Esercizi di Analisi 2

Nicola Fusco

(Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università 'Federico II', Napoli)

1. Successioni e Serie di Funzioni

1.1 Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\,) \left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^{\alpha}.$$

1.2 Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{\sqrt{n} - sen x}{n^2 x^n}\Big)^2 \qquad .$$

1.3 Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{\sqrt{n} cos x - x^n}{1+n^2}\Big)^2 \qquad .$$

1.4 Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{n}{x^{2n}} arctg \frac{x^{2n}}{n}\Big).$$

1.5 Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \log\Big(1 + \frac{|\operatorname{sen} x|^n}{1+x^n}\Big)$$

quando $x \geq 0$.

1.6 Determinare gli $\alpha > 0$ tali che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^{\alpha} + n^2}$$

converga puntualmente in $[0,+\infty)$.
Verificare che per $\alpha > 2$ la serie converge uniformemente in $[0,+\infty)$.

1.7 Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(x^n - nsen\frac{x^n}{n}\Big) \qquad .$$

1.8 Calcolare:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_n^{+\infty}\frac{n^2x^2}{1+x^2}\arctan\frac{1}{nx^2}dx\,.$$

1.9 Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{n(x^2+x-2)}}\,.$$

1.10 Data la funzione

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(1-cos\Big(\frac{x^n}{n}\Big)\Big)\,,$$

mostrare che
i) f è continua in $[-1,1]$
ii) f è di classe C^2 in $(-1,1)$
iii) f ha un minimo assoluto in 0.

1.11 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\Big(1-cos\frac{x}{\sqrt{n}}\Big)$$

1.12 Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\operatorname{sen}\frac{x^n}{n}-\log\big(1+\frac{x^n}{n}\big)\Big]$$

quando $x\in[-1,+\infty[$.

1.13 Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{\sqrt{n}-senx}{n^2x^n}\Big)^2.$$

1.14 Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[\operatorname{arctg}\Big(\frac{x^n}{\sqrt[3]{n}\log^2 n}\Big)-\frac{1}{\log^2 n}\operatorname{arctg}\Big(\frac{x^n}{\sqrt[3]{n}}\Big)\right].$$

1.15 Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2\,\mathrm{e}^{-nx}$$

e calcolarne la somma.

1.16 Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1-\cos\frac{x+1}{\sqrt{n^2+x^4}}\right).$$

1.17 Studiare la convergenza puntuale e la convergenza uniforme della successione di funzioni:

$$f_n(x)=\frac{e^{-n^{\alpha}|x|}}{\sqrt{n}}\,(1+nx^2)$$

al variare del parametro positivo α.

1.18 Studiare la convergenza puntuale e uniforme nell'intervallo $[0,\frac{\pi}{2})$ della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\tan\frac{x}{n}-\tan\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right).$$

1.19 Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\operatorname{sen}\frac{x^n}{n}+\operatorname{arctg}\frac{n}{x^n}-\frac{\pi}{2}\right).$$

Detta $S(x)$ la somma della serie, calcolarne il limite per $x\to 0$ (se esiste).

1.20 Provare che la seguente serie di funzioni converge uniformemente su $\mathbb{R}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{nx\sin^4 x}{1+n^3|x|^3}.$$

1.21 Studiare la convergenza puntuale e la convergenza uniforme della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\log\left(x+\frac{1}{n}\right)\right]^n}{x^2+n^2} .$$

1.22 Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \log\left(1+\frac{1}{n^{2x}}\right)$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

1.23 Provare che la seguente serie di funzioni converge uniformemente su ogni intervallo limitato:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n \arctan \frac{x}{n} - \int_0^x \frac{n^2\, dt}{n^2+\sin^2 n + t^2} \right) .$$

(*Suggerimento*: si scriva l'arcotangente come un integrale)

1.24 Mostrare che, fissato $\alpha > 2$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^\alpha + n^2}$$

converge uniformemente in $[0, +\infty)$.

1.25 Provare che la seguente serie di funzioni converge uniformemente su $[1, +\infty)$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln x - \int_1^x \frac{n}{\sqrt{n^2t^2+\cos^2 t}}\, dt \right] .$$

1.26 Discutere il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} n}{n^{2x}+x^{2n}}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

1.27 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+x^{2n}} .$$

2. Serie di Potenze

2.1 Calcolare l'insieme di convergenza e la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n+1}$$

2.2 Calcolare, utilizzando la formula di Taylor,

$$\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$$

a meno di 1/100 .

2.3 Sia $f(x) = sen(x^3)log(1+x^2)$. Utilizzando gli sviluppi in serie notevoli calcolare $f^{(11)}(0)$.

2.4 Calcolare l'intervallo di convergenza e la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} \ .$$

2.5 Calcolare la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+k)}$, dove $k > 0$

2.6 Studiare la convergenza e calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n+1}$$

2.7 Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}$$

e calcolare la somma della serie.

2.8 Calcolare il seguente integrale a meno di 1/100 (può essere utile ricordare che $n! \geq 2^n$ per ogni $n \geq 2$):

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\sqrt{x}} \, dx \, .$$

2.9 Data $f(x) = x^3 \operatorname{sen}^2 x$, calcolare $f^{(9)}(0)$.

3. Continuità e differenziabilità

3.1 Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\pi - 2\arccos(1 - e^{-(x^2+y^4)})}{(x^2+y^2)^\alpha} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$, si chiede di:
(i) trovare gli α tali che f è continua in $\mathbb{R}^2$;
(ii) trovare gli α tali che f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$.

