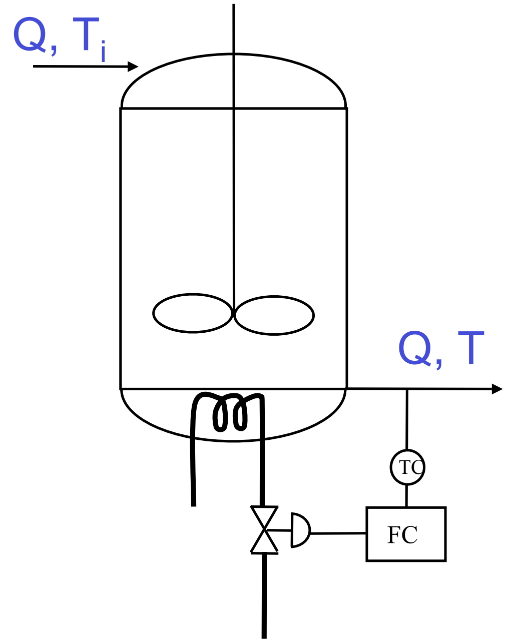
Uso delle trasformate

- Il problema dello SHT era formulato con una equazione differenziale ordinaria del primo ordine:

$$\tau \frac{d}{dt} T' + T' = \Delta T u(t), \quad @t = 0 \quad T' = 0$$



- Possiamo utilizzare le trasformate di Laplace per risolvere l'equazione.

Uso delle trasformate

- Applichiamo la trasformazione al primo ed al secondo membro della ODE

$$L\left\{\tau \frac{d}{dt}T'+T'\right\}=L\{\Delta T u(t)\}$$

$$\tau\left[s\hat{T}'-T'(0)\right]+\hat{T}'=\frac{\Delta T}{s}$$

IMPORTANTE!

VARIABILI DEVIATE!

- La condizione iniziale implica che:

$$\tau s\hat{T}'+\hat{T}'=\frac{\Delta T}{s}$$

$$(\tau s+1)\hat{T}'=\frac{\Delta T}{s}$$

- L'equazione è diventata algebrica nell'incognita T'(s).

Uso delle trasformate

- La risoluzione è elementare e fornisce nel dominio di Laplace l'incognita:

$$\hat{T}' = \frac{\Delta T}{s} \frac{1}{(\tau s + 1)}$$

- Se vogliamo conoscere la funzione T'(t) dobbiamo antitrasformare la precedente equazione. Per il momento procediamo a "mano"

$$\hat{T}' = \Delta T \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right)$$

$$T'(t) = L^{-1}\left\{\hat{T}'\right\} = L^{-1}\left\{ \Delta T \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right) \right\}$$

Uso delle trasformate

- Per ispezione possiamo antitrasformare ricordando la proprietà di linearità della trasformazione:

$$T'(t) = L^{-1}\left\{\hat{T}'\right\} = L^{-1}\left\{\Delta T\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{\tau}}\right)\right\}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = u(t), \qquad L^{-1}\left\{\frac{1}{s+\frac{1}{\tau}}\right\} = e^{-\frac{t}{\tau}}u(t)$$

$$T'(t) = \Delta T u(t)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Uso delle trasformate

- Il modo di procedere è il seguente:
  - Si trasformano le equazioni (le condizioni iniziali sono utilizzate nelle derivate)
  - Si risolve l'equazione algebrica (o il sistema di equazioni algebriche)
  - Si antitrasforma (stadio in genere difficoltoso)

- Un modo di antitrasformare efficiente passa per una espansione in fratti semplici. Infatti in genere si perviene a problemi posti nella forma:

$$x(s)=\frac{Q(s)}{P(s)}$$

- Dove Q e P sono polinomi di grado q e p con p>q (in genere)

Uso delle trasformate

- Il rapporto tra polinomi può essere espanso in fratti semplici:

$$\frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{c_1}{r_1(s)} + \frac{c_2}{r_2(s)} + \ldots + \frac{c_p}{r_p(s)}$$

  - r_i sono polinomi di grado basso 1,2

- Per poter procedere si devono determinare le costanti c_i e poi antitrasformare.

- Le radici di P(s) hanno importanza nel determinare il tipo di funzione x(t) nel dominio del tempo.

