esiste almeno un $a_i \neq 0$, ad esempio $a_1 \neq 0$ allora ricavando x_1 in funzione delle altre incognite si ottiene $x_1 = \frac{b - a_2x_2 - \dots - a_nx_n}{a_1}$ e pertanto l'insieme delle soluzioni é $\mathcal{S} = \{(\frac{b - a_2x_2 - \dots - a_nx_n}{a_1}, x_2, \dots, x_n)\}_{x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}}$.
- b) Se $a_1 = \dots = a_n = 0$ e $b \neq 0$ allora l'equazione $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b$ non ha soluzioni perché non esiste una n -pla ordinata $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ che verifichi $0 \cdot k_1 + 0 \cdot k_2 + \dots + 0 \cdot k_n = b$.
- c) Se $a_1 = \dots = a_n = 0$ e $b = 0$ allora l'equazione $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = 0$ ha per soluzioni tutte le n -ple ordinate di numeri reali, perché ogni n -pla

$(k_1, \dots, k_n)$ di $\mathbf{R}^n$ verifica $0 \cdot k_1 + \dots + 0 \cdot k_n = 0$. Pertanto l'insieme delle soluzioni é tutto $\mathbf{R}^n$.

Se abbiamo un sistema di equazioni lineari, ossia due o piú equazioni lineari nelle stesse incognite $x_1, x_2, \dots, x_n$, diremo soluzione del sistema una qualsiasi n -pla ordinata $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ che sia soluzione di tutte le equazioni che compongono il sistema.

Un sistema di m equazioni in n incognite é del tipo

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Una soluzione del sistema é una n -pla ordinata $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ che verifichi tutte le equazioni del sistema ossia tale che

$$\begin{cases} a_{11}k_1 + a_{12}k_2 + \dots + a_{1n}k_n = b_1 \\ a_{21}k_1 + a_{22}k_2 + \dots + a_{2n}k_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}k_1 + a_{m2}k_2 + \dots + a_{mn}k_n = b_m \end{cases}$$

siano tutte verificate.

Ad esempio se abbiamo il sistema

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases}$$

nelle due incognite x ed y allora la coppia $(0, 0)$ é sicuramente una soluzione del sistema perché é soluzione di entrambe le equazioni del sistema. Anche la coppia $(1, 2)$ é una soluzione del sistema essendo soluzione di entrambe le equazioni del sistema.

In generale un sistema si dice compatibile se ammette almeno una soluzione, altrimenti si dice incompatibile. Per un sistema compatibile possiamo distinguere due casi: ha un'unica soluzione, ossia una sola n -pla ordinata verifica tutte le equazioni del sistema (si dice che il sistema é determinato) oppure ha infinite soluzioni, ossia ci sono infinite n -ple ordinate che verificano tutte le equazioni del sistema (si dice che il sistema é indeterminato).

Abbiamo visto come si possono trovare tutte le soluzioni di un'equazione lineare

in n incognite e per un sistema di equazioni ? Come si possono trovare le soluzioni di un sistema ?

Innanzitutto ricordiamo che se abbiamo un sistema di m equazioni lineari in n incognite ad esso restano associate due matrici. La matrice incompleta o dei coefficienti (delle incognite) data da

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

e la matrice completa del sistema data da:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Ad esempio nel sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -5 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

la matrice incompleta é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

e la matrice completa é

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se abbiamo due sistemi lineari nelle stesse incognite, essi si dicono equivalenti se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

Ricordiamo che invece due matrici B e C si dicono equivalenti (per righe) se C é stata ottenuta da B tramite operazioni elementari di riga.

Ricordiamo inoltre che vale la seguente

Proposizione 1.3.1 *Sia S un sistema lineare e sia A' la sua matrice completa. Sia ora B' una matrice equivalente ad A' e sia S' il sistema lineare avente B' come matrice completa. In tale ipotesi i sistemi lineari S ed S' sono equivalenti.*

Se un sistema lineare ha per matrice completa una matrice a gradini allora il sistema si dice a gradini.

Poiché abbiamo già ricordato che assegnata una matrice A' è sempre possibile trovarne una a gradini B' ad essa equivalente vale anche la seguente

Proposizione 1.3.2 *Per ogni sistema S ne esiste uno a gradini ad esso equivalente.*

In base alla precedente proposizione per determinare le soluzioni di un qualsiasi sistema lineare S è possibile prima cercare un sistema a gradini ad esso equivalente e poi determinare le soluzioni di quest'ultimo. Pertanto se sappiamo trovare le soluzioni di un sistema a gradini allora sappiamo trovare le soluzioni di un qualunque sistema.

Tale metodo di risoluzione dei sistemi lineari conviene perché trovare le soluzioni di un sistema a gradini è più facile che trovare le soluzioni di un sistema qualunque.

Ricordiamo brevemente come si trovano le soluzioni di un sistema a gradini. Sia quindi S un sistema a gradini con n incognite.

Innanzitutto se la matrice completa del nostro sistema a gradini ha righe nulle queste si possono cancellare dal sistema perché le corrispondenti equazioni hanno per soluzione qualsiasi n -pla di numeri reali.

A questo punto se c'è una riga in cui tutti gli elementi sono uguali a zero tranne l'ultimo che è un numero diverso da zero allora l'equazione corrispondente è del tipo $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = b$ con $b \neq 0$ e tale equazione non ha soluzioni. Ne segue che tutto il sistema non ha soluzioni, ossia è incompatibile, perché una soluzione del sistema è una n -pla che deve essere soluzione di tutte le equazioni del sistema, quindi anche dell'equazione $0x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = b$ ed n -ple così non ce ne possono essere.

Se dopo aver cancellato le righe di tutti zero restano nel sistema p righe allora possono verificarsi due casi:

i) $p = n$.

In questo caso il sistema diventa

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots\dots\dots & \\ a_{n-1n-1}x_{n-1} + a_{n-1n}x_n &= b_{n-1} \\ a_{nn}x_n &= b_n \end{cases}$$

con $a_{ii} \neq 0$ per ogni $i = 1, 2, \dots, n$, essendo tali numeri i pivot della matrice completa a gradini del sistema.

Un sistema di questo tipo ha un'unica soluzione che si può trovare facilmente con il metodo di sostituzione all'indietro.

Ossia si ricava $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$ dall'ultima equazione ottenendo per x_n un numero. Tale numero si sostituisce nella penultima equazione al posto di x_n ed in tale equazione si ricava l'incognita x_{n-1} e così via all'indietro fino alla prima equazione dove al posto delle incognite $x_2, \dots, x_n$ ci saranno i loro valori trovati nelle precedenti equazioni e possiamo quindi ricavare il valore di x_1 nella prima equazione ottenendo così l'unica n -pla soluzione del sistema.

ii) $p < n$.

