Compito del 21 settembre 2009

Esercizio 1. Affinché il logaritmo sia definito occorre che il suo argomento sia positivo e quindi che

$$\arctan x > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x > 0\,. \tag{1}$$

Inoltre la quantità sotto radice $\log_{\frac{1}{2}}(\arctan x) - \log_{\frac{1}{2}} \frac{\pi}{4}$ deve essere non negativa. Quindi, essendo il logaritmo in base $1/2$ decrescente, si ha la condizione

$$\arctan x \leq \frac{\pi}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad x \leq 1\,. \tag{2}$$

Anche la quantità $1 - 2x^2$, sotto l'altra radice, deve essere non negativa:

$$1 - 2x^2 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\,. \tag{3}$$

Infine, dobbiamo imporre l'ultima condizione: $\sqrt{1-2x^2} - x > 0$. Tenuto conto della (1) che ci dice che x deve essere necessariamente positivo, questa disuguaglianza equivale a imporre che $1 - 2x^2 > x^2$, da cui, sempre tenuto conto della (1), si ha $0 < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Da questa relazione, imponendo le condizioni trovate nelle (2) e (3), si ha allora che l'insieme di definizione della funzione data è l'intervallo $(0, 1/\sqrt{3})$.

Esercizio 2. Sviluppiamo al terzo ordine la tangente e l'arcotangente che compaiono al denominatore. Si ha:

$$\tan x - \arctan x = \Big(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\Big) - \Big(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\Big) = \frac{2x^3}{3} + o(x^3)\,. \tag{4}$$

Passando al numeratore, abbiamo

$$\arctan\Big(\frac{x}{1 + x\tan x}\Big) = \frac{x}{1 + x\tan x} - \frac{x^3}{3(1 + x\tan x)^3} + o\Big(\frac{x^3}{(1 + x\tan x)^3}\Big) = \frac{x}{1 + x\tan x} - \frac{x^3}{3(1 + x\tan x)^3} + o(x^3)\,,$$

da cui segue:

$$\begin{aligned}
\arctan x - \arctan\Big(\frac{x}{1 + x\tan x}\Big) &= x - \frac{x^3}{3} - \frac{x}{1 + x\tan x} + \frac{x^3}{3(1 + x\tan x)^3} + o(x^3)\\
&= x\Big(1 - \frac{1}{1 + x\tan x}\Big) - \frac{x^3}{3}\Big(1 - \frac{1}{(1 + x\tan x)^3}\Big) + o(x^3)\\
&= \frac{x^2\tan x}{1 + x\tan x} - \frac{x^3}{3}\Big(\frac{3x\tan x + 3x^2\tan^2 x + x^3\tan^3 x}{(1 + x\tan x)^3}\Big) + o(x^3)\\
&= \frac{x^2\tan x}{1 + x\tan x} + o(x^3)\,.
\end{aligned}$$

Da questa relazione e dalla (4) concludiamo che il limite proposto, dividendo numeratore e denominatore per x^3, si riduce a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{x^2\tan x}{1 + x\tan x} + o(x^3)}{\dfrac{2x^3}{3} + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{\frac{\tan x}{x}}{1 + x\tan x} + \dfrac{o(x^3)}{x^3}}{\dfrac{2}{3} + \dfrac{o(x^3)}{x^3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\,.$$

Esercizio 3. (i) La funzione è definita sempre,

$$f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x^2 - x - 2} & \text{se } x \leq -1 \text{ oppure } x \geq 2\,, \\ x - \sqrt{-x^2 + x + 2} & \text{se } -1 \leq x \leq 2\,, \end{cases} \tag{5}$$

$f(0) = -\sqrt{2}$. Per determinare quando $f > 0$, per la (5) dobbiamo considerare due casi.
Caso 1. Se $x \leq -1$ oppure $x \geq 2$, chiedere $f(x) > 0$ equivale a chiedere $x > \sqrt{x^2 - x - 2}$ e quindi $x > 0$ e $x^2 > x^2 - x - 2$. Da queste condizioni segue che deve essere $x > 0$ e dunque, dato che $x \leq -1$ oppure $x \geq 2$, concludiamo che in questo caso $f > 0$ se e solo se $x \geq 2$.
Caso 2. Se $-1 \leq x \leq 2$, chiedere $f(x) > 0$ equivale a chiedere $x > \sqrt{-x^2 + x + 2}$ e quindi $x > 0$ e $x^2 > -x^2+x+2$. Da queste condizioni segue che deve essere $x > 0$ e $2x^2 - x - 2 > 0$, vale a dire $x > 0$ e $x < (1 - \sqrt{17})/4$ oppure $x > (1 + \sqrt{17})/4$. Da ciò segue che deve essere $x > (1 + \sqrt{17})/4 \approx 1.28$ e dunque, dato che $-1 \leq x \leq 2$, ne segue che in questo caso $f > 0$ se e solo se $(1 + \sqrt{17})/4 < x \leq 2$.
Dall'analisi dei due casi precedenti concludiamo allora che

$$f(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x > \frac{1 + \sqrt{17}}{4}\,. \tag{6}$$

