# Analisi della Dinamica

- Si potrebbe operare sul sistema reale.
  - Potrebbe non esistere
  - Time consuming e costoso

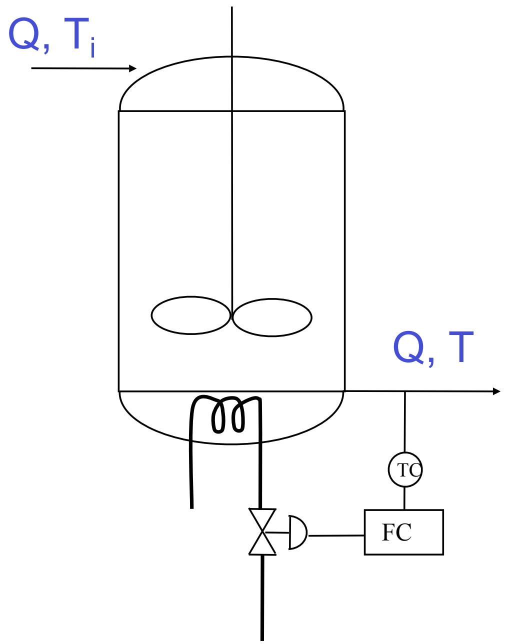
- Rappresentazione matematica (idealizzata )

- Dato un modello matematico si può studiare la risposta del sistema a vari cambiamenti degli ingressi
  - Modello
  - Input functions (Forzanti)

- Modelli
  - ODE
    - Lineari: Trasformate di Laplace
    - Nonlineari: Linearizzazione, Metodi numerici
  - PDE

# Modellazione dinamica

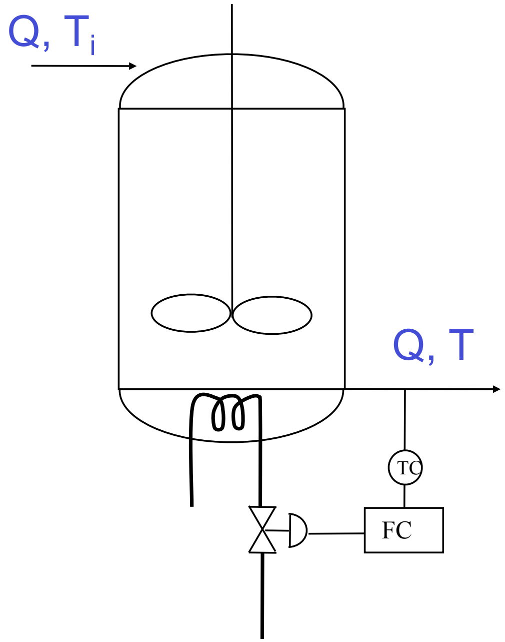
- Il riscaldatore a perfetta miscelazione (Stirred Heating Tank)
  - Ipotesi: perfetta miscelazione




- Grandezze importanti:
  - Q portata volumetrica (stazionaria)
  - $T_i$ Temperatura corrente in ingresso
    - (input – disturbo)
  - T Temperatura corrente in uscita
    - (output – misurabile)
  - Calore scambiato nell'unità di tempo q
    - (input – manipolabile).

# Modellazione dinamica

- Bilancio in condizioni stazionarie
- Bilancio su sistema aperto I principio della termodinamica




$$\text{In} - \text{out} = 0$$

$$Q\rho c_P(T_{is}-T_{rif}) + q_s - Q\rho c_P(T_s-T_{rif}) = 0$$

- Ipotesi:
  - Densità e calore specifico costante

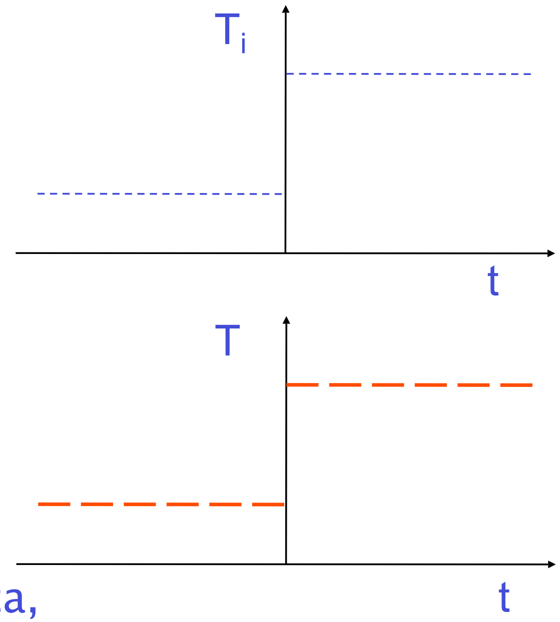
$$Q\rho c_P(T_s-T_{is}) = q_s$$

$$T_s = \frac{q_s}{Qrc_p} + T_{is}$$

# Modellazione dinamica

- Bilancio in condizioni stazionarie

$$Q\rho c_P(T_s - T_{is}) = q_s$$




- Se $T_{is}$ cambia anche $T_s$ cambia
  - $T_{isn} = T_{is} + \Delta T$
  - $T_{sn} = T_s + \Delta T$

- Non abbiamo modo di dire nulla sulla dinamica, sappiamo solo cosa succederà a tempi lunghi.