In questo caso ci sono più incognite che equazioni e il sistema avrà infinite soluzioni. Ci saranno alcune incognite che non hanno mai accanto un pivot della matrice completa. Tali incognite sono le cosiddette incognite libere. Per trovare le soluzioni di un tale sistema si portano a secondo membro le incognite libere che si considerano come termini noti e si ottiene un sistema di p equazioni in p incognite. Supponendo che le incognite libere siano $x_{p+1}, \dots, x_n$ si ottiene il sistema

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p &= b_1 - a_{1p+1}x_{p+1} - \dots - a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p &= b_2 - a_{2p+1}x_{p+1} - \dots - a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots & \\ a_{pp}x_p &= b_p - a_{pp+1}x_{p+1} - \dots - a_{pn}x_n \end{cases}$$

Il sistema si risolve allora così. Si ricava l'incognita x_p dall'ultima equazione, in funzione delle incognite libere. Tale valore di x_p si sostituisce nella penultima equazione dove si ricava l'incognita x_{p-1} in funzione delle incognite libere e così via fino alla prima equazione dove si ricava x_1 in funzione delle incognite libere. In tal modo si è ottenuta la descrizione delle infinite soluzioni del sistema. Si tratta dell'insieme infinito di n -ple descritte dai valori ricavati per $x_1, x_2, \dots, x_p$ al variare delle incognite libere $x_{p+1}, \dots, x_n$ in tutti i numeri reali.

Ad esempio se abbiamo il sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ 2x + y + 3z = 3 \\ x - y - 3z = 0 \end{cases}$$

la sua matrice completa é

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

prima di risolvere il sistema troviamo una matrice a gradini equivalente ad A .

Tramite le operazioni elementari $\mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}_1 \rightarrow \mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1 \rightarrow \mathbf{a}_3$ otteniamo la matrice

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -5 \\ 0 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

poi tramite l'operazione elementare $\mathbf{b}_3 - 2\mathbf{b}_2 \rightarrow \mathbf{b}_3$ otteniamo

$$C' = \overline{A'} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & -12 & 6 \end{pmatrix}$$

che é una matrice a gradini equivalente ad A' . Il sistema lineare avente questa come matrice completa é

$$\begin{cases} x + y - z = 4 \\ -y + 5z = -5 \\ -12z = 6 \end{cases}$$

Questo sistema ha tre equazioni, tre incognite e tre pivot pertanto ha un'unica soluzione che si ricava cosí $z = -\frac{1}{2}$ dall'ultima equazione, poi $y = 5 + 5z = 5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$ dalla seconda equazione e infine $x = 4 - y + z = 4 - \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 1$ dalla prima equazione. Pertanto $\mathcal{S} = \{(1, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2})\}$ é l'unica soluzione del sistema a gradini e quindi anche del sistema assegnato ad esso equivalente.

Ricordiamo che assegnato un sistema lineare se A é la matrice dei coefficienti del sistema e denotiamo con X la colonna delle incognite e con B la colonna dei termini noti, il sistema si può porre sotto forma di prodotto di matrici al seguente modo $AX = B$.

Ad esempio se il sistema assegnato é

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

allora la matrice incompleta é

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

la colonne X e B delle incognite e dei termini noti sono

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ed effettuando il prodotto $AX = B$ si scrive il sistema in forma di prodotto di matrici (o forma matriciale).

Infine ricordiamo che se la colonna dei termini noti é costituita tutta di zeri allora il sistema si dice omogeneo ed ha sempre almeno la soluzione $(0, 0, \dots, 0)$. Pertanto un sistema omogeneo non può mai essere incompatibile e quindi avrà o solo la soluzione vettore nullo oppure avrà infinite soluzioni.

Esercizi.

Determinare l'insieme delle soluzioni dei seguenti sistemi di equazioni lineari

$$\begin{aligned} 1) & \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = 6 \end{cases} & 2) & \begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ -x_1 + x_3 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_4 + 2x_5 = 4 \end{cases} & 3) & \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5 \end{cases} \\ 4) & \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \end{cases} & 5) & \begin{cases} x_2 - 4x_3 + x_4 = -1 \\ x_2 - 3x_3 = -1 \\ -x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_3 - x_4 = 0 \end{cases} & 6) & \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 1 \\ 3x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + \frac{1}{3}x_2 + x_3 = \frac{1}{3} \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases} \\ 7) & \begin{cases} x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases} & 8) & \begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 + 3x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases} & 9) & \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Soluzioni:

$$\begin{aligned} 1) & \{(13, -4, 4)\}; & 2) & \{(\frac{4-k}{2}, h, \frac{4-k}{2}, k, 0)\}_{h,k \in \mathbf{R}}; & 3) & \emptyset; & 4) & \{(4 - 2h + k, h, k)\}_{h,k \in \mathbf{R}} \\ 5) & \{(h, -1 + 3k, k, k)\}_{h,k \in \mathbf{R}}; & 6) & \{(\frac{1-2h}{3}, -h, h)\}_{h \in \mathbf{R}}; & 7) & \{(h, k, -4t, t)\}_{h,k,t \in \mathbf{R}}; & 8) & \emptyset \end{aligned}$$

$$9) \left\{ \left(\frac{1-2h}{3}, -h, h \right) \right\}_{h \in \mathbf{R}}$$

Scrivere i sistemi di equazioni lineari aventi una delle seguenti matrici come matrice completa e determinare l'insieme delle soluzioni.

$$1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$4) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 5) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 6) \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 7 & 12 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$7) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 8) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad 9) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 11 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$10) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad 11) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$12) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 13) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 14) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluzioni:

$$1) \emptyset; \quad 2) \{(0, 1, -1)\}; \quad 3) \left\{ \left(\frac{1-k}{2}, \frac{3+k}{2}, \frac{-1-k}{2}, h, k \right) \right\}_{h, k \in \mathbf{R}}; \quad 4) \{(-3h, h)\}_{h \in \mathbf{R}}; \quad 5) \{(0, h, 1)\}_{h \in \mathbf{R}} \\ 6) \{(1/2, 0, 1/2, 0, 0)\}; \quad 7) \emptyset; \quad 8) (0, 0, 0); \quad 9) \emptyset; \quad 10) \{(-h, 0, h, 0, 0, 0)\} \\ 11) \{(4k - 2t, h, -k - t, k, t)\}_{h, k, t \in \mathbf{R}}; \quad 12) \emptyset; \quad 13) \{(1, 1, 0)\}; \quad 14) \emptyset.$$

Capitolo 2

Spazi vettoriali

2.1 Operazioni interne ed esterne ad un insieme

Esercizi Si dica quale delle seguenti applicazioni sono operazioni interne, quali operazioni esterne e quali non sono operazioni

1) $+: (a, b) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \longrightarrow a + b \in \mathbf{N}$

2) $\cdot: (a, b) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \longrightarrow a \cdot b \in \mathbf{N}$

3) $\sqrt{\cdot}: (m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \longrightarrow \sqrt[n]{m} \in \mathbf{N}$ 4) $\sqrt{\cdot}: (n, x) \in \mathbf{N} \times \mathbf{R} \longrightarrow \sqrt[n]{x} \in \mathbf{R}$

5) $\sqrt{\cdot}: (n, x) \in D \times \mathbf{R} \longrightarrow \sqrt[n]{x} \in \mathbf{R}$ ove D denota l'insieme dei numeri interi dispari.

