

Prove di esame

Nicola Durante

12 febbraio 2004

MATEMATICA II (Prof. N. Durante) FAC-SIMILE I Prova Gen. 2004

• 1.

(i) Sia assegnata l'equazione lineare $x - 5y + 7z = 4$ in tre incognite x, y, z .

(a) Si dica cosa è una soluzione di tale equazione.

(b) Si determinino tutte le soluzioni dell'equazione.

(ii) Assegnato il seguente sistema lineare
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 - x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 = 4 \end{cases}$$
 si determinino, se il sistema è compatibile, tutte le sue soluzioni.

SVOLGIMENTO Es. 1)

a) Una soluzione dell'equazione lineare $x - 5y + 7z = 4$ é un vettore numerico di $\mathbf{R}^3$ (una terna ordinata di numeri reali).

b) Per calcolare tutte le soluzioni dell'equazione assegnata trattandosi di una sola equazione lineare in tre incognite risulta che due delle incognite sono incognite libere (ad esempio la y e la z). Pertanto per trovare tutte le soluzioni dell'equazione basta ricavare una delle incognite, ad esempio la x , in funzione delle altre due.

$$x = 4 + 5y - 7z$$

e pertanto tutte le soluzioni dell'equazione assegnata sono date da

$$\mathcal{S} = \{(4 + 5y - 7z, y, z)\}_{y,z \in \mathbf{R}}.$$

iii) La matrice completa associata al sistema assegnato è

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

prima di risolvere il sistema troviamo una matrice a gradini equivalente ad A' .

Tramite le operazioni elementari $\mathbf{a}_4 - \mathbf{a}_1 \rightarrow \mathbf{a}_4$; poi $\mathbf{a}_2 \leftrightarrow \mathbf{a}_3$; infine $\mathbf{a}_4 - \mathbf{a}_2 \rightarrow \mathbf{a}_4$ otteniamo la seguente matrice a gradini equivalente ad A'

$$\overline{A'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema lineare avente questa come matrice completa è:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_2 - x_4 = 2 \\ x_3 - x_4 = 0 \\ -x_4 = 0 \end{cases}$$

Questo sistema ha quattro equazioni, quattro incognite e quattro pivot pertanto ha un'unica soluzione che si ricava così $x_4 = 0$ dall'ultima equazione, poi $x_3 = x_4 = 0$ dalla penultima equazione, $x_2 = 2 - x_4 = 2$ dalla seconda equazione ed infine $x_1 = -x_2 - x_3 + x_4 + 2 = 0$ dalla prima equazione. Pertanto $\mathcal{S} = \{(0, 2, 0, 0)\}$ è l'unica soluzione del sistema a gradini e quindi anche del sistema assegnato ad esso equivalente.

- 2 Si dimostrino sei delle otto proprietà che rendono $\mathbf{R}_{2,2}$ spazio vettoriale reale.

SVOLGIMENTO Es. 2

Le otto proprietà che rendono un insieme V spazio vettoriale reale sono:

- 1) associativa: $(\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{w})$
- 2) elemento neutro: $\underline{v} + \underline{0} = \underline{v} = \underline{0} + \underline{v}$
- 3) opposto: $\underline{v} + (-\underline{v}) = (-\underline{v}) + \underline{v} = \underline{0}$
- 4) commutativa: $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$
- 5) $(hk)\underline{v} = h(k\underline{v})$
- 6) $1\underline{v} = \underline{v}$
- 7) $(h + k)\underline{v} = h\underline{v} + k\underline{v}$
- 8) $h(\underline{u} + \underline{v}) = h\underline{u} + h\underline{v}$

Per dimostrare che $\mathbf{R}_{2,2}$ verifica le otto proprietà che lo rendono spazio vettoriale reale basta far vedere che sappiamo definire una somma tra matrici e un prodotto di uno scalare per una matrice che verificano le otto proprietà.

