Trasformate di Laplace

- E' una tecnica che permette di convertire ODE **LINEARI** in equazioni algebriche (vedremo in seguito ulteriori aspetti positivi).

- DEFINIZIONE
- La trasformata di Laplace di una funzione f(t) è:

$$L\{f(t)\} = \hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$

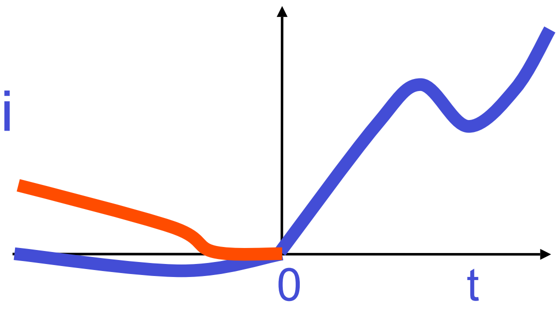
- s: parametro di trasformazione. E' un numero complesso.
- La trasformazione è una mappatura dal dominio del tempo al dominio di s

Trasformate di Laplace

- Il limite all'infinito può dare problemi di esistenza della trasformata. Perché l'integrale sia sommabile deve valere:

$$\lim_{t\to\infty} e^{-st} f(t) = 0$$

- La trasformata non contiene informazioni sul comportamento per t<0 di f(t).



Le due funzioni hanno la stessa trasformata

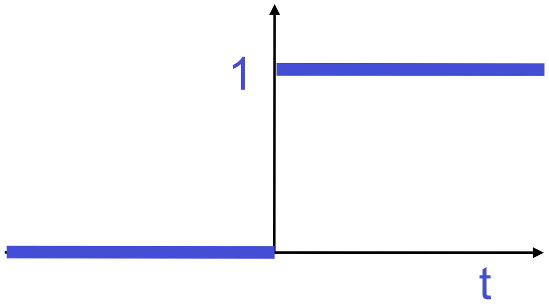
- La coppia $f(t), \hat{f}(s)$ è univoca.

- La trasformata è un operatore lineare

$$L\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 \hat{f}_1(s) + c_2 \hat{f}_2(s)$$

Trasformate di funzioni elementari

- Funzione a scalino unitario (unit step function)



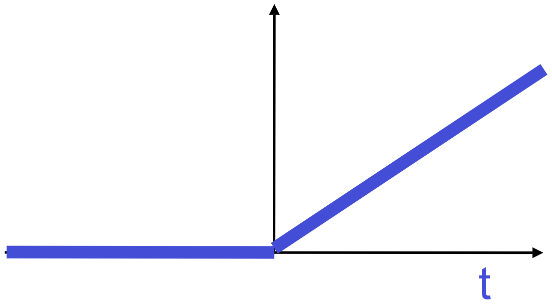
$$u(t)\begin{cases} 0 \; per \; t \leq 0 \\ 1 \; per \; t > 0 \end{cases}$$

$$L\{u(t)\} = \int_0^\infty u(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-st}dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty = \frac{1}{s}$$

- Utilità della funzione a scalino.

Trasformate di funzioni elementari

- Funzione rampa



$$f(t)\begin{cases}0\ per\ t \le 0\\ t\ per\ t > 0\end{cases}$$

$$L\{u(t)t\} = \int_0^\infty u(t)t\,e^{-st}dt = \int_0^\infty t\,e^{-st}dt = -\frac{1}{s}\int_0^\infty t\,de^{-st} =$$

$$\left[-\frac{1}{s}t\,e^{-st}\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{s^2}$$

- Integrazione per parti:

$$\int v du = \int duv - \int u\,dv$$

Trasformate di funzioni elementari

- Funzione esponenziale

$$f(t)\begin{cases} 0 \; per \; t \leq 0 \\ e^{at} \; per \; t > 0 \end{cases}$$

$$L\{u(t)e^{at}\} = \int_0^\infty u(t)e^{at}\, e^{-st}\, dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t}\, dt = \left[\frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\right]_0^\infty = \frac{1}{s-a}$$