6) $\cdot: (a, OA) \in \mathbf{R} \times \mathcal{V}_O^2 \longrightarrow a \cdot OA \in \mathcal{V}_O^2$

7) $\cup: (A, B) \in \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S) \longrightarrow A \cup B \in \mathcal{P}(S)$

8) $\cap: (A, B) \in \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S) \longrightarrow A \cap B \in \mathcal{P}(S)$

9) $\%: x \in \mathbf{R} \longrightarrow x\% \in \mathbf{R}$

10) $^2: x \in \mathbf{R} \longrightarrow x^2 \in \mathbf{R}$

2.2 Spazi vettoriali su $\mathbf{R}$

Esercizi

- 1) Si dimostrino almeno quattro delle otto proprietà che rendono $\mathbf{R}^4$ spazio vettoriale reale.
- 2) Si dimostrino almeno quattro delle otto proprietà che rendono $\mathbf{R}_{3,2}$ spazio vettoriale reale.
- 3) Si dimostrino almeno quattro delle otto proprietà che rendono $\mathbf{R}^3$ spazio vettoriale reale.
- 4) Si dimostrino almeno quattro delle otto proprietà che rendono $\mathbf{R}^5$ spazio vettoriale reale.
- 5) Si dimostrino almeno quattro delle otto proprietà che rendono $\mathbf{R}_{3,3}$ spazio vettoriale reale.
- 6) Si dimostrino almeno quattro delle otto proprietà che rendono $\mathbf{R}_{2,5}$ spazio vettoriale reale.
- 7) Si dimostrino almeno quattro delle otto proprietà che rendono $\mathcal{V}_O^2$, i vettori geometrici del piano applicati in un punto O , spazio vettoriale reale.
- 8) Si dimostrino almeno quattro delle otto proprietà che rendono $\mathcal{V}_O^3$, i vettori geometrici dello spazio applicati in un punto O , spazio vettoriale reale.
- 9) Si dimostrino almeno quattro delle otto proprietà che rendono $\mathbf{R}[x]$ spazio vettoriale reale.
- 10) Si dimostrino almeno quattro delle otto proprietà che rendono $\mathbf{R}_5[x]$, l'insieme dei polinomi di grado al più 5, spazio vettoriale reale.

2.3 Sottospazi di spazi vettoriali e vettori dipendenti da sistemi di vettori

- 1) Nello spazio vettoriale numerico $\mathbf{R}^3$ scrivere (se é possibile) il vettore $(2, 1, -1)$ come combinazione lineare del sistema $\{(1, 1, 0), (0, 1, 2), (-1, 1, 3)\}$.

2) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}_{2,2}$ delle matrici quadrate di ordine 2 su $\mathbf{R}$ dire se il vettore $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ dipende dal sistema $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
Il vettore $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ dipende da S ? E il vettore $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?

3) Nello spazio vettoriale numerico $\mathbf{R}^3$, dire se i seguenti sottoinsiemi sono sottospazi, giustificando le risposte:

$$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x = y = z\}, W_2 = \{(x, x+1, x+2)\}_{x \in \mathbf{R}}$$

$$W_3 = \{(a, a-b, b)\}_{a,b \in \mathbf{R}}, W_4 = \{(a, a^2, 0)\}_{a \in \mathbf{R}}$$

$$W_5 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : z = x+3\}, W_6 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : y = x^3\}.$$

4) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}_{2,2}$ delle matrici quadrate di ordine 2 su $\mathbf{R}$ dire, giustificando la risposta, se i seguenti sottoinsiemi sono sottospazi:

$$H_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a-1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}_{a \in \mathbf{R}}, H_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ a-b & a+b \end{pmatrix} \right\}_{a,b \in \mathbf{R}}$$

$$H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & a \end{pmatrix} \right\}_{a \in \mathbf{R}}, H_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$H_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

5) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}[x]$ dei polinomi in x a coefficienti reali, dire quale tra i seguenti sottoinsiemi sono sottospazi e perché:

$$K_1 = \{ \text{polinomi di 3° grado} \} \cup \{0\}$$

$$K_2 = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbf{R}\},$$

$$K_3 = \{p(x) \in \mathbf{R}[x] : p(0) = 0\},$$

$$K_4 = \{p(x) \in \mathbf{R}[x] : p(0) = 2\}.$$

6) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}_3[x]$ dei polinomi di grado al più 3 si consideri il sistema di vettori $S = \{2, 1+x^2, 0, x+x^3\}$.

i) Si determinino 5 vettori dipendenti da S ;

- ii) si dica quali tra i seguenti vettori dipendono da S : $3 + x + x^2 + x^3$; $4 - 3x - 3x^3$; $1 - x - x^3$.

7) Si consideri lo spazio vettoriale numerico $\mathbf{R}^4$. Posto $W = \{(x, x, x, x)\}_{x \in \mathbf{R}}$ e $Z = \{(0, y, 0, 0)\}_{y \in \mathbf{R}}$

- i) si provi che W e Z sono sottospazi di $\mathbf{R}^4$;
- ii) si dica quali tra i seguenti vettori appartengono a $W + Z$:
 $(2, 2, 2, 2)$, $(0, 1, 0, 0)$, $(1, 3, 0, 0)$, $(1, 4, 1, 1)$;
- iii) si dica se $W + Z$ é una somma diretta;
- iv) si dica se W e Z sono supplementari.

8) Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbf{R}_4[x]$ dei polinomi di grado al più quattro. Posto $H = \{a + bx^2\}_{a, b \in \mathbf{R}}$ e $K = \{cx + dx^3\}_{c, d \in \mathbf{R}}$.

- Si provi che H e K sono sottospazi di $\mathbf{R}_4[x]$;
- si dica se $H \cap K = \{\underline{0}\}$;
- si dica se $H + K$ é una somma diretta;
- si dica quali tra i seguenti vettori appartengono a $H + K$:
 $x + x^2$; $x - x^3$; $1 - x + x^2$.