Somma tra matrici:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$$

Prodotto per uno scalare:

$$h \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ha & hb \\ hc & hd \end{pmatrix}.$$

Con queste due operazioni le otto proprietà sono verificate. Ad esempio

$$2) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

$$3) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$5) (hk) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (hk)a & (hk)b \\ (hk)c & (hk)d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(ka) & h(kb) \\ h(kc) & h(kd) \end{pmatrix} = h(k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}).$$

$$6) 1 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1a & 1b \\ 1c & 1d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

$$7) (h+k) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (h+k)a & (h+k)b \\ (h+k)c & (h+k)d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ha+ka & hb+kb \\ hc+kc & hd+kd \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

$$8) h \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right] = h \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(a+a') & h(b+b') \\ h(c+c') & h(d+d') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ha+ha' & hb+hb' \\ hc+hc' & hd+hd' \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}.$$

- 3 Nello spazio vettoriale numerico $\mathbf{R}^4$ sia dato il seguente insieme di vettori $S = \{(2, 0, 3, 4), (1, 1, 1, 1)\}$

- Il vettore $(3, 1, 4, 5)$ appartiene ad $L(S)$, sottospazio generato da S ?
- Esiste una base di $L(S)$ contenente il vettore $(3, 1, 4, 5)$? In caso affermativo determinarne una.
- Esiste una base di $\mathbf{R}^4$ contenente S ? In caso affermativo determinarne una.

SVOLGIMENTO Es. 3)

- (i) Risulta $L(S) = \{a(2, 0, 3, 4) + b(1, 1, 1, 1)\}_{a,b \in \mathbf{R}}$ pertanto il vettore $(3, 1, 4, 5)$ appartiene ad $L(S)$ se esistono due scalari a, b tali che $(3, 1, 4, 5) = a(2, 0, 3, 4) + b(1, 1, 1, 1)$. Si tratta quindi di risolvere un sistema di quattro equazioni nelle due incognite a, b . Risolto il sistema la sua unica soluzione è $a = 1, b = 1$. Quindi $(3, 1, 4, 5) = (2, 0, 3, 4) + (1, 1, 1, 1)$ e pertanto $(3, 4, 1, 5) \in L(S)$.
- (ii) S è un insieme costituito da due vettori linearmente indipendenti di $\mathbf{R}^4$ e pertanto $L(S)$ è un sottospazio di dimensione due di $\mathbf{R}^4$. Allora una qualunque base di $L(S)$ è formata da due vettori indipendenti in $L(S)$. Il vettore $(3, 4, 1, 5)$ appartiene ad $L(S)$ quindi per avere una base di $L(S)$ contenente il vettore $(3, 4, 1, 5)$ basta aggiungere al vettore assegnato un qualunque vettore di $L(S)$ che non sia proporzionale a $(3, 4, 1, 5)$, ad esempio $\mathcal{B} = \{(3, 4, 1, 5), (2, 0, 3, 4)\}$ è una base di $L(S)$ contenente $(3, 4, 1, 5)$.
- (iii) S è un insieme costituito da due vettori linearmente indipendenti di $\mathbf{R}^4$ e pertanto esso è completabile ad una base di $\mathbf{R}^4$ aggiungendo opportunamente due vettori linearmente indipendenti. Un metodo per trovare i due vettori da aggiungere è il seguente. Si considera la base canonica $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ di $\mathbf{R}^4$. Trattandosi di quattro vettori linearmente indipendenti, essi non possono stare tutti e quattro in $L(S)$ che ha dimensione due. Cominciando da $(1, 0, 0, 0)$ ci si chiede se esso sta in $L(S)$, ossia $(1, 0, 0, 0) = a(2, 0, 3, 4) + b(1, 1, 1, 1)$? Già le prime tre equazioni $2a + b = 1, b = 0, 3a + b = 0$ danno un sistema incompatibile, pertanto $(1, 0, 0, 0) \notin L(S)$. Allora possiamo aggiungere il vettore $(1, 0, 0, 0)$ ai due vettori $(2, 0, 3, 4), (1, 1, 1, 1)$ ottenendo tre vettori linearmente indipendenti. Per avere una base di $\mathbf{R}^4$ ci serve solo un altro vettore. Proviamo se $(0, 1, 0, 0)$ dipende dai primi tre. Ossia esistono degli scalari a, b, c tali che $(0, 1, 0, 0) = a(2, 0, 3, 4) + b(1, 1, 1, 1) + c(1, 0, 0, 0)$? Otteniamo un sistema di quattro equazioni di tre incognite $2a + b + c = 0, b = 1, 3a + b = 0, 4a + b = 0$. Le ultime tre equazioni ci fanno capire che il sistema è incompatibile. Pertanto $(0, 1, 0, 0)$ non appartiene al sottospazio generato dai primi tre vettori. Questo vuol dire che i quattro vettori $\{(2, 0, 3, 4), (1, 1, 1, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\}$ sono linearmente indipendenti e quindi formano una base di $\mathbf{R}^4$.

