# Note integrative per il corso di Equazioni Differenziali alle Derivate Parziali

Nicola Fusco

## 1 Alcune formule utili

Nel seguito, fissato un intero positivo $n$, con $\alpha$ denotiamo un *multi-indice* di ordine $n$, cioè una $n$-upla $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ di interi non negativi. La *lunghezza* $|\alpha|$ del multi-indice $\alpha$ è definita ponendo

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots \alpha_n \,,$$

mentre, se $x \in \mathbb{R}^n$, con il simbolo $x^\alpha$ denotiamo il prodotto

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_n^{\alpha_n} \,.$$

Poniamo infine per ogni multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$

$$\binom{|\alpha|}{\alpha} = \frac{|\alpha|!}{\alpha!} \,,$$

dove si è posto $\alpha! = \alpha_1! \cdot \dots \cdot \alpha_n!$.

Se $\alpha, \beta$ sono due multi-indici di ordine $n$, diremo che $\beta \le \alpha$ se risulta $\beta_i \le \alpha_i$ per ogni $i = 1, \dots, n$. In tal caso si definisce il coefficiente binomiale $\binom{\alpha}{\beta}$ ponendo

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} \,.$$

Introdotte queste notazioni, passiamo ad enunciare e dimostrare il seguente risultato noto come *teorema multinomiale.*

**Teorema 1** *Siano $a_1, \dots, a_n$ numeri reali e $k \ge 2$ intero. Si ha*

$$(1) \qquad \big(a_1 + \dots + a_n\big)^k = \sum_{|\alpha|=k} \binom{|\alpha|}{\alpha} a^\alpha \,,$$

*dove la somma è estesa a tutti i multi-indici $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ di lunghezza $k$.*

**Dimostrazione.** Dimostriamo la (1) per induzione su $n$. Per $n = 2$, ricordando la formula del binomio di Newton, si ha

$$(a_1 + a_2)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a_1^i a_2^{k-i}$$

e tale formula coincide con la (1), in quanto se $n = 2$ i multi-indici $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ di lunghezza $k$ sono necessariamente del tipo $\alpha = (i, k-i)$. Fissato dunque $n > 2$ tale che la (1) valga per $n-1$, sia $a = (a', a_n)$, con $a' = (a_1, \dots, a_{n-1})$. Usando ancora la formula del binomio di Newton e l'ipotesi induttiva, abbiamo

$$(2) \qquad \big(a_1 + \dots + a_n\big)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \big(a_1 + \dots + a_{n-1}\big)^i a_n^{k-i} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \sum_{|\beta|=i} \binom{|\beta|}{\beta} a'^\beta a_n^{k-i} \,.$$

Osserviamo che per ogni multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ di lunghezza $k$, posto $\beta = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ e $i = |\beta|$, si ha $i \in \{0, 1, \ldots k\}$ e $\alpha_n = k - i$ e che viceversa, fissato un multi-indice $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ di lunghezza $i \in \{0, 1, \ldots k\}$, il multi-indice $\alpha = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, k - i)$ ha lunghezza $k$.
Inoltre, se $\alpha = (\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}, k - i)$ ha lunghezza $k$, risulta ovviamente

$$a^\alpha = a'^\beta a_n^{k-i}, \qquad \binom{|\alpha|}{\alpha} = \binom{k}{i}\binom{|\beta|}{\beta}.$$

La (1) segue allora da queste due uguaglianze e dalla (2). □

Se $f$ è una funzione dotata di derivate fino all'ordine $k$ in un aperto $\Omega$ di $\mathbb{R}^n$, dato un multi-indice $\alpha$ di lunghezza $k$ con il simbolo $D^\alpha f$ si denota la derivata

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^k f(x)}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_n}^{\alpha_n}}.$$

A tale riguardo, ricordiamo la seguente *formula di derivazione di Leibniz* la cui dimostrazione lasciamo per esercizio. Date due funzioni $f$ e $g$ di classe $C^k(\Omega)$, per ogni multi-indice $\alpha$ di lunghezza minore o uguale a $k$, si ha

$$D^\alpha(fg) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\beta f D^{\alpha-\beta} g.$$

Passiamo ora a dimostrare la seguente *formula di Wallis.*

**Proposizione 2**

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2.$$

**Dimostrazione.** Per ogni $n = 0, 1, 2, \ldots$ poniamo

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n \vartheta \, d\vartheta.$$

Si ha facilmente

$$(3) \qquad I_{n+1} \leq I_n \quad \text{per ogni } n = 0, 1, \ldots, \qquad I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad \text{per ogni } n \geq 2.$$

La prima disuguaglianza è immediata, mentre la seconda si ottiene facilmente integrando per parti. Da queste relazioni segue allora che

$$1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n} \qquad \text{per ogni } n \geq 1.$$

Se ne deduce allora in particolare che

$$(4) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1.$$

D'altra parte, applicando la seconda uguaglianza in (3) si ha che per ogni $n \geq 1$

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \ldots = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} I_0 = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}, \quad I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} = \ldots = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} I_1 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

Da queste uguaglianze e dalla (4) segue allora che

$$\lim_{n\to\infty} (2n+1)\frac{\pi}{2}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 = 1$$

e quindi la tesi. □

La prossima formula è nota come *formula di Stirling.*

**Teorema 3**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}^n n!}{n^{n+1/2}} = \sqrt{2\pi}\,. \tag{5}$$

**Dimostrazione.** Poniamo per ogni intero $n \geq 1$

$$x_n = \log(n!) - \Big(n+\frac{1}{2}\Big)\log n + n \tag{6}$$

e osserviamo che per ogni $n \geq 1$

$$x_n - x_{n+1} = \Big(n+\frac{1}{2}\Big)\log\Big(\frac{n+1}{n}\Big) - 1 = \Big(n+\frac{1}{2}\Big)\log\left(\frac{1+\dfrac{1}{2n+1}}{1-\dfrac{1}{2n+1}}\right) - 1\,. \tag{7}$$