9) Nello spazio vettoriale numerico $\mathbf{R}^5$ si considerino i seguenti sottospazi:

$$H = \{(x, x, x, y, y)\}_{\{x, y, \in \mathbf{R}\}} \text{ e}$$

$$K = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbf{R}^5 : x - y = 0, z - t - u = 0\}.$$

- si determini il sottospazio $H \cap K$;
- si determini il sottospazio $H + K$;
- si determinino, se possibile, tre vettori di $\mathbf{R}^5$ non appartenenti a $H + K$.

10) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}_5[x]$ dei polinomi di grado al più cinque si considerino i seguenti sottospazi: $H = \{a + 2ax + bx^3 + 4bx^5\}_{a, b \in \mathbf{R}}$ e $K = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 : a_0 - a_1 - a_2 = 0; a_0 + 2a_4 - a_5 = 0; a_1 - a_4 - 2a_5 = 0\}$.

- si determini il sottospazio $H \cap K$;
- si determini il sottospazio $H + K$;
- si determinino, se possibile, tre vettori di $\mathbf{R}_5[x]$ non appartenenti a $H + K$.

Soluzioni:

1) $(2, 1, -1) = (1, 1, 0) + (0, 1, 2) - (-1, 1, 3)$; 2) no, si, si (perché ?) ; 3) W_1, W_2 si (perché ?), gli altri no (perché ?); 4) H_2, H_3, H_5 si (perché ?), gli altri no (perché ?); 5) K_2, K_3 si (perché ?), gli altri no (perché ?).

2.4 Sottospazio generato da un sistema di vettori

1) Nello spazio vettoriale numerico $\mathbf{R}^5$ si considerino i seguenti sistemi di vettori:

$$S = \{(1, 0, 1, 0, 1), (2, 0, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 2, 2), (2, 2, 2, 1, 1), (2, 0, 2, 0, 2)\} \text{ e}$$

$$T = \{(1, 2, 0, 1, 2), (2, 2, 2, 2, 2), (0, 0, 0, 0, 1), (2, 3, 4, 0, 0), (1, 1, 2, 2, 2)\}.$$

Si determinino i sottospazi $L(S)$ ed $L(T)$ e di dica se S e T sono sistemi di vettori equivalenti.

2) Sia assegnata la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

- si determini il sottospazio S di $\mathbf{R}^6$ generato dalle righe di A .
- Se $\bar{A}$ è una forma a gradini di A si determini il sottospazio T di $\mathbf{R}^6$ generato dalle righe di $\bar{A}$.
- Si dica se S e T coincidono e si determini il numero minimo di vettori di $\mathbf{R}^6$ necessari per generare S ed il numero minimo di vettori di $\mathbf{R}^6$ necessari per generare T .

3) Con riferimento all'esercizio precedente

- si determini il sottospazio W di $\mathbf{R}^6$ generato dalle colonne di A
- si determini il sottospazio di $\mathbf{R}^6$ generato dalle colonne di $\overline{A}$.
- Si dica se S e T coincidono e si determini il numero minimo di vettori di $\mathbf{R}^6$ necessari per generare S ed il numero minimo di vettori di $\mathbf{R}^6$ necessari per generare T .

4) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}_5[x]$ si considerino i seguenti sistemi di vettori: $S = \{1-x, 1-x-x^2, 1-x-x^2-x^3, 1-x-x^2-x^3-x^4, 1-x-x^2-x^3-x^4-x^5\}$, $T = \{1, -x, -x^2, -x^3, -x^4, -x^5\}$.

- si determini il sottospazio generato da S e quello generato da T ;
- si dica se S e T sono equivalenti;
- si determini il numero minimo di vettori necessari per generare S e il numero minimo di vettori necessari per generare T
- si determinino, se esistono, quattro vettori di $\mathbf{R}_5[x]$ non appartenenti a $L(S)$ e quattro vettori di $\mathbf{R}_5[x]$ non appartenenti a $L(T)$.

5) Nello spazio vettoriale $R_{3,3}$ delle matrici quadrate di ordine tre sia assegnato il seguente sistema di vettori:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- Si determini $L(S)$;
- si determinino, se possibile, cinque matrici di $\mathbf{R}_{2,2}$ che non appartengono a $L(S)$ e cinque matrici di $\mathbf{R}_{2,2}$ che appartengono ad $L(S)$.

6) Nello spazio vettoriale numerico $\mathbf{R}^3$ sia $S = \{(1, 1, 1), (1, 9, 9), (9, 9, 9), (0, 0, 0), (0, 0, 2)\}$.

- si determini $L(S)$ e, se esistono, tre vettori di $\mathbf{R}^3$ non appartenenti ad $L(S)$.

- Si scriva il vettore $(1, 0, 0)$ come combinazione lineare dei vettori di S in tre modi diversi.

7) Nello spazio vettoriale numerico $\mathbf{R}^4$ siano assegnati i seguenti sistemi di vettori: $S = \{(1, 1, 1, 1), (1, 2, 2, 3), (2, 3, 3, 4), (0, 0, 0, 1)\}$ e $T = \{(1, 2, 3, 4), (0, 0, 1, 2), (2, 2, 2, 2), (2, 3, 4, 2)\}$.

- si determinino i sottospazi $L(S)$ ed $L(T)$;
- si determinino, se esistono, tre vettori di $\mathbf{R}^4$ non appartenenti ad $L(S)$ e tre vettori di $\mathbf{R}^4$ non appartenenti ad $L(T)$.

8) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}_2[x]$ dei polinomi di grado al più due, siano assegnati i seguenti sistemi di vettori: $S = \{1 - x - x^2, x, x - x^2\}$ e $T = \{1, x, x^2\}$.

- si determinino i sottospazi $L(S)$ ed $L(T)$;
- si dica se S e T sono equivalenti
- si determinino, se esistono, tre polinomi di $\mathbf{R}_2[x]$ non appartenenti ad $L(S)$ e tre non appartenenti ad $L(T)$.

9) Nello spazio vettoriale numerico $\mathbf{R}^5$ si considerino i seguenti sottospazi: $H = L(1, 0, 0, 0, 0), (0, 1, 9, 0, 0), (1, 2, 0, 1, 0)\}$ e $K = \{(x, y, z, t, u) \in \mathbf{R}^5 : x - u = 0, y - z - t = 0\}$.

- si determini il sottospazio $H \cap K$;
- si determini il sottospazio $H + K$;
- si determinino, se possibile, tre vettori di $\mathbf{R}^5$ non appartenenti a $H + K$.

10) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}_5[x]$ dei polinomi di grado al più cinque si considerino i seguenti sottospazi: $H = L(1 - x - x^3 - x^5, 2 + x + x^2, 4 - 2x - x^2 - x^3)$ e $K = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 : a_0 - a_1 - a_3 = 0; a_0 + a_4 - 3a_5 = 0; a_1 - a_3 - a_5 = 0\}$.

- si determini il sottospazio $H \cap K$;
- si determini il sottospazio $H + K$;
- si determinino, se possibile, tre vettori di $\mathbf{R}_5[x]$ non appartenenti a $H + K$.

2.5 Dipendenza e indipendenza lineare

1) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^4$ si dica, giustificando la risposta, quali tra i seguenti sistemi di vettori sono linearmente dipendenti e quali linearmente indipendenti.

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(2, 7, 1, 4), (0, 0, 0, 0), (4, 27, 1, 2)\}; S_2 = \{(2, 1, 0, 2), (4, 0, 1, 2)\}; \\ S_3 &= \{(1, 2, 0, 1), (-1, -2, 0, -1), (2, 1, 0, 0)\}; S_4 = \{(2, 0, 0, 0), (0, 1, -1, 0), (0, 0, 0, 1)\}; \\ S_5 &= \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 2)\}; \\ S_6 &= \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 2), (1, 1, 0, 0)\}. \end{aligned}$$

2) Si consideri lo spazio vettoriale numerico $\mathbf{R}^3$.

- i) Si determinino due sistemi di vettori linearmente dipendenti di $\mathbf{R}^3$;
- ii) si dica quali tra i seguenti sistemi di vettori sono linearmente indipendenti e perché
 $S_1 = \{(1, 2, 3), (4, 5, 6)\}$; $S_2 = \{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (8, 10, 12), (-8, -10, -12)\}$,
 $S_3 = \{(1, 0, 1), (2, 0, 0), (1, -1, 0)\}$.
- iii) si determinino tre sistemi di vettori linearmente dipendenti contenenti rispettivamente S_1 , S_2 ed S_3 .

3) Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbf{R}[x]$.

- i) si determini un sistema di vettori linearmente dipendente contenente il vettore $x^3 - x$;
- ii) si determini un sistema di vettori linearmente indipendente contenente il vettore $x^3 - x$;
- iii) si verifichi che il sistema $S = \{2x, x-4, x+4, x^2\}$ è linearmente dipendente e si determini un vettore di S che dipende dai rimanenti vettori di S .

4) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}_{2,2}$ si consideri il sistema $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

- i) Dopo aver verificato che $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}_{a,b \in \mathbf{R}}$ è un sottospazio di $\mathbf{R}_{2,2}$ si provi che $W = L(S)$;
- ii) si determinino due vettori che non dipendono da S e tali che il sistema da essi costituito sia linearmente indipendente.

5) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^5$ sia assegnato il seguente insieme di vettori $S = \{(1, 0, 2, 0, 0), (2, 0, 1, 0, 0), (5, 1, 6, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1)\}$. Si dica:

- i) se S é linearmente dipendente o linearmente indipendente;
- ii) se S é linearmente dipendente si scriva uno dei vettori di S come combinazione lineare degli altri;
- iii) si determinino, se possibile, due sistemi di vettori S_1 ed S_2 contenenti S , uno linearmente indipendente e l'altro linearmente dipendente.

6) Nello spazio vettoriale $R_4[x]$ dei polinomi di grado al piú quattro sia assegnato il sistema di vettori $S = \{x^2, x^3, x^2 + x^3\}$.

- Si determini, se possibile, un sistema di vettori S_1 linearmente dipendente contenente S ;
- Si scriva uno dei vettori di S_1 come combinazione lineare degli altri in due modi diversi.
- Si determini, se possibile, un sistema di vettori S_2 linearmente indipendente contenente S ;

7) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$ sia assegnato il seguente sistema di vettori $S = \{(1, 2, 0), (0, 0, 1)\}$.

- Si determini il sottospazio $L(S)$ e si scriva, se possibile, il vettore $(5, 10, 2)$ come combinazione lineare dei vettori di S in due modi diversi.
- Si consideri il vettore $(1, 0, 0)$. Si dica se $(1, 0, 0) \in L(S)$ e, posto $T = S \cup \{(1, 0, 0)\}$ si determini $L(T)$.
- Il vettore $(1, 1, 1) \in L(T)$? Si scriva, se possibile, il vettore $(1, 1, 1)$ come combinazione lineare dei vettori di T in due modi diversi.

8) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^4$ sia assegnato il seguente sistema di vettori $S = \{(1, 0, 2, 0), (0, -1, 0, 1), (2, -1, 4, 1)\}$.

- Si determini il sottospazio $L(S)$ e si scriva, se possibile, il vettore $(5, 1, 2, 0)$ come combinazione lineare dei vettori di S in due modi diversi.

- Si consideri il vettore $(1, 0, 0, -1)$. Si dica se $(1, 0, 0, -1) \in L(S)$ e, posto $T = S \cup \{(1, 0, 0, -1)\}$ si determini $L(T)$.
- Il vettore $(1, 1, 1, 2) \in L(T)$? Si scriva, se possibile, il vettore $(1, 1, 1, 2)$ come combinazione lineare dei vettori di T in due modi diversi.

9) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}_{2,3}$ si consideri il sistema $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \right\}$.

e il sottospazio $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix} \right\}_{\{a, b, c \in \mathbf{R}\}}$.

- si determinino i sottospazi $L(S) \cap W$ e $L(S) + W$;
- si determinino due vettori che non dipendono da S e tali che il sistema da essi costituito sia linearmente indipendente.
- si scriva, se possibile, la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ come combinazione lineare dei vettori di S .

10) Si consideri lo spazio vettoriale numerico $\mathbf{R}^4$.

- Si determinino due sistemi di vettori linearmente dipendenti di $\mathbf{R}^4$;
- si dica quali tra i seguenti sistemi di vettori sono linearmente indipendenti e perché
 $S_1 = \{(1, 2, 3, 0), (4, 5, 5, 0)\}$; $S_2 = \{(1, 2, 0, 0), (4, 5, 5, 0), (8, 10, 10, 0), (-8, -10, -10, 0)\}$
 $S_3 = \{(1, 0, 0, 0), (2, 0, 0, 0), (1, -1, 0, 0)\}$.
- si determinino tre sistemi di vettori linearmente dipendenti contenenti rispettivamente S_1 , S_2 ed S_3 .