- 4 Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}_{2,2}$ si considerino il sistema

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ ed i sottospazi}$$

$$W = L\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$\text{e } Z = L\left(\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

- i) Esistono basi di $\mathbf{R}_{2,2}$ che contengono S ? In caso affermativo determinarne una.
- ii) Esistono sistemi di generatori di $\mathbf{R}_{2,2}$ che contengono S ? In caso affermativo determinarne uno.
- iii) Si determinino almeno due basi di W .
- iv) Si determini una base di Z .
- v) W e Z hanno la stessa dimensione ? W e Z coincidono ?
- vi) S è linearmente dipendente o indipendente ?

SVOLGIMENTO Es. 4)

- i) S è linearmente dipendente risultando

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$
 Pertanto non possono esistere basi di $\mathbf{R}_{2,2}$ che contengono S .
- ii) Sistemi di generatori di $\mathbf{R}_{2,2}$ che contengono S esistono. Basta aggiungere ai vettori di S una qualunque base di $\mathbf{R}_{2,2}$, ad esempio la base canonica.
- iii) I tre vettori che generano W sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono essi stessi una base di W . Per ottenere un'altra base di W bisogna prendere altri tre vettori linearmente indipendenti in W .
Ad esempio

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$
- iv) I due vettori che generano Z sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base di Z .
- v) $\dim W = 3 \neq \dim Z = 2$. Pertanto W e Z non possono coincidere.
- vi) S è linearmente dipendente come già osservato in i)

Cogn. Nome Matr.

- 1. Fissato nel piano un riferimento cartesiano monometrico e ortogonale siano $P(3, -5)$ un punto ed $r : x + y + 1 = 0$ una retta.
 - (a) Si scrivano le equazioni parametriche e cartesiane della retta r' per P parallela ad r .
 - (b) si scrivano le equazioni parametriche e cartesiane della retta r'' per P ortogonale ad r .
 - (c) si calcoli la distanza tra le rette r ed r' .
 - (d) si trovino le coordinate del punto H intersezione di r ed r'' .
- 2. Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale siano $\pi : 2x - y + 3z - 1 = 0$ un piano, $P'(1, 1, -1)$ un punto e sia s la retta intersezione dei piani $\alpha : x - y + z + 2 = 0$, e $\beta : 2x + y + z - 3 = 0$. Si determini:
 - (a) Un'equazione per la retta s' passante per P' ed ortogonale a π .
 - (b) un'equazione per il piano π' passante per P' e parallelo a π .
 - (c) le coordinate del punto di intersezione tra la retta s' e il piano π .
 - (d) un'equazione per la retta s'' passante per P' e parallela a s .
- 3. Usando rette e piani degli esercizi precedenti:
 - [] Il vettore $(1, -1)$ é parallelo a r .
 - [] le rette s ed s' sono sghembe.
 - [] $d(\pi, \pi') = 1$.
- 4.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ -2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$
 - [] le soluzioni formano un sottospazio di $\mathbf{R}^4$ di dimensione 1.
 - [] le soluzioni formano un sottospazio di $\mathbf{R}^4$ di dimensione 3.
 - [] le soluzioni formano un sottospazio di $\mathbf{R}^4$ di dimensione 2
- 5. $S = \{(1, 1, 0, 0), (1, 2, 3, 1), (0, 3, 3, 1), (-1, 0, 0, 0)\}$.
 - [] S é una base di $\mathbf{R}^4$.
 - [] $\dim L(S) = 3$.
 - [] La matrice di ordine 4 avente per righe i vettori di S é invertibile.

Cogn. Nome Matr.

