

**Esercizi e complementi di Algebra lineare e
geometria analitica**

Nicola Durante

18 febbraio 2004

Capitolo 1

Determinanti, rango di una matrice e matrici invertibili

1.1 Determinante di una matrice quadrata

Si calcoli il determinante delle seguenti matrici quadrate:

$$\begin{aligned} &1) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad 3) (-4) \\ &4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad 5) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad 6) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &7) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad 8) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 9) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \\ &10) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 9 & 3 \end{pmatrix} \quad 11) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad 12) \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 7 & 12 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$13) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 14) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 15) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 11 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$16) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad 17) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$18) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 19) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 20) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1.2 Matrici invertibili

Si dica quale delle matrici del paragrafo precedente sono invertibili e, per quelle invertibili, se ne calcoli l'inversa.

1.3 Rango di una matrice

Si calcoli il rango delle seguenti matrici:

$$1) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} -4 \end{pmatrix}$$

$$4) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad 5) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad 6) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$7) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad 8) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 9) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$10) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 3 & 9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 11) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 12) \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 7 & 12 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$13) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 14) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad 15) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 11 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$16) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad 17) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$18) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad 19) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad 20) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$21) \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 19) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad 20) \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1.4 Regola di Cramer

Si considerino i sistemi di equazioni lineari assegnati nei capitoli precedenti. Quali di questi sistemi è possibile risolvere con la regola di Cramer ? Per tali sistemi si trovino le soluzioni con la regola di Cramer.

In particolare si risolvere i seguenti sistemi lineari utilizzando, nei casi in cui è possibile, la regola di Cramer:

$$\begin{aligned}
& 1) \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 3x + z = 0 \\ 2z = 4 \end{array} \right. \quad 2) \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 2x - y + 3z = 4 \\ y - z = 0 \end{array} \right. \quad 3) \left\{ \begin{array}{l} 3x + y + z = 8 \\ x + y - z = 0 \\ x - y + 2z = 5 \end{array} \right. \\
& 1) \left\{ \begin{array}{l} 2x + y + z = 4 \\ -x + 2y - z = 1 \\ x + 3y + 2z = 5 \end{array} \right. \quad 2) \left\{ \begin{array}{l} x + y + 2z = 1 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - z = 0 \end{array} \right. \quad 3) \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x - y - z = 0 \\ x - y + z = 2 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Capitolo 2

Applicazioni lineari

2.1 Definizione e prime proprietà

Si dica quale delle seguenti applicazioni sono lineari e perché.

$$f_1 : (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \rightarrow (2x - y, 0, 0, 0) \in \mathbf{R}^4$$

$$f_2 : a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \in \mathbf{R}_3[x] \rightarrow (a_0 - a_1, -2) \in \mathbf{R}^2$$

$$f_3 : \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & h \end{pmatrix} \in \mathbf{R}_{2,3} \rightarrow ax - hx^2 \in \mathbf{R}_3[x]$$

$$f_4 : (x, y) \in \mathbf{R}^2 \rightarrow (2x, 2y) \in \mathbf{R}^2$$

$$f_5 : (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \rightarrow (x, y, t) \in \mathbf{R}^3$$

$$f_6 : (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \rightarrow \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 & x_2 + 2x_4 \\ -x_1 & -x_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}_{2,2}$$

$$f_7 : (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \rightarrow (2x - y + z, x - z, 3x - y) \in \mathbf{R}^3$$

$$f_8 : (x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \rightarrow (y, z, x, 0, 0) \in \mathbf{R}^5$$

$$f_9 : (a, b, c) \in \mathbf{R}^3 \rightarrow ax - bx^+(2a - b - c)x^3 \in \mathbf{R}_3[x]$$

$$f_{10} : (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbf{R}^5 \rightarrow (x_1 - x_2 + 2, x_3, x_5) \in \mathbf{R}^3$$

2.2 Nucleo e immagine

Per ciascuna delle applicazioni f_i del paragrafo precedente che sia lineare si determinino:

- $\text{Ker } f_i$ e $\text{Im } f_i$;
- una base di $\text{Ker } f_i$;
- una base di $\text{Im } f_i$.

2.3 Isomorfismi

Si dica quale delle applicazioni f_i è un isomorfismo.

2.4 Matrici e applicazioni lineari

- i) Per ciascuna delle applicazioni f_i che sia lineare si determini la matrice associata a f_i nei riferimenti $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$ entrambi naturali.
- ii) Per ciascuna delle applicazioni f_i che sia lineare si determini la matrice associata a f_i nei riferimenti $\mathcal{R}$ naturale ed $\mathcal{R}'$ a scelta dello studente ma non naturale.

- iii) Per ciascuna delle applicazioni f_i che sia lineare si determini la matrice associata a f_i nei riferimenti $\mathcal{R}$ a scelta ma non naturale ed $\mathcal{R}'$ naturale.
- ii) Per ciascuna delle applicazioni f_i che sia lineare si determini la matrice associata a f_i nei riferimenti $\mathcal{R}$ ed $\mathcal{R}'$ a scelta dello studente ma entrambi non naturali.

2.5 Esercizi vari sulle applicazioni lineari

1) Sapendo che f è un'applicazione lineare di $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^3$ tale che $f(1, 0, 0) = (1, 2, 0)$, $f(0, 1, 1) = (0, 1, 1)$ e $f(1, 1, 3) = (1, 1, -1)$.

- i) Si può determinare una base di $\text{Im } f$?
- ii) si può determinare una base di $\text{Ker } f$?
- iii) si può dire se f è suriettiva ?
- iv) si può dire se f è iniettiva ?
- v) si può dire se f è un isomorfismo ?
- vi) si può determinare $f(-1, -1, 4)$?

2) Sapendo che f è un'applicazione lineare di $\mathbf{R}^3$ in $\mathbf{R}^2$ tale che $\text{Im } f = L((1, 2), (-1, -2))$

- i) si può determinare la dimensione di $\text{Ker } f$?
- ii) si può dire se f è suriettiva ?