2.6 Basi e dimensione

1) Determinare una base e la dimensione dei seguenti sottospazi di $\mathbf{R}_{2,2}$:

$$W_1 = L\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right).$$

$$W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{R}_{2,2} : a = d = 0 \right\}$$

$$W_3 = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \in \mathbf{R}_{2,2} : a + b = c + d\}.$$

2) Per ciascuno dei sottospazi dell'esercizio 1), determinare due basi distinte tra loro e un sistema di generatori che non sia una base.

3) Determinare una base di $\mathbf{R}^4$ contenente i vettori $(1, 1, 0, 0)$ e $(0, 0, 0, 3)$.

4) Esistono basi di $\mathbf{R}^4$ contenenti il sistema di vettori $\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 1)\}$? Perché?

5) Determinare una base B del sottospazio di $\mathbf{R}_{2,2}$ generato da

$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ e poi completare B ad una base di tutto $\mathbf{R}_{2,2}$.

6) Determinare la dimensione ed una base dei seguenti sottospazi di $\mathbf{R}_3[x]$:

$$H_1 = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbf{R}_3[x] : a_0 = a_1 = 0\},$$

$$H_2 = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbf{R}_3[x] : a_1 + a_2 = a_3\},$$

$$H_3 = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbf{R}_3[x] : p(0) = 0\}.$$

7) In $\mathbf{R}^4$ sono assegnati i sottospazi:

$$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 : x_1 + 2x_2 = x_4 = 0\},$$

$$W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0\},$$

$$W_3 = L((1, 1, -1, -1), (0, 0, 1, 1), (2, 2, 0, 0)),$$

$$W_4 = L((1, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1))$$

Determinare una base e la dimensione dei sottospazi

$$W_1, W_2, W_3, W_4, W_1 + W_2, W_1 + W_3, W_1 + W_4, W_2 + W_3, W_2 + W_4, W_3 + W_4, W_1 \cap W_2, W_1 \cap W_3, W_1 \cap W_4, W_2 \cap W_3, W_2 \cap W_4, W_3 \cap W_4.$$

Dire inoltre se qualcuna delle sei somme di sottospazi considerate é somma diretta.

8) Nello spazio vettoriale numerico $\mathbf{R}^2$ si considerino i seguenti sistemi di vettori:

$$S = \{(1, -1), (3, -3), (\frac{1}{5}, -\frac{1}{5})\},$$

$$S' = \{(0, 0), (1, 2), (-1, -2), (3, 0)\} \text{ ed il sottospazio } W = L((1, 1), (-1, -1)).$$

- i) S é una base di $\mathbf{R}^2$?
- ii) S é un sistema di generatori di $\mathbf{R}^2$?
- iii) Esistono basi di $\mathbf{R}^2$ contenute in S' ? In caso affermativo determinarle tutte.
- iv) Determinare la dimensione ed una base di W .
- v) Determinare tre basi di $\mathbf{R}^2$ contenenti ciascuna il vettore $(7, -5)$.

9) Nello spazio vettoriale numerico $\mathbf{R}^3$ si considerino il sistema di vettori $S = \{(1, 0, 1), (-1, 0, 2), (1, 1, -2), (1, 1, 1)\}$ e i sottospazi $W = L((2, 3, 1), (1, 1, -1))$ e $Z = L((1, 1, -1), (1, 2, -2), (-1, -5, 5))$ ed i sottoinsiemi $U = \{(x, 2x, z)\}_{x, z \in \mathbf{R}}$ e $V = \{(x, 0, x)\}_{x \in \mathbf{R}}$.

- i) S é una base di $\mathbf{R}^3$?
- ii) S é un sistema di generatori di $\mathbf{R}^3$?
- iii) I sottospazi W e Z hanno la stessa dimensione ?
- iv) Provare che U é un sottospazio di $\mathbf{R}^3$ e che $\{(1, 2, 0), (0, 0, 1)\}$ é una base di U .
- v) Provare che V é un sottospazio di $\mathbf{R}^3$ e determinarne una base.

10) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}_{2,2}$ si considerino il sistema

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \right\} \text{ ed i sottospazi}$$

$$W = L\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\right)$$

$$\text{e } Z = L\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

- i) Esistono basi di $\mathbf{R}_{2,2}$ che contengono S ?

- ii) Esistono sistemi di generatori di $\mathbf{R}_{2,2}$ che contengono S ? In caso affermativo determinarne uno.
- iii) Si determinino almeno due basi di W .
- iv) Si determini una base di Z .
- v) W e Z hanno la stessa dimensione ? W e Z coincidono ?

11) Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}_4[x]$ si consideri il sistema di vettori $S = \{x, x^2, 2x - x^2\}$

- i) S é linearmente indipendente ?
- ii) S é una base di $\mathbf{R}_4[x]$?
- iii) S é un sistema di generatori di $\mathbf{R}_4[x]$?
- iv) Esiste una base di $\mathbf{R}_4[x]$ che contiene S ?
- v) Esiste un sistema di generatori di $\mathbf{R}_4[x]$ che contiene S ?

Alcune soluzioni:

1) $\dim W_1 = 2; \dim W_2 = 2; \dim W_3 = 3;$ 4) non esistono. Perché ?; 6) $\dim H_1 = 2; \dim H_2 = 3; \dim H_3 = 3.7) W_1 + W_4 = W_1 \oplus W_4$

2.7 Cambiamenti di riferimento

Capitolo 3

Determinanti, rango di una matrice e matrici invertibili

3.1 Determinante di una matrice quadrata

Si calcoli il determinante delle seguenti matrici quadrate:

$$\begin{aligned} &1) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad 3) (-4) \\ &4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad 5) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad 6) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & -1 \\ 03 & -1 & 1 & \end{pmatrix} \\ &7) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad 8) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 9) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\ &10) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 9 & 3 \end{pmatrix} \quad 11) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad 12) \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 7 & 12 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 1 & \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$13) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 14) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 15) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 11 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$16) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad 17) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$18) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 19) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 20) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3.2 Proprietá dei determinanti

3.3 Rango di una matrice

Si calcoli il rango delle seguenti matrici:

$$1) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} -4 \end{pmatrix}$$

$$4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad 5) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad 6) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & -1 \\ 03 & -1 & 1 & \end{pmatrix}$$

$$7) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad 8) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 9) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$10) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 11) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 12) \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 7 & 12 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$13) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 14) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad 15) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 11 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$16) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad 17) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$18) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 19) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 20) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$21) \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 19) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad 20) \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3.4 Matrici invertibili

Si dica quale delle matrici del paragrafo Determinante di una matrice quadrata sono invertibili e, per quelle invertibili, se ne calcoli l'inversa.

3.5 Regola di Cramer

Si considerino i sistemi di equazioni lineari assegnati in precedenza. Quali di questi sistemi è possibile risolvere con la regola di Cramer ? Per tali sistemi si trovino le soluzioni con la regola di Cramer.