- Per avere informazioni sulla dinamica dobbiamo costruire il modello che descriva anche il transitorio.

# Modellazione dinamica

- Bilancio in condizioni dinamiche

Acc = in – out

- Per un liquido è ragionevole supporre che $\Delta U \cong \Delta H$

- Quindi il termine di accumulo possiamo scriverlo come:

$$\frac{d}{dt}\Delta H = \frac{d}{dt}\rho c_p V\left(T - Trif\right) = \rho c_p V \frac{d}{dt} T$$

- Ipotesi: il volume non cambia.

$$\rho c_p V \frac{d}{dt} T = Q\rho c_p \left(T_i - T_{rif}\right) + q - Q\rho c_p \left(T - T_{rif}\right)$$

$$\rho c_p V \frac{d}{dt} T = Q\rho c_p \left(T_i - T\right) + q$$

# Modellazione dinamica

- Bilancio in condizioni dinamiche
- Manca una condizione iniziale perché il problema sia ben posto:
  - @$t=0$, $T=T_0$
- Possiamo quindi determinare la funzione $T(t)$ a partire dalla condizione iniziale scelta.
- Importante:
  - in generale anche $T_i$ e $q$ dipendono dal tempo.
  - Considereremo la condizione iniziale come il set point.
  - Nella logica del controllo regolativo siamo interessati a conoscere come $T$ si discosta da $T_s$.
- Variabili deviate: $T' = T - T_s$.
- Possiamo riscrivere tutto in termini di variabili deviate.

# Modellazione dinamica

- Bilancio in condizioni dinamiche in termini deviati

$$\rho c_p V \frac{d}{dt} T' = Q \rho c_p \left( T_i - T' - T_s \right) + q$$

$$T_s = \frac{q_s}{Q \rho c_p} + T_{is}$$

$$\rho c_p V \frac{d}{dt} T' = Q \rho c_p \left( T_i' - T' \right) + q'$$

$$@ t = 0 \quad T' = 0$$

- Se il sistema non è controllato q' è nullo perché non manipolato.

$$\frac{V}{Q} \frac{d}{dt} T' = \left( T_i' - T' \right)$$

$$@ t = 0 \quad T' = 0$$

- Il parametro V/Q è il tempo di residenza, τ.

# Modellazione dinamica

- Se il sistema non è forzato, quindi $T_i'=0$ il sistema resta nel set point.

- Se il sistema è forzato osserveremo una dinamica. Per esempio se la corrente in ingresso cambia la sua temperatura a gradino allora:
  - $t<0$ $T_i'=0$, $t\geq 0$ $T_i'=\Delta T$

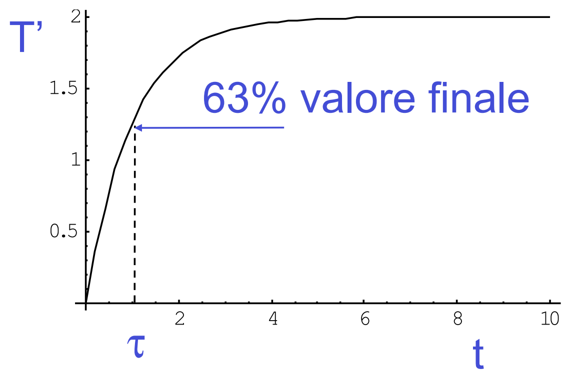
- Il modello diventa:

$$\tau \frac{d}{dt} T' = (\Delta T - T')$$

$$@\, t=0 \quad T'=0$$

- Integrando si ottiene:

$$T' = \Delta T \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$



# Soluzione Eq. Differenziali lineare I ordine non omogenea

- Il modello a cui eravamo pervenuti era:

$$\tau \frac{d}{dt} T' = \Delta T - T'$$

$$@\, t = 0 \quad T' = 0$$

- Tutte le equazioni lineari non omogenee di primo ordine sono risolubili, perché è sempre possibile trovare un fattore integrante che è una funzione della sola variabile indipendente.

- Se l'associata equazione omogenea è risolubile, l'unica complicazione aggiuntiva nel risolvere un'equazione non omogenea è trovarne una soluzione particolare.