Ricordando lo sviluppo di Taylor

$$\log\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big) = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\,,$$

dalla (7) si ha subito che per ogni $n \geq 1$

$$x_n - x_{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1}\frac{1}{(2n+1)^{2k}}\,.$$

Da questa relazione segue allora che per ogni $n$

$$0 < x_n - x_{n+1} < \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^{2k}} = \frac{1}{3}\frac{1}{(2n+1)^2-1} = \frac{1}{12}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big)\,.$$

Da questa relazione possiamo concludere che la successione $\{x_n\}$ è strettamente decrescente, mentre la successione $\left\{x_n - \dfrac{1}{12n}\right\}$ è strettamente crescente. Dunque esiste il limite

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l$$

e $l$ è finito. Dalla (6), passando all'esponenziale ad ambo i membri abbiamo allora che

$$C = \mathrm{e}^l = \lim_{n\to\infty} e^{x_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^n n!}{n^{n+1/2}}\,. \tag{8}$$

Ci resta dunque da provare che $C = \sqrt{2\pi}$. A tale scopo utilizziamo la formula di Wallis dalla quale otteniamo facilmente

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{\sqrt{2n+1}(2n-1)!!} = \lim_{n\to\infty}\frac{\big[(2n)!!\big]^2}{\sqrt{2n+1}(2n)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2^n n!)^2}{\sqrt{2n+1}(2n)!}\,.$$

Eliminiamo ora i due fattoriali che compaiono nell'ultima successione, utilizzando la relazione di limite (8), ottenendo allora

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\left(\frac{2^n C n^{n+1/2}}{\mathrm{e}^n}\right)^2 \frac{\mathrm{e}^{2n}}{(2n)^{2n+1/2}C} = \lim_{n\to\infty}\frac{C\sqrt{n}}{\sqrt{4n+2}} = \frac{C}{2}\,,$$

da cui segue $C = \sqrt{2\pi}$ e quindi la (5). $\square$

## 2 Richiami di Analisi Matematica

Nel seguito indicheremo con $B_r(x)$ la palla aperta di $\mathbb{R}^n$ di centro $x$ e raggio $r > 0$. Se il centro è l'origine la palla di raggio $r$ verrà denotata con $B_r$.

Ricordiamo la seguente formula di integrazione che si dimostra facilmente passando a coordinate polari in $\mathbb{R}^n$. Per semplicità supponiamo che $f$ sia una funzione continua e sommabile da $B_r(x_0)$ in $\mathbb{R}$. Si ha allora

$$\int_{B_r(x_0)} f(x)\,dx = \int_0^r d\varrho \int_{\partial B_\varrho(x_0)} f(x)\,dS(x)\,, \tag{9}$$

dove con $S$ abbiamo indicato la misura superficiale sul bordo di $B_\varrho(x_0)$.

Osserviamo che nelle nostre ipotesi su $f$ la funzione

$$\varrho \in [0,r) \to \int_{\partial B_\varrho(x_0)} f(x)\,dS(x)$$

è continua e dunque dalla (9) segue che per ogni $\varrho \in (0,r)$ si ha che

$$\frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\int_{B_\varrho(x)} f(x)\,dx\right) = \int_{\partial B_\varrho(x_0)} f(x)\,dS(x)\,.$$

Ricordiamo che il *teorema della divergenza* afferma che se $\Omega$ è un aperto regolare con frontiera di classe $C^1$ e $F : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ è un campo vettoriale di classe $C^1(\overline{\Omega})$ si ha

$$\int_\Omega \operatorname{div} F\,dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu\,dS\,, \tag{10}$$

dove $\nu$ denota la normale esterna al bordo di $\Omega$.

Ricordiamo qui alcune conseguenze immediate della (10). Supponendo sempre $\Omega$ aperto regolare di classe $C^1$, se $f, g \in C^1(\overline{\Omega})$, valgono le seguenti *formule di Gauss–Green*

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx = \int_{\partial\Omega} f\nu_i\,dS \qquad \text{per ogni } i = 1,\dots,n$$

e le *formule di integrazione per parti*

$$\int_\Omega \frac{\partial f}{\partial x_i} g\,dx = -\int_\Omega \frac{\partial g}{\partial x_i} f\,dx + \int_{\partial\Omega} fg\nu_i\,dS \qquad \text{per ogni } i = 1,\dots,n\,.$$

Se invece $f, g \in C^2(\overline{\Omega})$, sempre dal teorema della divergenza, si ottengono le seguenti *formule di Green*

$$\text{(i)} \qquad \int_\Omega \Delta f\,dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial \nu}\,dS\,,$$

$$\text{(ii)} \qquad \int_\Omega Df \cdot Dg\,dx = -\int_\Omega f\Delta g\,dx + \int_{\partial\Omega} f\frac{\partial g}{\partial \nu}\,dS\,,$$

$$\text{(iii)} \qquad \int_\Omega \big(f\Delta g - g\Delta f\big)\,dx = \int_{\partial\Omega}\Big(f\frac{\partial g}{\partial \nu} - f\frac{\partial f}{\partial \nu}\Big)\,dS\,.$$

Richiamiamo qui d seguito le proprietà essenziali delle convoluzioni e dei mollificatori.