- 1. Fissato nel piano un riferimento cartesiano monometrico e ortogonale siano $P(-3, 5)$ un punto ed $r : -2x - y + 1 = 0$ una retta.
 - (a) Si scrivano le equazioni parametriche e cartesiane della retta r' per P parallela ad r .
 - (b) si scrivano le equazioni parametriche e cartesiane della retta r'' per P ortogonale ad r .
 - (c) si calcoli la distanza tra le rette r ed r' .
 - (d) si trovino le coordinate del punto H intersezione di r ed r'' .
- 2. Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale siano $\pi : x - 2y + z - 1 = 0$ un piano, $P'(1, -1, 1)$ un punto e sia s la retta intersezione dei piani $\alpha : 2x - y - z + 2 = 0$, e $\beta : x + y + z - 3 = 0$. Si determini:
 - (a) Un'equazione per la retta s' passante per P' ed ortogonale a π .
 - (b) un'equazione per il piano π' passante per P' e parallelo a π .
 - (c) le coordinate del punto di intersezione tra la retta s' e il piano π .
 - (d) un'equazione per la retta s'' passante per P' e parallela a s .
- 3. Usando rette e piani degli esercizi precedenti:
 - [] Il vettore $(1, -1)$ é parallelo a r .
 - [] le rette s ed s' sono sghembe.
 - [] $d(\pi, \pi') = 1$.
- 4.
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$
 - [] le soluzioni formano un sottospazio di $\mathbf{R}^4$ di dimensione 1.
 - [] le soluzioni formano un sottospazio di $\mathbf{R}^4$ di dimensione 3.
 - [] le soluzioni formano un sottospazio di $\mathbf{R}^4$ di dimensione 2
- 5. $S = \{(-1, -1, 0, 0), (1, -2, -3, 1), (0, -3, -3, -1), (1, 0, 0, 0)\}$.
 - [] S é una base di $\mathbf{R}^4$.
 - [] $\dim L(S) = 3$.
 - [] La matrice di ordine 4 avente per righe i vettori di S é invertibile.

Cogn. Nome Matr.

- 1. Fissato nel piano un riferimento cartesiano monometrico e ortogonale siano $P(-3, -5)$ un punto ed $r : -x - y + 1 = 0$ una retta.
 - (a) Si scrivano le equazioni parametriche e cartesiane della retta r' per P parallela ad r .
 - (b) si scrivano le equazioni parametriche e cartesiane della retta r'' per P ortogonale ad r .
 - (c) si calcoli la distanza tra le rette r ed r' .
 - (d) si trovino le coordinate del punto H intersezione di r ed r'' .
- 2. Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale siano $\pi : 2x - y - z - 1 = 0$ un piano, $P'(-1, 1, 1)$ un punto e sia s la retta intersezione dei piani $\alpha : -x - y - z + 2 = 0$, e $\beta : x + y + z - 3 = 0$. Si determini:
 - (a) Un'equazione per la retta s' passante per P' ed ortogonale a π .
 - (b) un'equazione per il piano π' passante per P' e parallelo a π .
 - (c) le coordinate del punto di intersezione tra la retta s' e il piano π .
 - (d) un'equazione per la retta s'' passante per P' e parallela a s .
- 3. Usando rette e piani degli esercizi precedenti:
 - [] Il vettore $(1, -1)$ é parallelo a r .
 - [] le rette s ed s' sono sghembe.
 - [] $d(\pi, \pi') = 1$.
- 4.
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -2x_2 + x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$
 - [] le soluzioni formano un sottospazio di $\mathbf{R}^4$ di dimensione 1.
 - [] le soluzioni formano un sottospazio di $\mathbf{R}^4$ di dimensione 3.
 - [] le soluzioni formano un sottospazio di $\mathbf{R}^4$ di dimensione 2
- 5. $S = \{(1, 1, 0, 0), (1, -2, 3, 1), (0, 3, 1, 1), (1, 0, 0, 0)\}$.
 - [] S é una base di $\mathbf{R}^4$.
 - [] $\dim L(S) = 3$.
 - [] La matrice di ordine 4 avente per righe i vettori di S é invertibile.

Cogn. Nome Matr.

