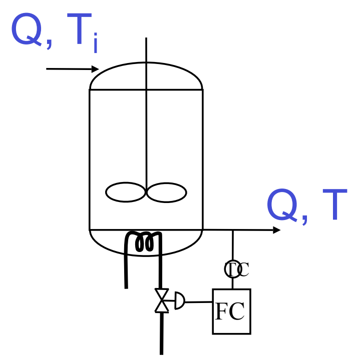
La funzione di trasferimento

- Sommario
  - La funzione di trasferimento
  - Poli e zeri della funzione di trasferimento
  - I sistemi del primo ordine
    - Esempi
    - La risposta a sollecitazioni

La funzione di trasferimento

- Riscaldatore a perfetta miscelazione.



$$\tau \frac{d}{dt} T' + T' = T_i' \, u(t)$$

$$@ \, t = 0 \quad T' = 0$$

- In generale il disturbo ha la forma: $T_i' = f(t) \, u(t)$
  - Nel caso già esaminato la f(t) era una costante.

- Trasformando si ottiene: $\tau s \hat{T}' + \hat{T}' = \hat{f}$
  - E quindi: $(\tau s + 1) \hat{T}' = \hat{f}$

La funzione di trasferimento

- Nel dominio di Laplace il problema consta in una equazione algebrica la cui incognita è la trasformata della funzione incognita originaria T'(t).

- Ulteriormente manipolando si perviene alla seguente equazione:

$$\hat{T}' = \boxed{\frac{1}{(\tau s + 1)}}\, \hat{f}$$

Funzione di trasferimento

- La risposta del sistema alla sollecitazione deriva dal prodotto di due funzioni:
  - Una funzione dipende dalla dinamica intrinseca e si chiama FUNZIONE DI TRASFERIMENTO: $G(s)$
  - L'altra rappresenta l'effetto del forzamento (INPUT)

La funzione di trasferimento

- La funzione di trasferimento lega in forma algebrica l'Input all'Output

$$\frac{\hat{T}'}{\hat{f}} = G(s)$$

- La funzione di trasferimento è il rapporto tra la trasformata dell'output deviato e la trasformata dell'input deviato.

- A questo punto possiamo schematizzare il sistema in modo grafico facendo uso dei DIAGRAMMI A BLOCCHI.

La funzione di trasferimento

- In questo modo di procedere gli Input e gli Output sono visti come segnali ed il processo è trattato come una macchinetta che riceve Input dall'esterno e produce Output secondo la sua dinamica intrinseca (G(s))

- Nel caso di un Singolo Input ed un Singolo Output (SISO) si ha:

- Il modello è "orientato"

La funzione di trasferimento

- Se il sistema ha più Input ed un Singolo Output (MISO) si ha:

- Come vedremo si può operare sui diagrammi a blocchi in maniera analoga a quanto si fa sulle equazioni. (IMPORTANTE: I PROCESSI SONO RAPPRESENTATI DA EQUAZIONI LINEARI)

La funzione di trasferimento

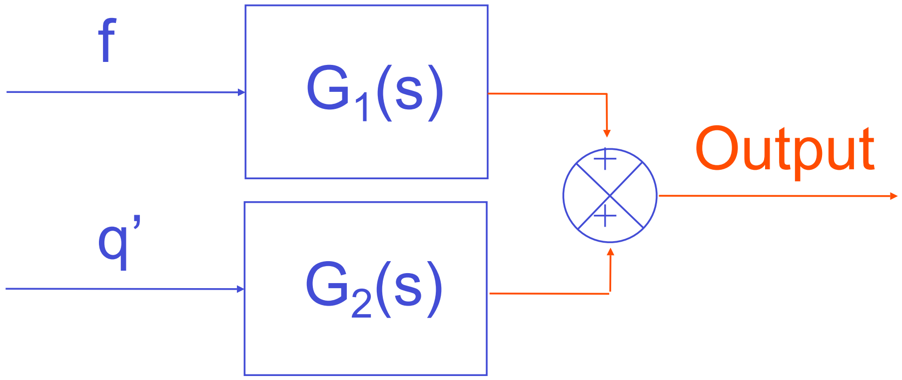
- Riscaldatore a perfetta miscelazione controllato:

$$\tau \frac{d}{dt} T' + T' = f(t) u(t) + \frac{1}{Q \rho c_p} q' u(t)$$

$$@ t = 0 \quad T' = 0$$

- Trasformando e manipolando otteniamo:

$$\hat{T}' = \frac{1}{(\tau s + 1)} \hat{f} + \frac{1}{Q \rho c_p} \frac{1}{(\tau s + 1)} \hat{q}'$$



La funzione di trasferimento

- Consideriamo il caso più semplice:

$$\hat{T}' = G(s)\hat{f}$$

- La dinamica del sistema dipende dal prodotto tra G e f.