**Teorema 4** *Siano $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$. Per quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$ la funzione $y \to f(x-y)g(y)$ è sommabile in $\mathbb{R}^n$ e, posto*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy \qquad \textit{per q.o. } x \in \mathbb{R}^n\,, \tag{11}$$

*$f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,. \tag{12}$$

**Dimostrazione.** Osserviamo che se $p=\infty$ la funzione $y \to f(x-y)g(y)$ è sommabile per ogni $x$ e quindi il prodotto di convoluzione $(f*g)(x)$ è definito sempre. Inoltre in questo caso è immediato verificare che $f*g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e che vale la (12).
Supponiamo ora che $f,g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, con $f,g \geq 0$. Applicando due volte il teorema di Fubini (che per le funzioni non negative vale senza ipotesi di sommabilità) e il cambio di variabili $z=x-y$, abbiamo

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (f*g)(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dxdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\,dy \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)dy \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\,dz = \|f\|_1\|g\|_1
\end{aligned} \tag{13}
$$

e quindi la (12) risulta provata. In particolare si ha che la funzione $f(x-y)g(y)$ è sommabile in $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$.
Supponiamo ora che $f,g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ di segno qualunque. Poiché

$$
f(x-y)g(y) = \left[f^+(x-y)g^+(y) + f^-(x-y)g^-(y)\right] - \left[f^+(x-y)g^-(y) + f^-(x-y)g^+(y)\right],
$$

applicando quanto appena dimostrato alle quattro funzioni a destra della precedente uguaglianza, si ha che $f(x-y)g(y)$ è sommabile in $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ e quindi, per il teorema di Fubini, che per quasi ogni $x\in\mathbb{R}^n$ la funzione $y \to f(x-y)g(y)$ è sommabile in $\mathbb{R}^n$. Inoltre, applicando due volte il teorema di Fubini come nella (13), si ha subito la (12)

$$
\int_{\mathbb{R}^n} |(f*g)(x)|\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|\,dy \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,dx = \|f\|_1\|g\|_1\,.
$$

Siano ora $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, con $1<p<\infty$. Indicato con $q$ l'esponente coniugato di $p$, si ha per quanto appena dimostrato che per quasi ogni $x$ la funzione $y \to |f(x-y)||g(y)|^p$ è sommabile e quindi che la funzione $y \to |f(x-y)|^{1/p}|g(y)|$ è in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Osservando che

$$
|f(x-y)g(y)| = |f(x-y)|^{1/q}\left(|f(x-y)|^{1/p}|g(y)|\right),
$$

se ne deduce allora, per la disuguaglianza di Hölder, che la funzione $y \to f(x-y)g(y)$ è sommabile per quasi ogni $x$ e che

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |(f*g)(x)|^p\,dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} dx \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^{1/q}\left(|f(x-y)|^{1/p}|g(y)|\right)dy\right)^p \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,dy\right)^{p/q} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|^p\,dy\right)dx \\
&= \|f\|_1^{p/q} \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|^p\,dy = \|f\|_1^{p/q} \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)|^p\,dy \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,dx \\
&= \|f\|_1^{1+p/q}\|g\|_p^p\,,
\end{aligned}
$$

da cui, elevando a $1/p$, segue la (12). □

Si noti che nelle ipotesi del teorema appena dimostrato risulta che $(f*g)(x) = (g*f)(x)$ per quasi ogni $x$. Si osservi anche che se $f$ è una funzione limitata a supporto compatto (in particolare se $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$) e $g\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, allora il prodotto di convoluzione è definito per ogni $x\in\mathbb{R}^n$.

Se $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ è una qualunque funzione, consideriamo la famiglia $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ degli aperti tali che $f=0$ quasi ovunque in $\Omega_\alpha$. Si verifica facilmente che, posto $\Omega = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}}\Omega_\alpha$, $\Omega$ risulta essere il più grande aperto di $\mathbb{R}^n$ in cui $f$ è quasi ovunque nulla. Il complementare di tale aperto è detto il *supporto* di $f$ e si denota con $\operatorname{supp} f$. Si osservi che se $f$ è continua $\operatorname{supp} f = \overline{\{x\in\mathbb{R}^n : f(x)\neq 0\}}$. Si noti infine che se $f$ e $g$ sono due funzioni a supporto compatto, anche $f*g$ lo è e risulta

$$
\operatorname{supp}(f*g) \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}\,. \tag{14}
$$

**Teorema 5** *Siano $f \in C^k_c(\mathbb{R}^n)$, con $k = 0, 1, 2, \dots$ e $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Allora $f * g \in C^k(\mathbb{R}^n)$ e, se $k \geq 1$ e $|\alpha| \leq k$, si ha*

$$D^\alpha(f * g) = D^\alpha f * g\,. \tag{15}$$

**Dimostrazione.** Sia $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Proviamo che la funzione $f * g$ è continua. Infatti, se $x_h$ è una successione in $\mathbb{R}^n$ convergente a $x$, essendo $f$ uniformemente continua in $\mathbb{R}^n$, le funzioni $f(x_h - y)$ convergono a $f(x - y)$ uniformemente al variare di $y$ in $\mathbb{R}^n$. Inoltre, indicati con $r_1$ il raggio di una palla contenente il supporto di $K$ e con $r_2$ il raggio di una palla contenente i punti $x$ e $x_h$ per ogni $h$, si verifica facilmente che i supporti delle funzioni $y \to f(x_h - y)$ e della funzione $y \to f(x - y)$ sono tutti contenuti in $B_r$, dove $r = r_1 + r_2$. Dunque, essendo $g$ sommabile in $B_r$ si può passare al limite sotto il segno di integrale e si ha

$$\lim_{h\to\infty} (f * g)(x_h) = \lim_{h\to\infty} \int_{B_r} f(x_h - y)g(y)\,dy = \int_{B_r} f(x - y)g(y)\,dy = (f * g)(x)\,.$$