- 1. Fissato nel piano un riferimento cartesiano monometrico e ortogonale siano $P(5, 3)$ un punto ed $r : x + y + 3 = 0$ una retta.
 - (a) Si scrivano le equazioni parametriche e cartesiane della retta r' per P parallela ad r .
 - (b) si scrivano le equazioni parametriche e cartesiane della retta r'' per P ortogonale ad r .
 - (c) si calcoli la distanza tra le rette r ed r' .
 - (d) si trovino le coordinate del punto H intersezione di r ed r'' .
- 2. Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale siano $\pi : -x - y + z + 1 = 0$ un piano, $P'(-1, 1, 1)$ un punto e sia s la retta intersezione dei piani $\alpha : x - y - z + 2 = 0$, e $\beta : x + y + z - 3 = 0$. Si determini:
 - (a) Un'equazione per la retta s' passante per P' ed ortogonale a π .
 - (b) un'equazione per il piano π' passante per P' e parallelo a π .
 - (c) le coordinate del punto di intersezione tra la retta s' e il piano π .
 - (d) un'equazione per la retta s'' passante per P' e parallela a s .
- 3. Usando rette e piani degli esercizi precedenti:
 - [] Il vettore $(1, -1)$ é parallelo a r .
 - [] le rette s ed s' sono sghembe.
 - [] $d(\pi, \pi') = 1$.
- 4.
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$
 - [] le soluzioni formano un sottospazio di $\mathbf{R}^4$ di dimensione 1.
 - [] le soluzioni formano un sottospazio di $\mathbf{R}^4$ di dimensione 3.
 - [] le soluzioni formano un sottospazio di $\mathbf{R}^4$ di dimensione 2
- 5. $S = \{(1, -1, 0, 0), (1, 2, 3, 0), (0, -2, 2, -1), (-1, 0, 0, 0)\}$.
 - [] S é una base di $\mathbf{R}^4$.
 - [] $\dim L(S) = 3$.
 - [] La matrice di ordine 4 avente per righe i vettori di S é invertibile.

Cogn. Nome Matr.

- 1. Fissato nel piano un riferimento cartesiano monometrico e ortogonale siano $P(2, -3)$ un punto ed $r : x + y + 3 = 0$ una retta.
 - (a) Si scrivano le equazioni parametriche e cartesiane della retta r' per P parallela ad r .
 - (b) si scrivano le equazioni parametriche e cartesiane della retta r'' per P ortogonale ad r .
 - (c) si calcoli la distanza tra le rette r ed r' .
 - (d) si trovino le coordinate del punto H intersezione di r ed r'' .
- 2. Fissato nello spazio un riferimento cartesiano monometrico ortogonale siano $\pi : x - y - z - 1 = 0$ un piano, $P'(1, 3, 1)$ un punto e sia s la retta intersezione dei piani $\alpha : x - y + z + 1 = 0$, e $\beta : x + y + z - 2 = 0$. Si determini:
 - (a) Un'equazione per la retta s' passante per P' ed ortogonale a π .
 - (b) un'equazione per il piano π' passante per P' e parallelo a π .
 - (c) le coordinate del punto di intersezione tra la retta s' e il piano π .
 - (d) un'equazione per la retta s'' passante per P' e parallela a s .
- 3. Usando rette e piani degli esercizi precedenti:
 - [] Il vettore $(1, -1)$ é parallelo a r .
 - [] le rette s ed s' sono sghembe.
 - [] $d(\pi, \pi') = 1$.
- 4.
$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$
 - [] le soluzioni formano un sottospazio di $\mathbf{R}^4$ di dimensione 1.
 - [] le soluzioni formano un sottospazio di $\mathbf{R}^4$ di dimensione 3.
 - [] le soluzioni formano un sottospazio di $\mathbf{R}^4$ di dimensione 2
- 5. $S = \{(1, 1, 0, 0), (1, 1, -3, 1), (0, -1, 3, -1), (-1, 0, 0, 0)\}$.
 - [] S é una base di $\mathbf{R}^4$.
 - [] $\dim L(S) = 3$.
 - [] La matrice di ordine 4 avente per righe i vettori di S é invertibile.