3.2 Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy\log(|x|+|y|)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

studiarne la continuità e differenziabilità.

3.3 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-y}} & \text{se } y \neq x \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(i) Studiare il segno di f;
(ii) Studiare la continuità e la differenziabilità di f;
(iii) dire se $(0,100)$ è un punto di massimo relativo.

3.4 Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|^\alpha}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

con $\alpha > 0$, si chiede di:

(i) trovare gli α tali che f è continua in $\mathbb{R}^2$;

(ii) trovare gli α tali che f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$.

3.5 Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{x}\sqrt{y}}{x^2+y} & \text{se } (x,y) \in (0,+\infty) \times (0,+\infty) \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

si chiede:
(a) studiare la continuità di f in $\mathbb{R}^2$;
(b) studiare la differenziabilità di f in $\mathbb{R}^2$.

3.6 Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x^3-2y^3}-1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) mostrare che $f(x,y)$ è continua in $(0,0)$ e calcolare f_x e f_y in $(0,0)$;
(b) f è differenziabile in $(0,0)$?

3.7 Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^3-x^2y)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) mostrare che $f(x,y)$ è continua in $(0,0)$ e calcolare f_x e f_y in $(0,0)$;
(b) f è differenziabile in $(0,0)$?

3.8 Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x^5-y^3}-1}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

mostrare che
(i) $f(x,y)$ è continua in $(0,0)$;
(ii) f è dotata di derivate parziali in ogni direzione uscente dall'origine, ma non è differenziabile nell'origine.

3.9 Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha y^2}{\sqrt{x^6+2y^6}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

con $\alpha > 0$, si chiede di:

(i) trovare gli α tali che f è continua in $\mathbb{R}^2$;

(ii) trovare gli α tali che f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$.

3.10 Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x^3-y^5)}{x^2-5x^2y^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

mostrare che f
(i) è continua nell'origine;
(ii) è dotata di derivate parziali in ogni direzione uscente dall'origine;
(iii) non è differenziabile nell'origine.

3.11 Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{|xy|}\dfrac{\sin^2(x+y)}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

discutere: (a) la continuità di f in $(0,0)$; (b) l'esistenza delle derivate parziali in $(0,0)$; (c) la differenziabilità in $(0,0)$.

3.12 Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^8+(x^2-y^3)^2}{x^4+y^6} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{per } (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

discutere in $(0,0)$: la continuità d f, l'esistenza delle derivate direzionali, la differenziabilità.

3.13 Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^8+(x^2-y^3)^2}{x^4+y^6} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{per } (x,y) = (0,0)\,, \end{cases}$$

discutere in $(0,0)$: la continuità di f, l'esistenza delle derivate direzionali, la differenziabilità.

3.14 Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3x^{1/3}(x+y)}{x^2+y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

studiare:
- la continuità di f ;
- l'esistenza delle derivate direzionali;
- la differenziabilità .

3.15 Sia f la funzione definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3(x^2+y^4)}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(i) Provare che f è continua nell'origine.
(ii) Calcolare $f_x(0,0)$ e $f_y(0,0)$.
(iii) Mostrare che f non è differenziabile nell'origine.

3.16 Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\exp\left\{\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right\}}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

verificare che è continua in $(0,0)$;
calcolare le derivate parziali nell'origine;
provare che è differenziabile nell'origine.

3.17 Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} x \log y^2 & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0, \end{cases}$$

(a) studiare la continuità di f in $\mathbb{R}^2$;
(b) trovare gli insiemi di positività, negatività e gli zeri di f;
(c) dire se è vera o falsa la seguente affermazione:

$$\lim_{t \to 0} f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = 0,$$

dove $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ sono polinomi tali che

$$\lim_{t \to 0} \gamma_1(t) = \lim_{t \to 0} \gamma_2(t) = 0.$$

3.18 Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x^3-2y^3} - 1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

(a) calcolare f_x e f_y in $(0,0)$;
(b) f è continua in $(0,0)$? è differenziabile in $(0,0)$?

4. Massimi e Minimi

4.1 Data la funzione $f(x,y) = x^2 - x\,\mathrm{sen}^2 y$, determinarne massimo e minimo assoluti nel rettangolo $[-2,2] \times [0,2]$.

4.2 Determinare il massimo e il minimo assoluti della funzione $f(x,y) = x^2 + y^2 - y$ nel cerchio di centro $(1/2, 0)$ e raggio 1.

4.3 Determinare il massimo e il minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = xy\,\mathrm{e}^{x^2-y^2}$$

nel cerchio C di centro $(0,0)$ e raggio 1.

4.4 Determinare il massimo e il minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = (x^2 - y^2)\,\mathrm{e}^{xy}$$

nel triangolo T di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$.

4.5 Determinare massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = \frac{2+xy}{\mathrm{e}^{-x^2-y^2}}$$

al variare di (x,y) nel cerchio chiuso di centro l'origine e raggio 2.

4.6 Determinare, se esistono, massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x,y) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}xy^4)}{1+\sqrt{1-x^2-y^4}}.$$

4.7 Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x,y) = \sqrt{|x|+|y|}\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,.$$

Calcolare i massimi e minimi relativi e assoluti di f in $\mathbb{R}^2$.

4.8 Data la funzione
$$f(x,y) = \frac{1-xy^2}{1+x^2},$$
determinare i massimi e minimi relativi ed assoluti di f in
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1, -1 \le y \le 1\}.$$

4.9 Data la funzione
$$f(x,y) = \frac{10+x^2y^2}{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}$$
dire se ammette massimo o minimo assoluto in tutto il piano e in caso affermativo determinarlo.