Supponiamo ora che $f$ sia di classe $C^1_c(\mathbb{R}^n)$ e fissiamo $x \in \mathbb{R}^n$ e $i = 1, \dots, n$. Indicato con $e_i$ l'$i$-esimo elemento della base canonica di $\mathbb{R}^n$ si ha, per ogni $h \neq 0$

$$\frac{(f * g)(x + he_i) - (f * g)(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x + he_i - y) - f(x - y)}{h} g(y)\,dy\,. \tag{16}$$

Con un ragionamento analogo a quanto fatto sopra si verifica anche in questo caso che per $0 < |h| < 1$ le funzioni $y \to \big[f(x + he_i - y) - f(x - y)\big]/h$ hanno tutte i supporti equilimitati e che convergono uniformemente in $\mathbb{R}^n$. Si può quindi passare al limite sotto il segno di integrale nella (16) ottenendo

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i} f(x - y)g(y)\,dy\,,$$

provando così la (15). Il caso generale segue da quanto appena provato con un ovvio ragionamento per induzione. □

Nel seguito, diremo che una funzione $\varrho \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ è un *mollificatore* se

$$\varrho(x) \geq 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n, \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \varrho(x)\,dx = 1\,.$$

Un esempio standard di mollificatore è fornito dalla funzione

$$\varrho(x) = \begin{cases} C\exp\Big(\frac{1}{|x|^2-1}\Big) & \text{se } |x| < 1, \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1\,, \end{cases}$$

dove la costante $C$ è scelta in modo tale che $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varrho dx = 1$.

Fissato un mollificatore $\varrho$ tale che $\operatorname{supp}\varrho = \overline{B}_1$ e ponendo per ogni $h \in \mathbb{N}$ e per ogni $x \in \mathbb{R}^n$

$$\varrho_h(x) = h^n \varrho(hx)\,, \tag{17}$$

si ottiene una *successione di mollificatori* tali che

$$\varrho_h(x) \geq 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n, \qquad \operatorname{supp}\varrho_h = \overline{B}_{1/h} \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \varrho_h(x)\,dx = 1\,. \tag{18}$$

Sia $f \in L^1\mathrm{loc}(\mathbb{R}^n)$ e sia una successione di mollificatori $\varrho_h(x) = h^n\varrho(hx)$, dove $\varrho$ è un mollificatore verificante la (18). Le funzioni

$$\varrho_h * f$$

prendono il nome di *regolarizzate* o *mollificate* della funzione $f$. Dal Teorema 5 segue allora che $\varrho_h * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ per ogni $h$ e che per ogni multi-indice $\alpha$

$$D^\alpha(\varrho_h * f)(x) = \big(D^\alpha \varrho_h * f\big)(x) = h^{n+|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha \varrho)(h(x-y)) f(y)\, dy\,.$$

Le regolarizzate di una funzione $f$ forniscono un modo semplice per approssimare una funzione localmente sommabile con funzioni più regolari, come risulta chiaro dall'enunciato del teorema seguente.

**Teorema 6** *Siano $\varrho_h$ una successione di mollificatori verificanti le* (17) *e* (18) *e $f \in L^1_{\mathrm{loc}}\mathbb{R}^n$.*

*(i) Se $f \in C(\mathbb{R}^n)$, allora $\varrho_h * f \to f$ uniformemente sui compatti di $\mathbb{R}^n$,*

*(ii) se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, allora $\varrho_h * f \to f$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$,*

*(iii) se $f \in L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p < \infty$, allora $\varrho_h * f \to f$ in $L^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.*

**Dimostrazione.** (i) Fissato un compatto $K$, essendo $f$ uniformemente continua sui limitati, e quindi in particolare sull'insieme $\{z \in \mathbb{R}^n : \mathrm{dist}(z, K) < 1\}$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta \in (0,1)$ tale che se $x \in K$ e $|y| < \delta$ risulta

$$|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Da questa relazione, per ogni $n > 1/\delta$ e $x \in K$ si ha allora, ricordando che $\varrho_h * f = f * \varrho_h$, che $\mathrm{supp}\, \varrho_h = \overline{B}_{1/n}$ e che $\int_{\mathbb{R}^n} \varrho_h = 1$,

$$|(\varrho_h * f)(x) - f(x)| = \left| \int_{B_{1/h}} \big[f(x-y) - f(x)\big] \varrho_h(y) dy \right| \le \int_{B_{1/h}} \big|f(x-y) - f(x)\big| \varrho_h(y) dy < \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \varrho_h(y) dy = \varepsilon\,,$$

da cui segue la tesi.
(ii) Fissato $\varepsilon > 0$, essendo $C_c(\mathbb{R}^n)$ denso in $L^p(\mathbb{R}^n)$ per $1 \le p < \infty$, si ha che esiste una funzione $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ per cui risulta $\|f - g\|_p < \varepsilon$. Dalla (12) si ha allora, essendo $\|\varrho_h\|_1 = 1$,

$$(19)\quad \|\varrho_h * f - f\|_p \le \|\varrho_h * (f-g)\|_p + \|\varrho_h * g - g\|_p + \|g - f\|_p \le 2\|f - g\|_p + \|\varrho_h * g - g\|_p < 2\varepsilon + \|\varrho_h * g - g\|_p\,.$$

Ricordiamo che dalla (14) si ha che per ogni $h$

$$\mathrm{supp}\,(\varrho_h * f) \subset \overline{B}_1 + \mathrm{supp}\, g = K\,.$$