In particolare si risolvere i seguenti sistemi lineari utilizzando, nei casi in cui è possibile, la regola di Cramer:

$$\begin{aligned} 1) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + z = 0 \\ 2z = 4 \end{cases} \quad & 2) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + 3z = 4 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad & 3) \begin{cases} 3x + y + z = 8 \\ x + y - z = 0 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases} \\ \\ 1) \begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ -x + 2y - z = 1 \\ x + 3y + 2z = 5 \end{cases} \quad & 2) \begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - z = 0 \end{cases} \quad & 3) \begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y - z = 0 \\ x - y + z = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Capitolo 4

Applicazioni lineari

4.1 Definizione e prime proprietà

Si dica quale delle seguenti applicazioni sono lineari e perché.

$$f_1 : (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \rightarrow (2x - y, 0, 0, 0) \in \mathbf{R}^4$$

$$f_2 : a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbf{R}_3[x] \rightarrow (a_0 - a_1, -2) \in \mathbf{R}^2$$

$$f_3 : \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & h \end{pmatrix} \in \mathbf{R}_{2,3} \rightarrow ax - hx^2 \in \mathbf{R}_3[x]$$

$$f_4 : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \rightarrow (2x, 2y) \in \mathbf{R}^2$$

$$f_5 : (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \rightarrow (x, y, t) \in \mathbf{R}^3$$

$$f_6 : (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 & x_2 + 2x_4 \\ -x_1 & -x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}_{2,2}$$

$$f_7 : (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \rightarrow (2x - y + z, x - z, 3x - y) \in \mathbf{R}^3$$

4.2 Nucleo e immagine

Per ciascuna delle applicazioni f_i del paragrafo precedente che sia lineare si determinino:

- $\text{Ker } f$ e $\text{Im } f$;
- una base di $\text{Ker } f$;
- una base di $\text{Im } f$.

4.3 Isomorfismi

Si dica quale delle applicazioni f_i è un isomorfismo.

4.4 Matrici e applicazioni lineari

Per ciascuna delle applicazioni f_i che sia lineare si determini la matrice associata a f_i nei riferimenti $\mathcal{R}$ e $\mathcal{R}'$ entrambi naturali.

4.5 Esercizi vari sulle applicazioni lineari

1) Sapendo che f è un'applicazione lineare di $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^3$ tale che $f(1, 0, 0) = (1, 2, 0)$, $f(0, 1, 1) = (0, 1, 1)$ e $f(1, 1, 3) = (1, 1, -1)$.

- i) Si può determinare una base di $\text{Im } f$?
- ii) si può determinare una base di $\text{Ker } f$?
- iii) si può dire se f è suriettiva ?

- iv) si può dire se f è iniettiva ?
- v) si può dire se f è un isomorfismo ?
- vi) si può determinare $f(-1, -1, 4)$?

2) Sapendo che f è un'applicazione lineare di $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^2$ tale che $\text{Im } f = L((1, 2), (-1, -2))$

- i) si può determinare la dimensione di $\text{Ker } f$?
- ii) si può dire se f è suriettiva ?

Capitolo 5

Diagonalizzazione di endomorfismi e matrici

5.1 Definizioni e prime proprietà

5.2 Diagonalizzazione di un endomorfismo

5.3 Diagonalizzazione di una matrice

Capitolo 6

Geometria analitica nel piano e nello spazio

- 6.1 Dipendenza lineare in $\mathcal{V}$ e $\mathcal{V}_n$
- 6.2 Prodotto scalare standard in $\mathcal{V}$ e $\mathcal{V}_n$
- 6.3 Riferimenti ortonormali in $\mathcal{V}$ e $\mathcal{V}_n$
- 6.4 Riferimento cartesiano ortogonale monometrico nel piano
- 6.5 Cambiamenti di riferimento
- 6.6 Rappresentazione della retta
- 6.7 Coseni direttori di una retta orientata
- 6.8 Intersezione di due rette e condizioni di parallelismo
- 6.9 Ortogonalità tra rette
- 6.10 Distanza tra insiemi nel piano
- 6.11 Punto medio e asse di un segmento

• 1.

- (i) Sia assegnata l'equazione lineare $x - 5y + 7z = 4$ in tre incognite x, y, z .
- (a) Si dica cosa è una soluzione di tale equazione.
- (b) Si determinino tutte le soluzioni dell'equazione.
- (ii) Assegnato il seguente sistema lineare
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}$$
 si determinino, se il sistema è compatibile, tutte le sue soluzioni.

SVOLGIMENTO Es. 1)

- a) Una soluzione dell'equazione lineare $x - 5y + 7z = 4$ è un vettore numerico di $\mathbf{R}^3$ (una terna ordinata di numeri reali).
- b) Per calcolare tutte le soluzioni dell'equazione assegnata trattandosi di una sola equazione lineare in tre incognite risulta che due delle incognite sono incognite libere (ad esempio la y e la z). Pertanto per trovare tutte le soluzioni dell'equazione basta ricavare una delle incognite, ad esempio la x , in funzione delle altre due.

$$x = 4 + 5y - 7z$$

e pertanto tutte le soluzioni dell'equazione assegnata sono date da

$$\mathcal{S} = \{(4 + 5y - 7z, y, z)\}_{y, z \in \mathbf{R}}.$$

- iii) La matrice completa associata al sistema assegnato è

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

prima di risolvere il sistema troviamo una matrice a gradini equivalente ad A' .

Tramite le operazioni elementari $\mathbf{a}_4 - \mathbf{a}_1 \rightarrow \mathbf{a}_4$; poi $\mathbf{a}_2 \leftrightarrow \mathbf{a}_3$; infine $\mathbf{a}_4 - \mathbf{a}_2 \rightarrow \mathbf{a}_4$ otteniamo la seguente matrice a gradini equivalente ad A'

$$\overline{A'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema lineare avente questa come matrice completa è:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_2 - x_4 = 2 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ -x_4 = 0 \end{cases}$$

Questo sistema ha quattro equazioni, quattro incognite e quattro pivot pertanto ha un'unica soluzione che si ricava così $x_4 = 0$ dall'ultima equazione, poi $x_3 = x_4 = 0$ dalla penultima equazione, $x_2 = 2 - x_4 = 2$ dalla seconda equazione ed infine $x_1 = -x_2 - x_3 + x_4 + 2 = 0$ dalla prima equazione. Pertanto $\mathcal{S} = \{(0, 2, 0, 0)\}$ è l'unica soluzione del sistema a gradini e quindi anche del sistema assegnato ad esso equivalente.