4.10 Determinare massimo e minimo assoluti della funzione $f(x,y) = x^2 + y$ nella corona circolare di centro l'origine e raggi 1 e 2.

4.11 Determinare minimo e massimo assoluto nel quadrato $[0,\pi/2]\times[0,\pi/2]$ della funzione
$$f(x,y) = (\operatorname{sen} x - \cos y)(\operatorname{sen} x + \cos y)^2 \quad .$$

4.12 Determinare massimi e minimi assoluti della funzione
$$f(x,y) = x^3 y\, \mathrm{e}^{-\sqrt{x^2-y^2}}$$
nel settore circolare $C = \{(x,y) : 0 \le x \le 3,\ |y| \le x,\ x^2+y^2 \le 9\}$.

4.13 Si trovino estremi relativi e assoluti della funzione
$$f(x,y) = e^{x^2-y^2}(x^4-y^4)$$
nel cerchio di centro l'origine e raggio 2.

4.14 Determinare il massimo ed il minimo assoluti della funzione
$$f(x,y) = (x-y)^2(x+y)$$
nell'insieme $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\,,\ x+y \ge 0\}\,.$

4.15 Determinare massimo e minimo assoluto della funzione
$$x^2 z\, \mathrm{e}^{\,y^2+z^2}$$
nella palla di centro $(0,0,0)$ e raggio 1.

4.16 Trovare (se esistono) il massimo e il minimo assoluti nel piano della funzione

$$f(x,y) = \frac{2 - x^2y^2}{\exp\left(4\sqrt{x^2+y^2}\right)}\,.$$

4.17 Determinare il massimo e il minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = e^{xy}\sqrt{x^2+y^2}$$

nel cerchio di centro l'origine e raggio 2.

4.18 Determinare il massimo e il minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = e^{-x^2y^2}\sqrt{x^2+y^2}$$

nel cerchio di centro l'origine e raggio 2.

4.19 Determinare massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}x^2y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

nel quadrato $[0,1] \times [0,1]$.

4.20 Trovare massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\exp\left\{\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\right\}}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

nel cerchio (chiuso) di centro l'origine e raggio 1.

4.21 Calcolare minimo e massimo assoluto della funzione

$$f(x,y) = (2x-3)\,\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

nel cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 1.
(Fac.: mostrare che l'origine è un estremo relativo per f)

4.22 Trovare estremi relativi ed assoluti nel piano della funzione

$$f(x,y) = 5 + (x + \sin y)^3(x - \sin y)\,.$$

4.23 Determinare massimo e minimo assoluti della funzione $f(x,y) = x^4 - y^4 + x^2y^2$ al variare di (x,y) nel cerchio chiuso di centro l'origine e raggio 1.

4.24 Data la funzione

$$f(x,y) = \frac{100 + x^2y^2}{\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}} \ ,$$

calcolarne gli eventuali massimi e minimi in tutto $\mathbb{R}^2$.

4.25 Trovare, se esistono, massimi e minimi, relativi e assoluti, della funzione

$$f(x,y) = \arcsin\left(\max\left\{-1,\ e^{x^2+2y^2-2(x+2y)+1} - 2\right\}\right)$$

nel suo insieme di definizione.

5. Derivazione sotto il segno di integrale

5.1 Studiare la monotonia della funzione

$$F(x) = \int_0^{x^2} e^{x^2t^2}\ dt\ .$$

6. Equazioni Differenziali

6.1 Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + y = \frac{\cos x}{(1+\sin^2 x)}.$$

6.2 Al variare del parametro reale β, determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 2\beta y' + \beta^2 y = e^{-2x},$$

e individuare tutte le soluzioni tali che

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0.$$

6.3 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy' - y = \dfrac{2y^2}{x^2+y^2} \\ y(1) = 1 \, . \end{cases}$$

6.4 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = \frac{1}{2}(y-x)^2 \\ y(0) = 3 \quad y'(0) = 4 \, . \end{cases}$$

6.5 Mostrare che le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = (x+y')^2 \\ y(0) = \alpha, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

hanno tutte un minimo relativo in 0. E' possibile dimostrare cio' senza risolvere esplicitamente l'equazione?

6.6 Integrare l'equazione

$$(y \ln x - 2)y = xy'$$

e discutere la sommabilità in $(0, +\infty)$ delle soluzioni.

6.7 Integrare l'equazione

$$3y^2y' - y^3 - x - 1 = 0$$

e determinare l'unica curva integrale che tocca l'asse delle x in un sol punto.

6.8 Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy' - y = \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} \\ \\ y(1) = 1 \quad . \end{cases}$$

6.9 Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} (1+x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0 \\ \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

6.10 Trovare tutte le soluzioni dell'equazione

$$y'' = \frac{e^{y'} + e^{-y'}}{1+x^2} \quad .$$

Dedurre direttamente dall'equazione che le soluzioni $y(x)$ tali che $y'(0) = 0$ hanno in 0 minimo assoluto.