Poiché $K$ è compatto e, per quanto visto in (i), $\varrho_h * g \to g$ uniformemente in $K$, se ne deduce che $\varrho_h * g \to g$ anche in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Passando al limite nella (19) si ha allora

$$\limsup_{h\to\infty} \|\varrho_h * f - f\|_p \le 2\varepsilon\,,$$

da cui, per l'arbitrarietà di $\varepsilon$, segue la tesi.
(iii) Fissato $r > 1$, poiché $f(y) = (f\chi_{B_r})(y)$ per ogni $y \in B_r$, si ha anche $(\varrho_h * f)(x) = \big(\varrho_h * (f\chi_{B_r})\big)(x)$ per ogni $h$ e per ogni $x \in B_{r-1}$. Essendo $f\chi_{B_r}$ una funzione di $L^p(\mathbb{R}^n)$, da quanto provato in (ii) segue in particolare che $\varrho_h * f \to f$ in $L^p(B_r)$ e quindi la tesi. □

Dal teorema appena dimostrato, ricordando la densità di $C_c(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ si ha subito il risultato seguente.

**Corollario 7** *Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto. Se $1 \le p < \infty$, allora $C^\infty_c(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$.*

Il prossimo risultato, noto come *teorema di Ascoli–Arzelà*, fornisce un utile criterio di compattezza nello spazio delle funzioni continue su di un compatto. A tale scopo, fissati un compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ e una successione di funzioni $f_h \in C(K)$, diremo che la funzioni $f_h$ sono *equilimitate* se

$$\sup_h \max_{x \in K} |f_h(x)| < \infty \,,$$

mentre diremo che sono *equicontinue* se per ogni $\varepsilon > 0$ è possibile determinare un $\delta > 0$ tale che

$$|f_h(x) - f_h(y)| < \varepsilon \qquad \forall h \text{ e } \forall x, y \in K : \, |x - y| < \delta \,. \tag{20}$$

**Teorema 8** *Siano dati un compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ e una successione di funzioni $f_h : K \to \mathbb{R}$ equilimitate ed equicontinue. Allora esiste una successione estratta $f_{h_k}$ convergente uniformemente in $K$.*

**Dimostrazione.** Indichiamo con $x_i$ una successione di punti di $K$ densa in K. Dall'ipotesi di equilimitatezza delle funzioni $f_h$ segue subito che per ogni $i \in \mathbb{N}$ la successione numerica $\big(f_h(x_i)\big)_{h \in \mathbb{N}}$ è limitata.
Considerata la successione $\big(f_h(x_1)\big)_{h \in \mathbb{N}}$ si può allora estrarre dalla successione $f_h$ una sottosuccessione, che indichiamo con $f_h^{(1)}$, tale che la successione numerica $\big(f_h^{(1)}(x_1)\big)_{h \in \mathbb{N}}$ risulti convergente. Considerata poi la successione$\big(f_h^{(1)}(x_2)\big)_{h \in \mathbb{N}}$ allo stesso modo si determina una sottosuccessione $f_h^{(2)}$ della successione $f_h^{(1)}$ tale che la successione numerica $\big(f_h^{(2)}(x_2)\big)_{h \in \mathbb{N}}$ converga. Si noti che per costruzione si ha che anche la successione $\big(f_h^{(2)}(x_1)\big)_{h \in \mathbb{N}}$ converge. Continuando in tal modo, per ogni intero $i > 2$ si riesce a determinare una successione $f_h^{(i)}$, estratta dalla successione $f_h^{(i-1)}$, con la proprietà che le successioni numeriche $\big(f_h^{(i)}(x_j)\big)_{h \in \mathbb{N}}$ convergono per ogni intero $j = 1, \ldots, i$.
Posto allora $g_i = f_i^{(i)}$ per ogni $i \in \mathbb{N}$, la successione $g_i$ risulta estratta dalla successione $f_h$ e per quanto appena detto si deduce facilmente che tali funzioni convergono in ogni punto della successione $x_j$.
Mostriamo ora che le funzioni $g_i$ convergono uniformemente in $K$ e a tale scopo fissiamo $\varepsilon > 0$.
Sia $\delta$ un numero per cui valga la (20) per le $f_h$ e dunque in particolare per le $g_i$. Osserviamo che $K \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_\delta(x_i)$ e quindi, per la compattezza di $K$, esiste un intero $N$ tale che $K \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_\delta(x_i)$. Preso un qualunque $x \in K$ e un $j \in \{1, \ldots, N\}$ tale che $|x - x_j| < \delta$, per ogni $l, m \in \mathbb{N}$ si ha

$$|g_l(x) - g_m(x)| \leq |g_l(x) - g_l(x_j)| + |g_l(x_j) - g_m(x_j)| + |g_m(x) - g_m(x_j)| < 2\varepsilon + |g_l(x_j) - g_m(x_j)| \,. \tag{21}$$

Poiché le successioni numeriche $\big(g_i(x_j)\big)_{i \in \mathbb{N}}$ convergono per ogni $j$, dal criterio di convergenza di Cauchy segue che esiste un indice $i_\varepsilon$ tale che

$$|g_l(x_j) - g_m(x_j)| < \varepsilon \qquad \forall l, m > i_\varepsilon \text{ e } \forall j = 1, \ldots, N \,.$$

Da questa relazione e dalla (21) si ha allora che

$$|g_l(x) - g_m(x)| < 3\varepsilon \qquad \forall l, m > i_\varepsilon \text{ e } \forall x \in K \,.$$

La successione $g_i$ verifica quindi il criterio di Cauchy per la convergenza uniforme e dunque converge uniformemente in $K$. □

Una variante assai utilizzata del teorema di Ascoli-Arzelà si ottiene sostituendo l'equilimitatezza con la (22) del corollario sequente, che viene detta *equilipschitzianità*. Tale ipotesi, pur essendo più forte risulta più agevole da verificare.