# Soluzione Eq. Differenziali lineare I ordine non omogenea

- Equazione da risolvere:

$$\dot{T}' + p(t)\,T' = f(t)$$

- Nel nostro caso: $p(t) = \dfrac{1}{\tau}, \qquad f(t) = \dfrac{\Delta T}{\tau}$

- EQ. OMOGENEA ASSOCIATA

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{dT'}{dt} = -p(t)\,T' \\ &\frac{dT'}{T'} = -p(t)\,dt \\ &\int \frac{dT'}{T'} = \int -p(t)\,dt \\ &\log(T') = -\int p(t)\,dt + c \end{aligned}}$$

$$\boxed{T' = e^{-\int p(t)\,dt + c} = Ce^{-\int p(t)\,dt}}$$

$$\boxed{T' = Ce^{-\frac{t}{\tau}}}$$

# Soluzione Eq. Differenziali lineare I ordine non omogenea

- Serve l'integrale particolare.
- Usiamo il metodo della variazione della costante arbitraria di Lagrange.

$$T'_{omo} = C(t)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\frac{dT'_{omo}}{dt} = \left(\frac{dC(t)}{dt} - C(t)p(t)\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- Sostituiamo nell'equazione originaria:

$$\left(\frac{dC(t)}{dt} - C(t)p(t)\right)e^{-\frac{t}{\tau}} + p(t)C(t)e^{-\frac{t}{\tau}} = f(t)$$

$$\frac{dC(t)}{dt} = f(t)e^{\frac{t}{\tau}}$$

$$C(t) = \int f(t)e^{\frac{t}{\tau}}dt$$

$$C(t) = \int \Delta T e^{\frac{t}{\tau}}dt = \Delta T\, e^{\frac{t}{\tau}} + K$$

$$Sostituendo:$$

$$T' = \Delta T + Ke^{-\frac{t}{\tau}}$$

# Soluzione Eq. Differenziali lineare I ordine non omogenea

- Utilizzando la condizione iniziale si risolve il problema:

$$T' = \Delta T\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

# Modellazione dinamica

- Se dobbiamo risolvere un problema di tipo regolativo dobbiamo operare su q manipolandola.

- Il modello diventa:

$$\tau \frac{d}{dt} T' = \left( \Delta T - T' \right) + \frac{q'}{Q \rho c_p}$$

$$@ t = 0 \quad T' = 0$$

- Come manipoliamo q'?

- Possiamo far variare q' proporzionalmente a quanto si discosta T' da zero ovvero T dal set point. (Controllore Proporzionale)

$$q' = -K_c T'$$

# Modellazione dinamica

- Il modello diventa:

$$\tau \frac{d}{dt} T' = \Delta T - \left(1 + \frac{K_c}{Q\rho c_p}\right) T'$$

$$@ t = 0 \quad T' = 0$$

- Integrando si ottiene:

$$T' = \frac{\Delta T}{1 + \frac{Kc}{Q\rho c_p}} \left[ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}\left(1 + \frac{Kc}{Q\rho c_p}\right)} \right]$$

- Cosa succede a tempi lunghi?

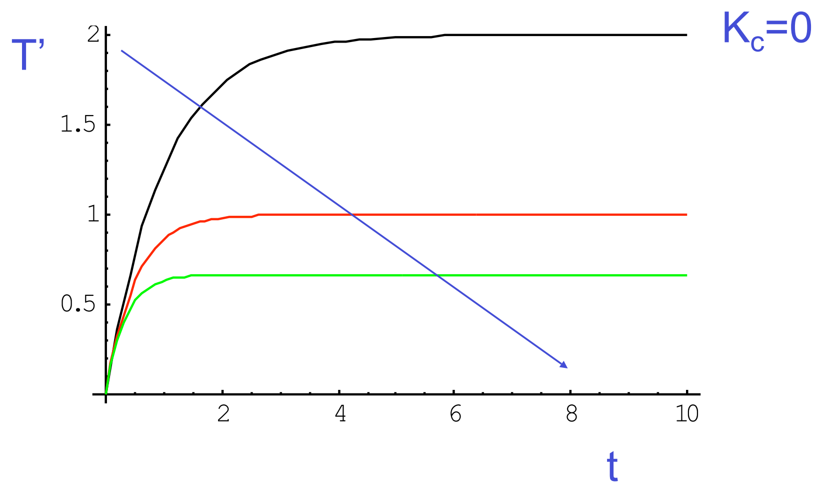
$$\lim_{t \to \infty} T' = \frac{\Delta T}{1 + \underbrace{\frac{Kc}{Q\rho c_p}}_{>1}}$$

- Dipendentemente da $K_c$ si riduce lo scostamento dal set point.

# Modellazione dinamica

- Le previsioni del modello confermano che al crescere di $K_c$ la costante di tempo diminuisce ed il discostamento dal set point anche diminuisce.

$$\tau^* = \frac{\tau}{\left(1 + \frac{Kc}{Q\rho c_p}\right)}$$



# Parole Chiave

- Modello dinamico.
- Input.
- Output.
- Modelli ODE Lineari.
- Trasformate di Laplace.
- Problema stazionario.
- Transitorio.
- Variabili deviate.
- Controllore proporzionale.