6.11 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}} = \dfrac{1}{y^2} \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

6.12 Determinare tutte le funzioni $y(x)$ tali che

$$\begin{cases} y(1-logy)y'' + (1+logy)y'^2 = 0 \\ \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

6.13 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + 2y + y^2 sen^2 x = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

6.14 Determinare le soluzioni del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy'' - 2x^3(y')^2 - y' = 0 \\ \\ y(0) = 0\,,\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

(Fac. Senza risolvere esplicitamente l'equazione provare che tutte le sue soluzioni sono funzioni pari)

6.15 Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}}\ .$$

6.16 Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2y'y'' + (1+y'^2)^2 = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases} .$$

6.17 Dare una formula risolutiva per l'equazione

$$y'' + y = \frac{1}{1+x^2}$$

e mostrare che esiste una soluzione $y(x)$ tale che

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0 \qquad .$$

6.18 Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = \dfrac{1}{\operatorname{sen} 2x + 1} \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

e verificare che ha un minimo relativo in 0.

6.19 Integrare l'equazione

$$(y \ln x - 2)y = xy'$$

e discutere la sommabilità in $(0, +\infty)$ delle soluzioni.

6.20 Dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy' + x \log x(\log x + 1)y^2 - y = 0 \\ y(1) = \alpha \end{cases}$$

è definita per ogni $x > 0$ ed è sommabile in $(0, +\infty)$.

6.21 Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y = -\dfrac{y''}{\sqrt{(y')^2 + (y'')^2}} \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = -1 \end{cases}$$

6.22 La soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy' - y = \dfrac{y^2 - x^2}{y} \\ y(1) = 0\,, \end{cases}$$

è una curva chiusa γ. Detta D la regione del semipiano $x > 0$ racchiusa da γ, calcolare il baricentro di D.

6.23 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{2x}{1+x^2} y + (1+x^2)^{1-\alpha}\, y^{1-\alpha}\,, \\ y(0) = 1\,, \end{cases}$$

determinare i valori di $\alpha > 0$ per i quali la soluzione ammette limite finito per $x \to +\infty$.

6.24 Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^3 y'' = e^y (y-2) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = \sqrt{2e} \end{cases}$$

e si calcoli il limite, per $x \to +\infty$, della soluzione.

6.25 Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + y'^2 = \cos^2 y - \cos y \operatorname{sen} y \\ \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = -1\,. \end{cases}$$

6.26 Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2y^{3/2} y'' = \left(1 + (y')^2\right)^{3/2} \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -1\,. \end{cases}$$

6.27 Determinare le funzioni $y(x) : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ tali che l'area della superficie ottenuta ruotando il grafico di y in $[0, x]$ di un angolo di 2π intorno all'asse delle x sia pari a πx.

6.28 Risolvere il seguente problema ai limiti

$$\begin{cases} x^2 y'' - 2y = x^4 \,\mathrm{e}^{-x} - 4x^3 \,\mathrm{e}^{-x} \\ \\ y(1) = 0 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0 \end{cases}$$

6.29 Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua, pari, sommabile, verificante

$$\int_0^{+\infty} f(x) \cos x \, dx = 0\,.$$

6.30 Mostrare che l'equazione differenziale

$$y''(x) + y(x) = f(x)$$

ammette un'unica soluzione infinitesima per $x \to \pm\infty$.

6.31 Disegnare l'andamento delle soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y+x)e^y \sin y \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Calcolare, se esistono, i limiti di tali soluzioni a $\pm\infty$.
Suggerimento: si trovino subito le soluzioni costanti.

6.32 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' - 2y' + y = e^x \left(3 + \frac{\log^2 x}{x}\right) .$$

6.33 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{y''}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{y^2} \\ y(0) = 1\,, \qquad y'(0) = 0 \end{cases}$$

6.34 Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} yy'' + (y')^2 + y(y')^3 = 0 \\ y(0) = e \\ y'(0) = \dfrac{1}{e} \end{cases}$$

Mostrare che la soluzione, che è definita per ogni $x > 0$, è una funzione crescente e concava, e che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{\sqrt{x}} = 0\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x^\alpha} = +\infty \quad \forall \alpha < \frac{1}{2}\,.$$

6.35 Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''y' = 2\,\mathrm{sen}\,2x \\ \\ y(\pi) = 0 \\ \\ y'(\pi) = 0\,. \end{cases}$$

6.36 Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy' - y = \dfrac{x^2+y^2}{y} \\ \\ y(1) = 1\,. \end{cases}$$

6.37 Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{4x^3 + 4x^2y - xy^2 + y^3}{x(y^2 + 4x^2)} \\ y(2) = -2\,. \end{cases}$$

6.38 Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} xy'' + y'(1 + \sqrt{xy'}) = 0 \\ y(\mathrm{e}) = 0 \\ y'(\mathrm{e}) = \dfrac{4}{\mathrm{e}}\,. \end{cases}$$

6.39 Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y^3y'' = \mathrm{e}^{\,y}(y-2) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = \sqrt{2\,\mathrm{e}}\,. \end{cases}$$

6.40 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' = \dfrac{2+x}{x^3} \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

7. Curve e Forme Differenziali

7.1 Calcolare

$$\int_{+\partial D} xy\,dx - y\,dy,$$

dove D è il dominio del piano delimitato dalla parabola $y = x^2$, dal semiasse delle y positive e dalla retta $y = 1$, contenuto nel I quadrante.

7.2 Dopo aver riconosciuto che la regione di piano racchiusa dalla curva di equazione $(x^2 + y^2)^2 = xy$ è simmetrica rispetto all'origine, calcolarne l'area.

7.3 Sia γ l'arco della curva di equazione implicita $(x^2 + y^2)^2 - x^2y = 0$ contenuto nel primo quadrante. Calcolare l'area della porzione di piano racchiusa da γ.