**Corollario 9** *Siano dati un compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ e una successione $f_h : K \to \mathbb{R}$ tali che*

$$|f_h(x) - f_h(y)| \leq L|x - y| \qquad \forall h \text{ e } \forall x, y \in K \tag{22}$$

*per qualche $L > 0$. Se esiste $x_0 \in K$ per il quale la successione $f_h(x_0)$ risulta limitata, allora la $f_h$ ammette un'estratta convergente uniformemente in $K$.*

**Dimostrazione.** Basta osservare che la (22) implica la (20) e che dall'ipotesi che la successione $f_h(x_0)$ è limitata e dalla (22) segue subito l'equilimitatezza delle $f_h$. $\square$

# 3 Le funzioni Gamma e Beta

Sia $t > 0$. Poniamo

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x}\, dx\,. \tag{23}$$

Posto $f(x) = x^{t-1}e^{-x}$, risulta $f(x) < x^{t-1}$ ed essendo $t-1 > -1$, ne segue che $f$ è sommabile in 0. D'altra parte, poiché $\lim_{x\to+\infty} x^{t+1}e^{-x} = 0$, si ha che esiste $M > 0$ tale che $x^{t+1}e^{-x} < 1$ per $x > M$ e dunque $f(x) < 1/x^2$ per $x > M$, da cui segue la sommabilità di $f$ all'infinito. Quindi la funzione definita dalla (23), detta *funzione Gamma*, è sempre finita per $t > 0$.

Osserviamo che

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1, \qquad \Gamma(t+1) = t\Gamma(t) \qquad \text{per ogni } t > 0\,. \tag{24}$$

Infatti, la prima uguaglianza è immediata e la seconda si ottiene integrando per parti

$$\Gamma(t+1) = \int_0^\infty x^t e^{-x}\, dx = \Big[-x^t e^{-x}\Big]_0^\infty + t\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}\, dx = t\Gamma(t)\,.$$

Si noti che le due uguaglianze in (24) mostrano che la funzione $\Gamma$ estende a $(0,\infty)$ il fattoriale di un numero. Infatti per ogni intero positivo $n$ risulta

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = \cdots = n!\,\Gamma(1) = n!\,. \tag{25}$$

Effettuando il cambio di variabili $x = y^2/2$ nell'integrale in (23) si ottiene che

$$\Gamma(t) = 2^{1-t}\int_0^\infty y^{2t-1}e^{-y^2/2}\, dy\,. \tag{26}$$

Da questa uguaglianza, indicando con $Q$ il primo quadrante nel piano, si ha facilmente, applicando prima il teorema di Fubini e successivamente passando in coordinate polari

$$\Big[\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big]^2 = 2\Big(\int_0^\infty e^{-x^2/2}\, dx\Big)\Big(\int_0^\infty e^{-y^2/2}\, dy\Big) = 2\iint_Q e^{-(x^2+y^2)/2}\, dxdy = 2\int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty \varrho e^{-\varrho^2/2}\, d\varrho = \pi\,,$$

da cui segue

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \sqrt{\pi}\,. \tag{27}$$

Con un calcolo analogo a quello appena fatto, utilizzando sempre la (26), si ha che per ogni $s,t > 0$

$$\begin{aligned}
\Gamma(s)\Gamma(t) &= 2^{2-s-t}\Big(\int_0^\infty x^{2s-1}e^{-x^2/2}\, dx\Big)\Big(\int_0^\infty y^{2t-1}e^{-y^2/2}\, dy\Big)\\
&= 2^{2-s-t}\iint_Q x^{2s-1}y^{2t-1}e^{-(x^2+y^2)/2}\, dxdy\\
&= 2^{2-s-t}\int_0^\infty \varrho^{2(s+t)-1}e^{-\varrho^2/2}\, d\varrho \int_0^{\pi/2} (\cos\vartheta)^{2s-1}(\sin\vartheta)^{2t-1}\, d\vartheta\\
&= 2\Gamma(s+t)\int_0^{\pi/2}(\cos\vartheta)^{2s-1}(\sin\vartheta)^{2t-1}\, d\vartheta\,.
\end{aligned}$$

Da questa uguaglianza, posto per $s, t > 0$

$$B(s,t) = 2\int_0^{\pi/2} (\cos\vartheta)^{2s-1}(\sin\vartheta)^{2t-1}\, d\vartheta\,, \tag{28}$$

segue subito

$$B(s,t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}\,. \tag{29}$$

La funzione definita per $(s,t) \in Q$ dalla (28) si chiama *funzione Beta.* Si noti che dalla (29) segue immedia-tamente che per ogni $(s,t) \in Q$

$$B(s,t) = B(t,s)\,.$$

Un'altra espressione assai utile della Beta si ottiene effettuando il cambio di variabile $x = \cos^2\vartheta$ nell'integrale in (28). Con tale cambio di variabile, essendo $dx = -2\cos\vartheta\,\sin\vartheta\, d\vartheta$, si verifica subito che risulta

$$B(s,t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}\, dx\,. \tag{30}$$

# 4 Volume della palla e misura della superficie sferica

Nel seguito indicheremo con $\omega_n$ la misura $n$-dimensionale della palla unitaria $B_1$ di $\mathbb{R}^n$. Indicando con $|E|$ la misura di Lebesgue di un insieme di $\mathbb{R}^n$, si ha naturalmente

$$|B_r(x)| = r^n\omega_n\,.$$

Se con $\sigma_n$ indichiamo la misura della superficie della palla unitaria, si ha naturalmente per ogni $r > 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$

$$S(\partial B_r(x)) = r^{n-1}\sigma_n\,. \tag{31}$$

La seguente proposizione fornisce la misura superficiale della palla unitaria.