- 2 Si dimostrino sei delle otto proprietà che rendono $\mathbf{R}_{2,2}$ spazio vettoriale reale.

SVOLGIMENTO Es. 2

Le otto proprietà che rendono un insieme V spazio vettoriale reale sono:

- 1) associativa: $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$
- 2) elemento neutro: $\underline{v} + \underline{0} = \underline{v} = \underline{0} + \underline{v}$
- 3) opposto: $\underline{v} + (-\underline{v}) = (-\underline{v}) + \underline{v} = \underline{0}$
- 4) commutativa: $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$
- 5) $(hk)\underline{v} = h(k\underline{v})$
- 6) $1\underline{v} = \underline{v}$
- 7) $(h + k)\underline{v} = h\underline{v} + k\underline{v}$
- 8) $h(\underline{u} + \underline{v}) = h\underline{u} + h\underline{v}$

Per dimostrare che $\mathbf{R}_{2,2}$ verifica le otto proprietà che lo rendono spazio vettoriale reale basta far vedere che sappiamo definire una somma tra matrici e un prodotto di uno scalare per una matrice che verificano le otto proprietà.

Somma tra matrici:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix}$$

Prodotto per uno scalare:

$$h \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ha & hb \\ hc & hd \end{pmatrix}.$$

Con queste due operazioni le otto proprietà sono verificate. Ad esempio

$$2) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

$$3) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$5) (hk) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (hk)a & (hk)b \\ (hk)c & (hk)d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(ka) & h(kb) \\ h(kc) & h(kd) \end{pmatrix} = h(k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}).$$

$$6) 1 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1a & 1b \\ 1c & 1d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

$$7) (h+k) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (h+k)a & (h+k)b \\ (h+k)c & (h+k)d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ha+ka & hb+kb \\ hc+kc & hd+kd \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

$$8) h \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right] = h \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(a+a') & h(b+b') \\ h(c+c') & h(d+d') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ha+ha' & hb+hb' \\ hc+hc' & hd+hd' \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$

- 3 Nello spazio vettoriale numerico $\mathbf{R}^4$ sia dato il seguente insieme di vettori $S = \{(2, 0, 3, 4), (1, 1, 1, 1)\}$

- Il vettore $(3, 1, 4, 5)$ appartiene ad $L(S)$, sottospazio generato da S ?
- Esiste una base di $L(S)$ contenente il vettore $(3, 1, 4, 5)$? In caso affermativo determinarne una.
- Esiste una base di $\mathbf{R}^4$ contenente S ? In caso affermativo determinarne una.

SVOLGIMENTO Es. 3)

- Risulta $L(S) = \{a(2, 0, 3, 4) + b(1, 1, 1, 1)\}_{a,b \in \mathbf{R}}$ pertanto il vettore $(3, 1, 4, 5)$ appartiene ad $L(S)$ se esistono due scalari a, b tali che $(3, 1, 4, 5) = a(2, 0, 3, 4) + b(1, 1, 1, 1)$. Si tratta quindi di risolvere un sistema di quattro equazioni nelle due incognite a, b . Risolto il sistema la sua unica soluzione è $a = 1, b = 1$. Quindi $(3, 1, 4, 5) = (2, 0, 3, 4) + (1, 1, 1, 1)$ e pertanto $(3, 1, 4, 5) \in L(S)$.
- S è un insieme costituito da due vettori linearmente indipendenti di $\mathbf{R}^4$ e pertanto $L(S)$ è un sottospazio di dimensione due di $\mathbf{R}^4$. Allora una qualunque base di $L(S)$ è formata da due vettori indipendenti in $L(S)$. Il vettore $(3, 1, 4, 5)$ appartiene ad $L(S)$ quindi per avere una base di $L(S)$ contenente il vettore $(3, 1, 4, 5)$ basta aggiungere al vettore assegnato un qualunque vettore di $L(S)$ che non sia proporzionale a $(3, 1, 4, 5)$, ad esempio $\mathcal{B} = \{(3, 1, 4, 5), (2, 0, 3, 4)\}$ è una base di $L(S)$ contenente $(3, 1, 4, 5)$.

(iii) S è un insieme costituito da due vettori linearmente indipendenti di $\mathbf{R}^4$ e pertanto esso è completabile ad una base di $\mathbf{R}^4$ aggiungendo opportunamente due vettori linearmente indipendenti. Un metodo per trovare i due vettori da aggiungere è il seguente. Si considera la base canonica $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ di $\mathbf{R}^4$. Trattandosi di quattro vettori linearmente indipendenti, essi non possono stare tutti e quattro in $L(S)$ che ha dimensione due. Cominciando da $(1, 0, 0, 0)$ ci si chiede se esso sta in $L(S)$, ossia $(1, 0, 0, 0) = a(2, 0, 3, 4) + b(1, 1, 1, 1)$? Già le prime tre equazioni $2a + b = 1, b = 0, 3a + b = 0$ danno un sistema incompatibile, pertanto $(1, 0, 0, 0) \notin L(S)$. Allora possiamo aggiungere il vettore $(1, 0, 0, 0)$ ai due vettori $(2, 0, 3, 4), (1, 1, 1, 1)$ ottenendo tre vettori linearmente indipendenti. Per avere una base di $\mathbf{R}^4$ ci serve solo un altro vettore. Proviamo se $(0, 1, 0, 0)$ dipende dai primi tre. Ossia esistono degli scalari a, b, c tali che $(0, 1, 0, 0) = a(2, 0, 3, 4) + b(1, 1, 1, 1) + c(1, 0, 0, 0)$? Otteniamo un sistema di quattro equazioni di tre incognite $2a + b + c = 0, b = 1, 3a + b = 0, 4a + b = 0$. Le ultime tre equazioni ci fanno capire che il sistema è incompatibile. Pertanto $(0, 1, 0, 0)$ non appartiene al sottospazio generato dai primi tre vettori. Questo vuol dire che i quattro vettori $\{(2, 0, 3, 4), (1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\}$ sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di $\mathbf{R}^4$.

- 4 Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}_{2,2}$ si considerino il sistema

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ ed i sottospazi}$$

$$W = L\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\text{e } Z = L\left(\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

- Esistono basi di $\mathbf{R}_{2,2}$ che contengono S ? In caso affermativo determinarne una.
- Esistono sistemi di generatori di $\mathbf{R}_{2,2}$ che contengono S ? In caso affermativo determinarne uno.
- Si determinino almeno due basi di W .
- Si determini una base di Z .
- W e Z hanno la stessa dimensione ? W e Z coincidono ?
- S è linearmente dipendente o indipendente ?

SVOLGIMENTO Es. 4)

$$\text{i) } S = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$