7.4 Calcolare la lunghezza della curva di equazione polare $\varrho = \cos^2\vartheta$, $-\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi/2$.

7.5 Data la forma differenziale

$$\omega = 2x(y-1)e^{x^2+y}\,dx + \left[ye^{x^2+y} + \frac{x}{x^2+y^2}\right]\,dy,$$

calcolare $\displaystyle\int_\gamma \omega$, dove γ è l'ellisse di equazione $\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$, percorsa in senso antiorario.

7.6 Sia $\gamma = \{(x,y) \in \mathrm{I\!R}^2 : x > 0,\ (x^2+y^2)^2 - xy = 0\}$. Si calcoli l'area della superficie ottenuta ruotando γ di un giro completo intorno all'asse x.

7.7 Determinare una funzione $b(x,y)$ tale che la forma differenziale

$$\omega = \log\sqrt{1-(x^2+y^2)}\,dx + b(x,y)\,dy$$

risulti esatta nel suo insieme di definizione. Calcolare poi $\displaystyle\int_\gamma \omega$ dove γ è una curva, contenuta nell'insieme di definizione di ω, che connette i punti $(0,0)$ e $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

7.8 Data la forma differenziale

$$\omega = \left[\frac{x^2}{1-x^2-y^2} - \frac{1}{2}\log(1-x^2-y^2)\right]dx + \frac{xy}{1-x^2-y^2}dy\,,$$

si verifichi che la forma è esatta. Calcolare poi $\displaystyle\int_\gamma \omega$ dove γ è una curva, contenuta nell'insieme di definizione di ω, che connette i punti $(0,0)$ e $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

7.9 Calcolare il baricentro della curva γ di equazione $\gamma(t) = (\cos^3 t, \mathrm{sen}^3 t)$, $t \in [0, \pi/2]$.

7.10 Calcolare la primitiva di

$$\frac{xz}{(1+x^2)^2}dx - \frac{yz}{(1+y^2)^2}dy + \frac{x^2-y^2}{2(1+x^2+y^2+x^2y^2)}dz$$

che vale 1 in $(1,1,1)$.

7.11 Data la forma differenziale

$$\frac{z^2}{x(x^2+z^2)}dx + \frac{dy}{y} - \frac{z}{x^2+z^2}dz\,,$$

mostrare che è esatta e calcolarne la primitiva che vale 0 in $(1,-1,1)$

7.12 Dire per quali funzioni $Y(x,y)$ di classe C^1 in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la forma differenziale

$$\frac{x}{x^2+y^2}dx + Y(x,y)dy$$

risulta esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

1) La forma differenziale

$$\frac{y^2+z^2-yz+1}{y^2+z^2+1}dx + \frac{xz(y^2-z^2-1)}{(y^2+z^2+1)^2}dy + \frac{xy(z^2-y^2-1}{(y^2+z^2+1)^2}dz$$

è esatta. Determinarne la primitiva che vale zero in $(1,1,1)$.

7.13 Calcolare l'integrale della forma differenziale

$$\omega = \left(\frac{x}{1+x^2+y^2} + xy\right) dx + \frac{y}{1+x^2+y^2}\, dy$$

lungo la curva

$$y = x^2 \log x\,, \qquad x \in (0,1)\,.$$

Suggerimento: si 'spezzi' la forma differenziale in modo opportuno.

7.14 Sia $E = F \setminus (E_1 \cup E_2)$, dove F è il semicerchio

$$x^2+y^2 \le 1\,, \qquad y \ge 0\,,$$

E_1 è il cerchio di raggio 1 e centro $(1,0)$, e E_2 è il cerchio di raggio 1 e centro $(-1,0)$. Si calcoli il baricentro del bordo di E.

7.15 Calcolare

$$\int_{+\partial D} xy\, dx - y\, dy\ ,$$

dove D è il dominio del piano delimitato dalla parabola $y = x^2$, dal semiasse delle y positive e dalla retta $y = 1$, contenuto nel primo quadrante.

7.16 Calcolare

$$\int_\gamma x\, dx - y\, dy\ ,$$

dove γ è la spirale di equazione polare $\varrho = \mathrm{e}^{-\vartheta}$, $\vartheta \ge 0$, orientata in senso antiorario.

7.17 Calcolare il baricentro della cardioide di equazione polare $\varrho = 1 + \cos\vartheta$, $\vartheta \in [0, 2, \pi]$.

7.18 Sia γ la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = \mathrm{e}^{-(t-1)^2} \\ y(t) = \dfrac{1}{t^2 - t + 1} \end{cases} \qquad t \in [0, 2] \, .$$

Disegnare γ e calcolare

$$\int_\gamma \operatorname{sen}^2 x \log(xy) dx + \Big(\frac{x - \operatorname{sen} x \cos x}{2y} \Big) dy \, .$$

8. Integrali Doppi

8.1 Dato $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ si ponga

$$D_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, x \geq \alpha\}, \qquad I_\alpha = \iint_{D_\alpha} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \, dxdy \, .$$

Calcolare il valore di I_α e il limite $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} I_\alpha$.