**Proposizione 10** *Sia $n \geq 2$. Risulta $\sigma_n = n\omega_n$.*

**Dimostrazione.** Applicando la (9) con $f \equiv 1$ e usando la (31) si ha subito

$$\omega_n = \int_{B_1} dx = \int_0^1 d\varrho \int_{\partial B_\varrho(0)} dS = \int_0^1 \varrho^{n-1}\sigma_n\, d\varrho = \frac{\sigma}{n}\,,$$

da cui segue la tesi. □

Diamo l'espressione della misura della palla unitaria di $\mathbb{R}^n$.

**Teorema 11** *Sia $n \geq 1$. Risulta*

$$\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{(n/2)\Gamma(n/2)}\,. \tag{32}$$

*In particolare, si ha per ogni intero $k \geq 1$*

$$\omega_{2k-1} = \frac{2^k\pi^{k-1}}{(2k-1)!!} \qquad \omega_{2k} = \frac{\pi^k}{k!}\,. \tag{33}$$

**Dimostrazione.** Dalla (27) e dalla prima uguaglianza in (24) segue subito la tesi per $n = 1$ e per $n = 2$. Ragioniamo ora per induzione e fissiamo $n \geq 3$ tale che la tesi è vera per $n - 1$. Denotiamo con $x'$ il generico punto di $\mathbb{R}^{n-1}$ e con $x = (x', x_n)$ il generico punto di $\mathbb{R}^n$.
Poiché $B_1 = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : |x_n| < \sqrt{1 - |x'|^2}\}$, applicando la (9) nella palla unitaria di $\mathbb{R}^{n-1}$ (che denotiamo con $B_1^{n-1}$), si ha ricordando la (31) e la Proposizione 10

$$\begin{aligned}\omega_n &= 2\int_{B_1^{n-1}} \sqrt{1-|x'|^2}\, dx' = 2\int_0^1 d\varrho \int_{\partial B_\varrho^{n-1}} \sqrt{1-|x'|^2}\, dS(x') = 2\sigma_{n-1}\int_0^1 \varrho^{n-2}\sqrt{1-\varrho^2}\, d\varrho \\ &= 2(n-1)\omega_{n-1}\int_0^1 \varrho^{n-2}\sqrt{1-\varrho^2}\, d\varrho\,.\end{aligned}$$

Effettuiamo, nell'ultimo integrale a secondo membro, il cambiamento di variabili $\varrho = r^{1/2}$. In tal modo, ricordando che per ipotesi induttiva la tesi è vera per $n - 1$ e utilizzando nell'ordine la (30), la (29), la seconda uguaglianza nella (24) e la (27), otteniamo facilmente

$$\begin{aligned}\omega_n &= (n-1)\omega_{n-1}\int_0^1 r^{(n-3)/2}(1-r)^{1/2}\, dr = (n-1)\frac{\pi^{(n-1)/2}}{\Big(\frac{n-1}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{n-1}{2}\Big)} B\Big(\frac{n-1}{2}, \frac{3}{2}\Big) \\ &= \frac{2\pi^{(n-1)/2}}{\Gamma\Big(\frac{n-1}{2}\Big)} \frac{\Gamma\Big(\frac{n-1}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{3}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\frac{n+2}{2}\Big)} = 2\pi^{(n-1)/2}\,\frac{\frac{1}{2}\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)}{\frac{n}{2}\Gamma\Big(\frac{n}{2}\Big)} = \frac{\pi^{n/2}}{\frac{n}{2}\Gamma\Big(\frac{n}{2}\Big)}\,.\end{aligned}$$

Proviamo ora la (33) che si verifica immediatamente se $k = 1$. Posto dunque $k \geq 2$, dalla seconda uguaglianza nella (24) e dalla (27) si ha

$$\Gamma\Big(\frac{2k-1}{2}\Big) = \frac{2k-3}{2}\Gamma\Big(\frac{2k-3}{2}\Big) = \cdots = \frac{(2k-3)!!}{2^{k-1}}\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \frac{(2k-3)!!}{2^{k-1}}\pi^{1/2}\,.$$

Da questa uguaglianza e dalla (32) segue subito la prima uguaglianza nella (33). Infine, ricordando la (25), si ha

$$\omega_{2k} = \frac{\pi^k}{k\Gamma(k)} = \frac{\pi^k}{k!}\,.$$

□

# 5 Calcolo di alcuni integrali notevoli

Cominciamo col calcolare l'integrale su $\partial\mathbb{R}^n_+$ del *nucleo di Poisson per il semispazio*

(34) $$K(x,y) = \frac{2x_n}{n\omega_n}\frac{1}{|x-y|^n}\,.$$

**Proposizione 12** *Sia $n \geq 2$. Per ogni $x \in \mathbb{R}^n_+$ si ha*

$$\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x,y)\, dS(y) = 1\,.$$

**Dimostrazione.** Fissiamo $x = (x', x_n)$ con $x_n > 0$. Effettuando in $\mathbb{R}^{n-1}$ prima il cambio di variabili $y = x' = z$ e poi il cambio di variabili $z = x_n w$ (che ha jacobiano $x_n^{n-1}$) e ricordando la (9), dall'espressione