Uso delle trasformate

- Radici reali e distinte

$$x(s)=\frac{s^2-s-6}{s^3-2s^2-s+2}$$

$$P(s)=s^3-2s^2-s+2=(s-1)(s+1)(s-2)$$

$$x(s)=\frac{s^2-s-6}{(s-1)(s+1)(s-2)}=\frac{c_1}{s-1}+\frac{c_2}{s+1}+\frac{c_3}{s-2}$$

- Quando antitrasformiamo

$$x(t)=L^{-1}\left\{\frac{c_1}{s-1}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{c_2}{s+1}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{c_3}{s-2}\right\}=c_1u(t)e^{t}+c_2u(t)e^{-t}+c_3u(t)e^{2t}$$

- Sono tutti esponenziali

Uso delle trasformate

- Per determinare le costanti:

$$\frac{s^2-s-6}{(s-1)(s+1)(s-2)}=\frac{c_1}{s-1}+\frac{c_2}{s+1}+\frac{c_3}{s-2}$$

  - Moltiplichiamo ambo i membri per (s-1)

$$\frac{s^2-s-6}{(s+1)(s-2)}=c_1+\frac{c_2(s-1)}{s+1}+\frac{c_3(s-1)}{s-2}$$

  - L'uguaglianza deve valere per ogni s. Scelgo s=1, quindi

$$3=c_1$$

  - Procedendo in maniera analoga ottengo: $c_2=-\frac{2}{3},\ c_3=-\frac{4}{3}$

$$x(t)=\left(3e^t-\frac{2}{3}e^{-t}-\frac{4}{3}e^{2t}\right)u(t)$$

Uso delle trasformate

- Radici complesse e distinte

$$x(s)=\frac{s+1}{s^2-2s+5}$$
$$P(s)=s^2-2s+5=\left[s-(1+2i)\right]\left[s-(1-2i)\right]$$

$$x(s)=\frac{s+1}{s^2-2s+5}=\frac{c_1}{s-(1+2i)}+\frac{c_2}{s-(1-2i)}$$

- Procediamo in modo identico al precedente

$$c_1=\frac{1-i}{2},\ \ c_2=\frac{1+i}{2}$$

- NB: Anche i coefficienti sono complessi e coniugati

Uso delle trasformate

- Si ottiene:

$$x(t) = \left(\frac{1-i}{2} e^{(1+2i)t} + \frac{1+i}{2} e^{(1-2i)t} \right) u(t) = \frac{e^t}{2} \left[(1-i) e^{2it} + (1+i) e^{-2it} \right] u(t)$$

- Conviene manipolare la soluzione:

$$e^{\pm i\alpha} = \cos\alpha \pm i \sin\alpha$$

$$x(t) = e^t \left[\cos 2t + \sin 2t \right] u(t)$$

$$a_1 \cos\alpha t + a_2 \sin\alpha t = b \sin(\alpha t + \phi)$$

$$b = \sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2}} \quad e \quad \phi = \arctan\left(\frac{a_1}{a_2} \right)$$

- Quindi: $$x(t) = \sqrt{2}\, e^t \sin\left(2t + \frac{\pi}{4} \right) u(t)$$

- NB: radici complesse implica risposta con andamento periodico

Uso delle trasformate

- Radici multiple

$$x(s) = \frac{1}{(s+1)^3 (s+2)}$$

$$x(s) = \frac{1}{(s+1)^3 (s+2)} = \frac{c_1}{s+1} + \frac{c_2}{(s+1)^2} + \frac{c_3}{(s+1)^3} + \frac{c_4}{s+2}$$

- c_4 si determina al solito modo: $c_4 = -1$
- Poi moltiplichiamo per $(s+1)^3$:

$$\frac{1}{(s+2)} = c_1 (s+1)^2 + c_2 (s+1) + c_3 + \frac{c_4 (s+1)^3}{(s+2)}$$

- Ponendo s=-1 si ricava c_3: $c_3 = 1$

Uso delle trasformate

- Per determinare le altre costanti dobbiamo procedere diversamente per evitare infiniti.

- Deriviamo rispetto ad s la seguente equazione:

$$\frac{1}{(s+2)} = c_1 (s+1)^2 + c_2 (s+1) + c_3 + \frac{c_4 (s+1)^3}{(s+2)}$$

$$-\frac{1}{(s+2)^2} = 2c_1 (s+1) + c_2 + \frac{c_4 (s+1)^2 (2s+5)}{(s+2)^2}$$

- Ponendo s=-1 si ricava c_2: $c_2 = -1$
- Differenziando nuovamente si ottiene c_1: $c_1 = 1$

Uso delle trasformate

- Quindi si ricava x(t):

$$x(t) = e^{-t}\left(1 - t + \frac{1}{2}t^2\right)u(t) - e^{-2t}u(t)$$

Uso delle trasformate

- Riassumiamo alcune proprietà:
  - Radici reali e distinte: esponenziali
    - Radici negative esponenziali negativi
    - Radici positive esponenziali positivi
  - Radici complesse coniugate: funzioni periodiche
    - Radici con parte reale negativa risposte oscillatorie non divergenti
    - Radici con parte reale positiva risposte oscillatorie divergenti
    - Radici immaginarie risposte periodiche
  - Radici multiple: esponenziali moltiplicati per t^n
    - Radici negative esponenziali negativi
    - Radici positive esponenziali positivi