8.2 Sia γ la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = t \sin t. \end{cases} \qquad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \right]$$

si chiede:
(a) mostrare che γ è una curva regolare e semplice;
(b) detta D la regione di piano delimitata da γ e dall'asse delle y, calcolare

$$\iint_D x^2 \, dx \, dy.$$

8.3 Sia D la regione di piano limitata, delimitata dalle curve di equazione $y = e^x$, $y = e^x - 2$, $y = -x - 1$, $y = -x + 1$. Calcolare

$$\iint_D e^{3(y+x)} dx \, dy.$$

8.4 Calcolare
$$\int\!\!\int_T \frac{x}{y} dx\, dy$$
dove T è il dominio del piano racchiuso dalle parabole $y = x^2$ e $x = y^2$.

8.5 Sia S la semisfera $S = \{x^2 + y^2 + z^2 \le R^2, z \ge 0\}$. A quale altezza h si deve far passare un piano parallelo al piano xy in modo che tagli S in due parti di ugual volume? e di uguale superficie laterale?

8.6 Sia D il dominio del piano racchiuso dalla curva di equazione
$$\begin{cases} x = t - t^2 \\ \\ y = t - t^3 \end{cases} \qquad 0 \le t \le 1$$
Calcolare
$$\iint_D \frac{1}{2+x} dxdy\,.$$

8.7 Si calcoli il volume del solido delimitato dalle superfici di equazione $z = x^2 + y^2$ e $z = \sqrt{3 - 2(x^2 + y^2)}$.

8.8 Sia T la regione di spazio compresa fra il cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e il paraboloide $z = k - x^2 - y^2$.
T ha approssimativamente la forma di un cono gelato.
Detti V il volume di T e V_C il volume contenuto nella 'cialda' del suddetto gelato' T, calcolare il limite del rapporto
$$\frac{V_C}{V}$$
al tendere di $k \to 0^+$ e di $k \to +\infty$.

8.9 Data la curva
$$\gamma = \begin{cases} x = & 1 - sent \\ \\ z = & -logcost \end{cases} \qquad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}[$$
calcolare il volume della regione illimitata di spazio che si ottiene ruotando la curva intorno all'asse z.
Mostrare inoltre che la superficie che delimita questa regione ha area finita.

8.10 Calcolare il volume del solido racchiuso dal cilindro di equazione $x^2 + y^2 - 2y = 0$ e delimitato dalla superficie di equazione $z = xy$ e dai semispazi $z \ge 0$, $x \ge 0$ e $y \le 1$.

8.11 Sia D il dominio contenuto nel secondo quadrante del piano e compreso fra le curve di equazione $4x^2 + y^2 + 8x = 0$ e $x^2 + y^2 + 2x = 0$. Calcolare

$$\iint_D \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dxdy \qquad .$$

8.12 Sia A la porzione di piano contenuta nel primo ottante e racchiusa fra le curve di equazione $x - y = 0$ e $x^3 + y^3 - xy = 0$.
Calcolare il volume del cilindroide di base A delimitato dal grafico della funzione $f(x, y) = \frac{y}{x^2}$.

8.13 Calcolare il volume del solido definito dalle relazioni:

$$0 \leq x \leq 1 + 3(y^2 + z^2) \quad , \quad 16(y^2 + z^2) \leq x^2 \qquad .$$

8.14 Siano $0 < a \leq 1$ e D_a il dominio del piano delimitato dall'asse y, dalla retta $y = a$ e dalla circonferenza di centro $(1, 0)$ e raggio 1. Sia poi T_a il solido ottenuto ruotando D_a intorno all'asse y.
(i) Si determini una formula che esprima il volume di T_a per mezzo di un integrale unidimensionale.
(ii) Si calcoli il volume di T_1.
(iii) Si calcoli il

$$\lim_{a \to 0^+} \frac{\mathrm{vol}(T_a)}{a^5}.$$

Sugg.: per lo svolgimento di quest'ultimo punto non è necessario calcolare esplicitamente il volume di T_a.

8.15 Data la curva γ di equazioni parametriche

$$\gamma(t) = ((1 - \sin t) \cos t, \sin t) \qquad t \in [0, 2\pi] \, ,$$

si verifichi che γ è una curva regolare a tratti, semplice e chiusa, simmetrica rispetto all'asse delle y. Detto D il dominio del piano racchiuso da tale curva, si determini il baricentro di D.

8.16 Sia T la regione del piano delimitata dalla retta $y = 1$, dalla circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 1 e dalla circonferenza di centro $(1, 0)$ e raggio 1. Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando T di un giro completo intorno alla retta $y = 1$.

8.17 Calcolare l'integrale

$$\int\int_D \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy} \, ,$$

dove
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 2 \le x^2 + y^2 \le 12\,, \quad y \ge x^2\right\}\,.$$

8.18 Sia D il dominio limitato del piano contenuto nel primo quadrante e delimitato dalle rette $y = x$, $y = \sqrt{3}x$ e dalla curva $3x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0$. Calcolare
$$\iint_D \frac{x}{y}\,dxdy\,.$$

8.19 Si immagini di far cadere una sfera di raggio 1 all'interno di un cono circolare retto (vuoto), di raggio di base 2, e altezza $2\sqrt{2}$, con il vertice rivolto verso il basso. Si calcoli il volume di ciascuna delle due parti del cono che rimangono rispettivamente al di sotto e al di sopra della sfera.

8.20 Calcolare
$$\iint_D xy\,dxdy\,,$$
dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0,\, x^2 + y^2 > 1,\, x^2 + y^2 - 2x < 0\}$.

8.21 Siano C_1 il cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 1 e C_2 il cerchio di centro $(1,0)$ e raggio 1. Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando $C_2 \setminus C_1$ di un giro completo intorno all'asse y.