(34) di $K$ otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_{\partial \mathbb{R}^n_+} K(x,y)\, dS(y) &= \frac{2x_n}{n\omega_n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{dy}{\big(|x'-y|^2+x_n^2\big)^{n/2}} = \frac{2x_n}{n\omega_n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{dz}{\big(|z|^2+x_n^2\big)^{n/2}} \\
&= \frac{2x_n}{n\omega_n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{dz}{x_n^n\Big(\Big|\frac{z}{x_n}\Big|^2+1\Big)^{n/2}} = \frac{2}{n\omega_n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{dw}{(1+|w|^2)^{n/2}} \\
&= \frac{2}{n\omega_n}\int_0^\infty d\varrho \int_{\partial B_\varrho^{n-1}} \frac{dS(w)}{(1+|w|^2)^{n/2}} = \frac{2(n-1)\omega_{n-1}}{n\omega_n}\int_0^\infty \frac{\varrho^{n-2}}{(1+|\varrho|^2)^{n/2}}\, d\varrho\,.
\end{aligned}$$

Ricordando ora le (32), (29), (27) e la definizione di Beta (28) ed effettuando il cambiamento di variabile $\varrho = \operatorname{tg}\vartheta$ nell'ultimo integrale otteniamo facilmente

$$\begin{aligned}
\int_{\partial \mathbb{R}^n_+} K(x,y)\, dS(y) &= \frac{2(n-1)}{n}\, \frac{\pi^{(n-1)/2}}{\Big(\frac{n-1}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{n-1}{2}\Big)}\, \frac{\Big(\frac{n}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{n}{2}\Big)}{\pi^{n/2}} \int_0^{\pi/2} \Big(\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\Big)^{n-2} \frac{1}{\Big(1+\frac{\sin^2\vartheta}{\cos^2\vartheta}\Big)^{n/2}} \frac{d\vartheta}{\cos^2\vartheta} \\
&= \frac{2\Gamma\Big(\frac{n}{2}\Big)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\Big(\frac{n-1}{2}\Big)} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}\vartheta\, d\vartheta = \frac{2\Gamma\Big(\frac{n}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{n-1}{2}\Big)}\, \frac{B\Big(\frac{1}{2},\frac{n-1}{2}\Big)}{2} = 1\,.
\end{aligned}$$

□

Fissati $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ e $r > 0$ indichiamo con $E_r(x,t)$ la palla parabolica

(35) $$E_r(x,t) = \Big\{(y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} :\ s < t\,, \Phi(x-y,t-s) > \frac{1}{r^n}\Big\}\,,$$

dove $\Phi : \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \in (0,\infty)$ è la soluzione fondamentale dell'equazione del calore

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \mathrm{e}^{-|x|^2/4t}\,.$$

Se il 'centro' della palla parabolica è $(0,0)$ scriveremo $E_r$ al posto di $E_r(0,0)$.

**Proposizione 13** *Siano $n \geq 1$, $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$, $r > 0$. Risulta*

(36) $$\int_{E_r(x,t)} \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}\, dyds = 4r^n\,.$$

**Dimostrazione.** Effettuando il cambio di variabili $z = \dfrac{y-x}{r}$, $\tau = \dfrac{s-t}{r^2}$, che porta $E_r(x,t)$ in $E_1$ con jacobiano $r^{n+2}$, si ha

$$\int_{E_r(x,t)} \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}\, dyds = r^n \int_{E_1} \frac{|z|^2}{\tau^2}\, dzd\tau$$

e dunque, per provare la (36) basta mostrare che

(37) $$\int_{E_1} \frac{|y|^2}{s^2}\, dyds = 4\,.$$

A tale scopo, osserviamo che, per la (9) risulta che per ogni $r > 0$

(38) $$\int_{\{|y|<r\}} |y|^2\, dy = \int_0^r d\varrho \int_{\partial B_\varrho} |y|^2\, dS(y) = n\omega_n \int_0^r \varrho^{n+1} d\varrho = \frac{n\omega_n}{n+2} r^{n+2}\,.$$

Poiché dalla (35) si ha facilmente che

$$E_1 = \Big\{(y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} :\ s < 0\,, |y| < 2\sqrt{|s|}\,\log^{1/2}\Big(\frac{1}{4\pi|s|}\Big)^{n/2}\Big\}\,,$$

usando il teorema di Fubini e la (38) abbiamo

$$\int_{E_1} \frac{|y|^2}{s^2}\, dyds = \int_{-\frac{1}{4\pi}}^{0} \frac{ds}{s^2} \int_{\left\{|y|<2\sqrt{|s|}\log^{1/2}\left(\frac{1}{4\pi|s|}\right)^{n/2}\right\}} |y|^2\, dy = \frac{n2^{n+2}\omega_n}{n+2} \int_{-\frac{1}{4\pi}}^{0} |s|^{\frac{n-2}{2}} \left[\log\left(\frac{1}{4\pi|s|}\right)^{n/2}\right]^{\frac{n+2}{2}} ds\,.$$

Effettuando nell'ultimo integrale il cambiamento di variabili

$$t = \sqrt{2}\log^{1/2}\left(\frac{1}{4\pi|s|}\right)^{n/2}$$

e ricordando le (32), (26) e la seconda equazione in (24) si ha, con facili calcoli,

$$\int_{E_1} \frac{|y|^2}{s^2}\, dyds = \frac{4\omega_n}{(n+2)(2\pi)^{n/2}} \int_0^\infty t^{n+3} e^{-t^2/2}\, dt = \frac{16\Gamma\left(\frac{n}{2}+2\right)}{n(n+2)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{16\left(\frac{n}{2}+1\right)\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{n(n+2)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = 4\,.$$

Ciò prova la (37) e quindi la tesi. $\square$