

COGNOME..... NOME.....MATRICOLA.....

Risolvere gli esercizi inserendo le risposte negli **spazi predisposti** con indicazione dei **calcoli** effettuati e fornendo **spiegazioni** chiare ed essenziali. **NON SI ACCETTANO RISPOSTE SCRITTE SU ALTRI FOGLI.**

- 1. Dati i tre vettori u, v e w di R^3 , si dica se w è combinazione lineare di u e v . In caso affermativo si determinino tutti i possibili scalari α, β tali che $w = \alpha u + \beta v$.

- (i) $u = (1, 3, 0), v = (2, 1, 5), w = (1, 1, 1)$.
- (ii) $u = (1, 5, 1/5), v = (0, 0, 1), w = (5, 25, 1)$.
- (iii) $u = (1, 0, 0), v = (0, 1, 0), w = (1, 1, 0)$.

Si dica poi in ciascuno dei tre casi qual'è il numero massimo di vettori linearmente indipendenti in $\{u, v, w\}$.

Infine, senza effettuare calcoli, si dica se i seguenti vettori sono linearmente indipendenti o linearmente dipendenti.

- (a) $w_1 = (1, 0, 0, 0, 0), w_2 = (2, 0, 0, 0, 0), w_3 = (0, 1, 0, 0, 0)$.
- (b) $w_1 = (1, 1, 1, 1, 1), w_2 = (1, 1, 1, 5, 5), w_3 = (2, 2, 2, 1, 1)$.
- (c) $w_1 = (1, 1, 2), w_2 = (2, 2, 2), w_3 = (1/3, 1/5, 1/7), w_4 = (1, 5, 7)$.

- 2. Siano date le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si calcolino, ove possibile, le seguenti espressioni

- (i) $2AC, 2AB + A, 3BA - B$.
- (ii) $-2C + 7D^t - AC, 2CD - A, DA$
- (iii) $B^t D - D, CD + A^t, B^t D - C$

Inoltre

- (a) L'insieme $M_3(R)$ delle matrici quadrate di ordine 3 ad elementi reali costituisce uno spazio vettoriale ?
- (b) Esistono in $M_3(R)$ alcune matrici speciali da cui si possono ricavare tutte le altre ?
- (c) Si provi che $M_3(R)$ gode di almeno tre delle proprietà che definiscono uno spazio vettoriale.

- 3. Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ -4 & -4 & -4 & -4 & -4 & -4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$, si consideri il sistema $AX = 0$, ove $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^t$.

- (i) Determinare tutte le sue soluzioni.
- (ii) Tali soluzioni formano un sottospazio di R^3 ?
- (iii) Il vettore $(a, a, 2a)$ è soluzione del sistema per qualche numero reale a ?

- 4. Si riduca in forma a gradini e si calcoli il rango della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si consideri poi il sistema $AX = 0$, ove $X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)^t$.

- (i) Quante soluzioni ha il sistema $AX = 0$? Si determinino tutte le sue soluzioni.
- (ii) E il sistema $AX = B$ con $B = (1, 1, 1, 1, 1, 1)^t$ quante soluzioni ha ? Si determinino tutte le sue soluzioni.