8.22 Siano $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ e $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le f(x)\}$.
(i) *(5 punti)* Calcolare il volume del solido che si ottiene ruotando R di un giro completo intorno all'asse x;
(ii) *(6 punti)* Calcolare il volume del solido che si ottiene ruotando R di un giro completo intorno all'asse y.

8.23 Sia E l'insieme
$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x \ge 0,\ y \ge 0,\ \arctan{(x^2 + y^2)} \le z \le \frac{\pi}{4}\right\};$$
disegnare E e calcolarne il volume.

8.24 Sia D il dominio contenuto nells striscia $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \frac{\pi}{2}],\, y \ge 0\right\}$, delimitato dalle curve di equazione $y = \operatorname{sen} x$, $y = 2\operatorname{sen} x$, $y = \frac{1}{2}\cos x$, $y = \frac{3}{2}\cos x$. Calcolare
$$\iint_D \frac{\operatorname{sen}^3 x \cos x}{y^3}\,dxdy\,.$$

9. Integrali di Superficie

9.1 Sia V il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ definito da

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\right\},$$

e sia S la frontiera di V. Calcolare il flusso uscente attraverso S del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x^2 z, 3yz^2, 5 \log z).$$

9.2 Posto $T = \{x^2 + y^2 \leq z^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 2y, \quad z \geq 0\}$, calcolare il flusso del campo $\underline{v} = (0, yz, x)$ attraverso la frontiera di T orientata verso l'esterno.

9.3 Posto $T = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad (x-1)^2 + z^2 \leq y^2, \quad y \geq 0\}$, calcolare il flusso del campo $\underline{v} = (y, y^2, 0)$ attraverso la frontiera di T orientata verso l'interno.

9.4 Sia γ la curva di equazione $(x^2 + y^2)^2 = xy^2$ racchiusa nel primo quadrante e D il dominio limitato avente γ come frontiera. Considerato il cilindro retto $C = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq 2\}$, calcolare il flusso uscente dalla frontiera del cilindro del campo $\underline{v} = \sqrt{x^2 + y^2}(\underline{i} + \underline{j})$.

9.5 Sia

$$S = \begin{cases} x = u - v \\ y = u \\ z = u^2 + v^2 \end{cases} \qquad (u, v) \in B = \{u^2 + v^2 \leq 1\}$$

Si osservi che il bordo di S, Γ è contenuto nel piano $z = 1$. Detta γ la proiezione di Γ sul piano (x, y) e D il dominio racchiuso da γ, mostrare che S è il grafico di un'opportuna funzione $f(x, y) : D \to \mathbb{R}$.
Usare questo risultato per calcolare il volume della regione di spazio T definita da

$$T = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, f(x, y) \leq z \leq 1\} \quad .$$

9.6 Sia C il solido racchiuso dalle superfici di equazione $z = y^2 - x$ e $z = x^2 + 2(y-1)^2$. Calcolare il flusso uscente dalla frontiera di C del campo $v = (xy, z, y)$.

9.7 Siano γ la curva del piano (x, z) di equazione $\varrho = \sin\vartheta\cos\vartheta$, $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$, e D il dominio limitato di cui γ è la frontiera. Detto T il dominio ottenuto ruotando D di un giro completo intorno all'asse z, calcolare

$$\int_{\partial T} (F, N)\, d\sigma\,,$$

dove $F = \left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z}{x^2+y^2+z^2} \right)$ e N è la normale a ∂T orientata verso l'esterno di T.

9.8 Data la curva γ del piano xy di equazioni parametriche

$$(\gamma) \qquad \gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t) \qquad t \in [0, \pi]\,,$$

sia Σ la superficie ottenuta facendo ruotare γ intorno all'asse delle x. Si trovi l'area di Σ e inoltre si calcoli l'integrale superficiale

$$\int_\Sigma (x^2 + y^2)\, d\sigma\,.$$

9.9 Sia S la superficie di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \\ z = u^3 \end{cases}$$

con $(u, v) \in D = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1\,,\ u^2 + v^2 - 2u \geq 0\}$. Calcolare il flusso attraverso la superficie S (orientata in modo che la normale punti verso l'alto) del seguente campo vettoriale:

$$F(x, y, z) = \left(\frac{1}{x^2+y^2}, \frac{1}{x^2+y^2}, 0 \right)\,.$$

9.10 Data la curva chiusa γ di equazione implicita

$$(x^2 + y^2)^2 = xy^2$$

contenuta nel primo quadrante del piano xy, sia S la superficie cilindrica

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ :\ (x, y) \in \gamma\,,\ 0 \leq z \leq 1 \right\}\,.$$

9.11 Dato il campo vettoriale $\mathbf{v} = (\sqrt{x^2+y^2}, 0, z)$, calcolare

$$\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma\,,$$

dove $\mathbf{n}$ è il versore normale a S, orientato verso l'esterno del cilindro.
Suggerimento: si usino coordinate polari nel piano per parametrizzare la curva γ.