- L'integrale esiste solo se Re(s)>a
  - a si definisce ascissa di convergenza

Trasformate di funzioni elementari

- Funzione seno

$$f(t)\begin{cases} 0 \; per \; t \le 0 \\ \sin(\omega t) \; per \; t > 0 \end{cases}$$

$$L\{u(t)\sin(\omega t)\} = \int_0^\infty u(t)\sin(\omega t)e^{-st}dt = \int_0^\infty \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} e^{-st}dt$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\int_0^\infty e^{i\omega t - st}dt - \int_0^\infty e^{-i\omega t - st}dt \right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{-1}{i\omega - s} - \frac{1}{i\omega + s} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

- Analogamente: $L\{u(t)\cos(\omega t)\} = \dfrac{s}{s^2 + \omega^2}$

Proprietà delle Trasformate

- Trasformata delle derivate

$$L\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}=\int_0^\infty \frac{d}{dt}f(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{-st}\,df$$

$$=\left[f(t)e^{-st}\right]_0^\infty-(-s)\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

$$=-f(0)+s\,\hat{f}(s)$$

$$L\left\{\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right\}=-f'(0)+s\left(-f(0)+s\hat{f}(s)\right)=s^2\hat{f}(s)-f'(0)-sf(0)$$

$$L\left\{\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right\}=s^n\hat{f}(s)-f^{n-1}(0)-sf^{n-2}(0)-\ldots-s^{n-1}f(0)$$

Proprietà delle Trasformate

- Trasformata dell'integrale

$$g(t) = \int_0^t h(\tau)\, d\tau$$

$$L\left\{\frac{d}{dt} g(t)\right\} = L\{h(t)\}$$

$$L\left\{\frac{d}{dt} g(t)\right\} = -g(0) + s\,\hat{g}(s) = \hat{h}(s)$$

$$\hat{g}(s) = \frac{\hat{h}(s)}{s} + \frac{g(0)}{s} = \frac{\hat{h}(s)}{s}$$

Teoremi utili

- Teorema del valore iniziale

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\,\hat{f}(s)$$

Dimostrazione

$$s\,\hat{f}(s) - f(0) = \int_0^\infty \frac{d}{dt} f(t) e^{-st}\, dt$$

$$\lim_{s\to\infty} s\,\hat{f}(s) - f(0) = \lim_{s\to\infty} \int_0^\infty \frac{d}{dt} f(t) e^{-st}\, dt = \int_0^\infty \lim_{s\to\infty} \frac{d}{dt} f(t) e^{-st}\, dt = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{s\to\infty} s\,\hat{f}(s) = f(0)$$

- Teorema del valore finale $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\,\hat{f}(s)$

Teoremi utili

- Teorema della traslazione della trasformata

$$L\{e^{-at} f(t)\} = \int_0^\infty e^{-at} f(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t) e^{-(a+st)} dt = \hat{f}(s+a)$$

- s viene traslato di a

ESEMPIO $$L\{e^{at}\} = L\{e^{at} u(t)\} = \int_0^\infty u(t) e^{-(-a+st)} dt = \frac{1}{s-a}$$

- Teorema inverso ovvero trasformata di una funzione traslata

$$L\{f(t-\Delta t)\} = \int_0^\infty f(t-\Delta t) e^{-st} dt = \int_0^\infty f(t-\Delta t) e^{-st} e^{-s\Delta t} e^{s\Delta t} dt$$

$$= e^{-s\Delta t} \int_{-\Delta t}^\infty f(t-\Delta t) e^{-s(t-\Delta t)} d(t-\Delta t) = e^{-s\Delta t} \hat{f}(s)$$

Parole Chiave

- Trasformata di Laplace
- Trasformata di derivate
- Trasformata di integrali
- Teoremi valore iniziale e finale
- Traslazione della trasformata
- Trasformata di una funzione traslata