(ii) Osserviamo che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - (x^2 - x - 2)}{x + \sqrt{x^2 - x - 2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + 2}{x + \sqrt{x^2 - x - 2}} = \frac{1}{2}\,,$$

quindi

$$\text{la retta } \; y = \frac{1}{2} \; \text{ è un asintoto orizzontale a } +\infty\,. \tag{7}$$

Viceversa si ha $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ e, essendo $x < 0$,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 - x - 2}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \sqrt{\frac{x^2 - x - 2}{x^2}}\right) = 2\,,$$

$$\lim_{x \to -\infty} \big(f(x) - 2x\big) = \lim_{x \to -\infty} \big(-x - \sqrt{x^2 - x - 2}\big) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x + 2}{-x + \sqrt{x^2 - x - 2}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1 + \dfrac{2}{x}}{-1 - \sqrt{\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2}}} = -\frac{1}{2}\,.$$

Dunque

$$\text{la retta } \; y = 2x - \frac{1}{2} \; \text{ è un asintoto obliquo a } -\infty\,. \tag{8}$$

(iii) Calcoliamo la derivata di f. Si ha:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x - 2}} & \text{se } x < -1 \text{ oppure } x > 2\,, \\ 1 - \dfrac{-2x + 1}{2\sqrt{-x^2 + x + 2}} & \text{se } -1 < x < 2\,. \end{cases} \tag{9}$$

Osserviamo poi che da questa uguaglianza segue che

$$\lim_{x \to 2^\pm} f'(x) = \mp\infty \qquad \lim_{x \to (-1)^\pm} f'(x) = \mp\infty\,.$$

Quindi, in 2 e -1 il grafico di f presenta due cuspidi con la punta rivolta verso l'alto e i due punti sono entrambi di massimo relativo.
Per studiare il segno della derivata prima di f usiamo la (9) e distinguiamo ancora due casi.
Caso 1. Se $x < -1$ oppure $x > 2$, chiedere $f'(x) > 0$ equivale a chiedere $2\sqrt{x^2 - x - 2} > 2x - 1$. Questa disuguaglianza è certamente vera se $2x-1 < 0$ e quindi in particolare se $x < -1$, mentre si riduce alla disuguaglianza $4x^2 - 4x - 8 > 4x^2 - 4x + 1$ (mai verificata), se $x > 2$. In conclusione in questo caso $f'(x) > 0$ se e solo se $x < -1$.
Caso 2. Se $-1 < x < 2$, chiedere $f'(x) > 0$ equivale a chiedere $2\sqrt{-x^2 + x + 2} > 1 - 2x$. Questa disuguaglianza è certamente vera se $1 - 2x < 0$ e quindi in particolare se $1/2 < x < 2$, mentre se $-1 < x \le 1/2$ si riduce alla disuguaglianza $-4x^2 + 4x + 8 > 1 - 4x + 4x^2$ cioè alla disuguaglianza $8x^2 - 8x - 7 < 0$ che ha soluzione $(2-3\sqrt{2})/4 < x < (2+3\sqrt{2})/4$. Osservando che $1/2 < (2+3\sqrt{2})/4$, si conclude che, quando $-1 < x < 2$, $f'(x) > 0$ se e solo se $(2 - 3\sqrt{2})/4 < x < 2$ e che dunque $(2 - 3\sqrt{2})/4 \approx -0.56$ è un punto di minimo relativo.
Concludendo, dai due casi sopra visti, si ha che

$$f \text{ è strettamente crescente se e solo se } x < -1 \text{ oppure } \frac{2 - 3\sqrt{2}}{4} < x < 2\,. \tag{10}$$

Inoltre, essendo $f(-1) = -1$ e $f(2) = 2$ abbiamo che

$$-1 \text{ è max relativo, } \frac{2 - 3\sqrt{2}}{4} \text{ è min relativo e } 2 \text{ è max assoluto.}$$

(iv) Calcoliamo la derivata seconda di f. Si ha:

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{9}{2\sqrt{(x^2 - x - 2)^3}} & \text{se } x < -1 \text{ oppure } x > 2\,, \\[2ex] \dfrac{9}{2\sqrt{(-x^2 + x + 2)^3}} & \text{se } -1 < x < 2\,. \end{cases}$$

In ogni caso, risulta che f è sempre convessa.
Raccogliendo tutte le informazioni ottenute precedentemente, possiamo allora tracciare il grafico di f che avrà l'andamento indicato in figura alla pagina seguente (le rette tratteggiate sono i due asintoti).