9.12 Sia T il toro ottenuto ruotando il cerchio del piano xz di centro $(2, 0)$ e raggio 1 di un giro completo intorno all'asse z. Calcolare il flusso uscente dalla frontiera di T del campo vettoriale $f(x, y, z)$ di componenti

$$(x\sqrt{x^2+y^2}, y\sqrt{x^2+y^2}, 0)\,.$$

(Si ricorda che tale flusso è definito da $\int_{\partial T} f \cdot \nu \, d\sigma$, dove ν è il versore normale esterno alla frontiera di T)

9.13 Disegnare la parte di superficie $z = \sin x$, denotata con S, che ha per proiezione ortogonale sul piano xy il rettangolo di vertici $(0,0), (0,1), (\frac{\pi}{2}, 0), (\frac{\pi}{2}, 1)$ e sia ν la normale a S che punta verso il basso. Calcolare il flusso di

$$F(x,y,z) = \left(\frac{1}{\sin x + 1}, \, 2\pi, \, \frac{y}{x^2 + y^2 + 1} \right)$$

attraverso S nella direzione ν.

10. Integrali Tripli

10.1 Sia C il solido ottenuto intersecando la sfera di centro l'origine e raggio 1 con il cilindro circolare retto $x^2 + y^2 - x = 0$. Calcolare il baricentro di C.

10.2 Sia $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le z \le x^2 + y^2, \, , x^2 + y^2 - 2y \le 0\}$. Calcolare

$$\iiint_T \frac{|x|y}{\sqrt{x}} \, dxdydz \ .$$

10.3 Si calcoli

$$\int\!\!\int\!\!\int_E z \, dx \, dy \, dz \, ,$$

dove

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R} : z \ge x^2 + y^2 \, , \quad y \ge x^2 + z^2 \right\} \, .$$

10.4 Dati la palla P, l'ellissoide E e il semipiano S di equazioni rispettivamente

$$(P): \quad x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \, , \qquad (E): \quad 16x^2 + 16y^2 + z^2 \le 4 \, , \qquad (S): \quad z \ge 0 \, ,$$

si calcoli il baricentro del solido $D = (P \cup E) \cap S$.

11. Funzioni Implicite

11.1 Mostrare che in un intorno del punto $(0,0,1)$ la superficie $z^4 + xz^3 - y^2 - 1 = 0$ è il grafico di una funzione del tipo $z = \varphi(x,y)$ e calcolarne il piano tangente nel punto $(0,0,1)$.

11.2 Verificare che l'equazione $x^2 + y^2 - ze^z = 0$ definisce implicitamente in un intorno di $(0,0)$ una funzione $z = g(x,y)$ tale che $g(0,0) = 0$. Mostrare poi che g ha un minimo assoluto in $(0,0)$. Spiegare il procedimento seguito.

11.3 Mostrare che in un intorno di $(0,0)$ la curva definita implicitamente dall'equazione

$$x^2 - 3y + e^{xy} = 1$$

è il grafico di una funzione g della variabile x e che g ha un minimo relativo in 0 .

11.4 Verificare che l'equazione $xye^{-x^2y} + e = 0$ definisce implicitamente in un intorno di 1 una funzione $f(x)$ tale che $f(1) = -1$. Calcolare $f'(1)$.

11.5 Verificare che l'equazione

$$f(x,y,z) = \log\sqrt{1 + x^2 + y^2} - (z-1)\,\mathrm{e}^{\,z} = 0$$

definisce implicitamente $z = f(x,y)$ in un intorno di $(0,0,1)$ e che la funzione così definita ha minimo assoluto in $(0,0)$.

11.6 Mostrare che in un intorno di $(0,0)$ la curva definita implicitamente da

$$e^{xy} - x^2 + 2y = 1$$

è il grafico di una funzione della variabile x e che tale funzione ha un estremo relativo per $x = 0$.

12. Massimi e Minimi Vincolati

12.1 Calcolare la quota massima raggiunta dai punti della superficie

$$y^3 + xy^2 - y^4 - x^2 - z^2 + 1 = 0\,.$$

12.2 Trovare la minima distanza fra la retta $x = -3$ e la parabola $x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0$. (Sugg. Minimizzare la distanza al quadrato)

12.3 Determinare il minimo assoluto della funzione $f(x,y,z) = x^2 + (y-1)^2 + z^2$ sul paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2 + 1/4$.

Applicare poi il risultato ottenuto per determinare la distanza minima del punto $(0,1,0)$ dai punti del paraboloide.

12.4 Data la curva

$$\gamma = \begin{cases} x^2 + y^2 + 4z^2 - 4 = 0 \\ \\ x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

determinarne il punto di γ di massima quota.

12.5 Sia γ la curva ottenuta intersecando il paraboloide $z = x^2 + y^2$ con il piano $z = 1 - x - y$. Calcolare la (minima) distanza dell'origine dai punti di γ.
(Sugg.: conviene minimizzare la distanza al quadrato).

12.6 Dati i tre punti $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ e $C(0,0,1)$ in $\mathbb{R}^3$, si determinino i punti P, tra quelli aventi distanza 1 dall'origine, che rendono massima o minima la quantità

$$2\overline{AP}^2 + 2\overline{BP}^2 - \overline{CP}^2 .$$

12.7 Siano γ e r rispettivamente l'ellisse e la retta di equazioni

$$(\gamma): \quad x^2 + 4y^2 - 4 = 0 , \qquad (r): \quad x - y + 1 = 0 .$$

Determinare, usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, il triangolo di area massima avente due vertici nell'intersezione di r con γ e il terzo vertice su γ. A tale scopo si ricordi che l'area del triangolo T avente per vertici i punti $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e $C = (c_1, c_2)$ è data da

$$\text{Area}(T) = \frac{1}{2} \left|\det \left((a_1, a_2, 1) \ (b_1, b_2, 1) \ (c_1, c_2, 1)\right)\right| ,$$