Esercizio 4.

Scomponiamo

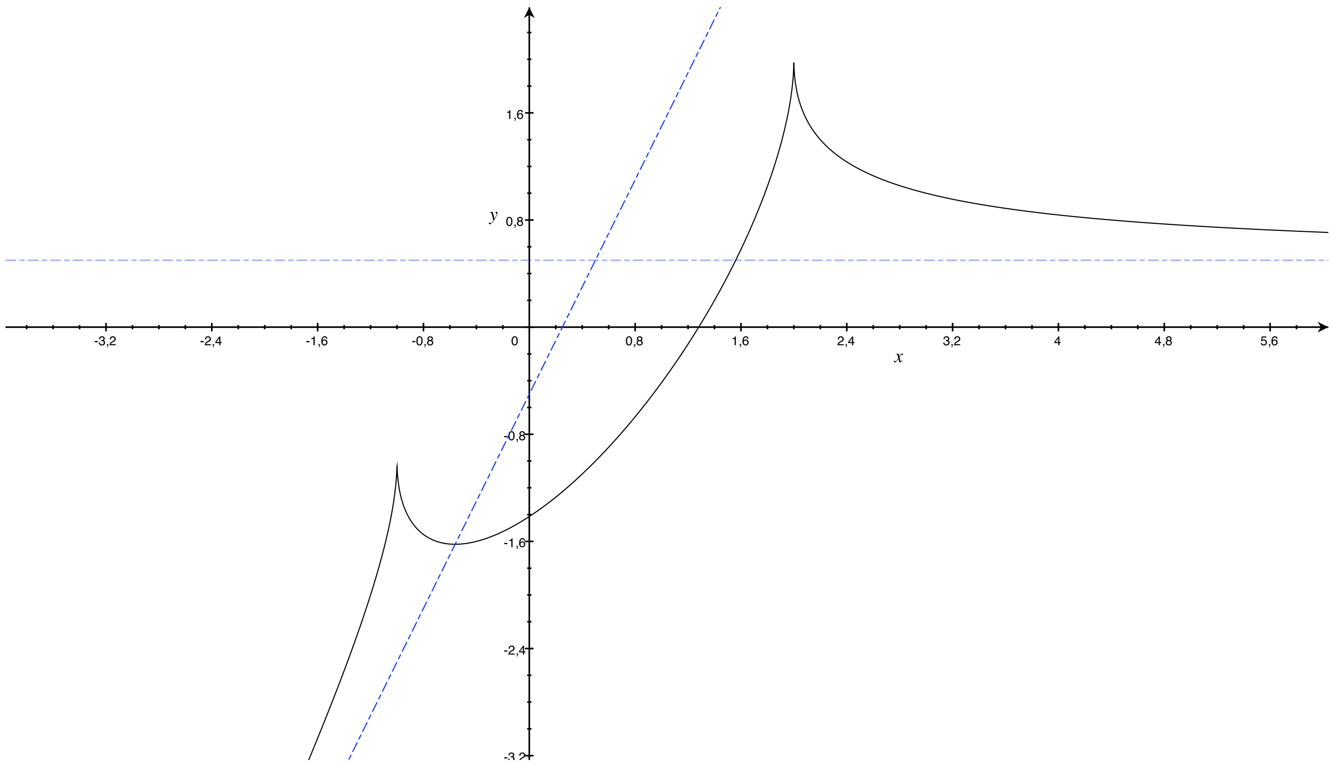
$$\frac{x-5}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1} = -\frac{2}{x+1} + \frac{2x-3}{x^2-x+1}\,.$$

In tal modo

$$\begin{aligned} \int \frac{x-5}{x^3+1}\,dx &= -\int \frac{2}{x+1}\,dx + \int \frac{2x-3}{x^2-x+1}\,dx = -2\log|x+1| + \int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx - \int \frac{2}{x^2-x+1}\,dx \\ &= -2\log|x+1| + \log(x^2-x+1) - \int \frac{2\,dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \log\Big(\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2}\Big) - \frac{8}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{2x}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1} = \log\Big(\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2}\Big) - \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\Big(\frac{2x}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\Big)\,. \end{aligned}$$

Quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{x-5}{x^3+1}\,dx = \Big[\log\Big(\frac{x^2-x+1}{(x+1)^2}\Big) - \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\Big(\frac{2x}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\Big)\Big]_0^{+\infty} = -\frac{4}{\sqrt{3}}\Big(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\Big) = -\frac{8\sqrt{3}\pi}{9}\,.$$



y
1,6
0,8
-0,8
-1,6
-2,4
-3,2
-3,2
-2,4
-1,6
-0,8
0
0,8
1,6
2,4
3,2
4
4,8
5,6
x