- Nei problemi che affronteremo G ha la forma di un rapporto tra due polinomi in s, ed altrettanto vale per f:

$$\hat{x}' = \underbrace{\frac{Q(s)}{P(s)}}_{\boxed{G(s)}}\underbrace{\frac{n(s)}{d(s)}}_{\boxed{f(s)}}$$

La funzione di trasferimento

- D'altra parte per ottenere la risposta nel dominio del tempo dobbiamo antitrasformare.
- Da quanto abbiamo già visto, quindi, le proprietà della funzione nel dominio del tempo dipendono dalle radici del denominatore (POLI) della funzione di trasferimento e dal tipo di input.
- A caratterizzare la natura di un sistema c'è quindi la funzione di trasferimento.
- Sistemi molto diversi fisicamente possono avere funzioni di trasferimento dello stesso tipo

La funzione di trasferimento

- E' molto utile caratterizzare la dinamica di un sistema semplicemente analizzando la sua funzione di trasferimento.

Sistemi del I ordine

- Un sistema del primo ordine è caratterizzato nel dominio del tempo da un modello del tipo:

$$\tau \frac{dy'}{dt} + y' = Kf(t)$$

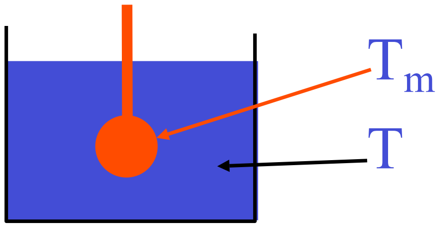
- Trasformando si ottiene:

$$\hat{y}'(s) = \frac{K}{\tau s + 1} \hat{f}(s) \qquad G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

- Funzione di trasferimento con due parametri
  - La costante di tempo τ
  - La costante di guadagno K

Esempi di Sistemi del I ordine

- Il termometro



- Ipotesi modellistiche
  - Tutta la massa e la capacità termica del mercurio è concentrata nel bulbo;
  - Non c'è conduzione nell'asta

- Bilancio energetico sul bulbo

$$\frac{d}{dt}\left[mc\left(T_m - T_{rif}\right)\right] = hA\left(T - T_m\right)$$

Esempi di Sistemi del I ordine

- Il termometro
  - La temperatura del bagno è la forzante

- Ipotesi
  - Proprietà mercurio costanti

Costante di tempo

$$\frac{mc}{hA}\frac{d}{dt}T_m = (T - T_m)$$

- Soluzione stazionaria: $T_{ms}=T_s$

- Variabile deviate: $T_m'=T_m-T_{ms}$, $T'=T-T_s$.

Esempi di Sistemi del I ordine

- Modello in variabili deviate:

$$\tau \frac{d}{dt} T_m^{'} = \left(T^{'} - T_m^{'} \right), \qquad @\, t = 0 \; T_m^{'} = 0$$

- Nelle ipotesi fatte come posso ottenere un termometro pronto?

- Trasformiamo:

$$\tau s \hat{T}_m^{'} = \left(\hat{T}^{'} - \hat{T}_m^{'} \right)$$

$$\hat{T}_m^{'} = \frac{1}{\tau s + 1} \hat{T}^{'}$$

- NB:
  - Input e Output dimensionalmente omogenei
  - K=1 perché non c'è generazione

Esempi di Sistemi del I ordine

- CSTR A$\rightarrow$B in fase liquida con cinetica lineare e isotermo

- Ipotesi
  - Livello liquido nel CSTR costante: portata in ingresso = portata in uscita. Il bilancio di materia globale è inutile.

- Bilancio di materia sul componente A

$$V\frac{d}{dt}C_{Au} = F\left(C_{Ai} - C_{Au}\right) - VkC_{Au}, \qquad @t = 0\ C_{Au} = C_{Aus}$$

$$\frac{V}{F}\frac{d}{dt}C_{Au} = \left(C_{Ai} - C_{Au}\right) - \frac{V}{F}kC_{Au}$$

Esempi di Sistemi del I ordine

- In variabili deviate:

$$\frac{V}{F}\frac{d}{dt}C'_{Au}+\left(1+\frac{V}{F}k\right)C'_{Au}=C'_{Ai}, \qquad @t=0\ C'_{Au}=0$$

$$\frac{V}{\left(1+\frac{V}{F}k\right)F}\frac{d}{dt}C'_{Au}+C'_{Au}=\frac{1}{\left(1+\frac{V}{F}k\right)}C'_{Ai}, \quad @t=0\ C'_{Au}=0$$

- Definendo le costanti del sistema si ottiene

$$\tau\frac{d}{dt}C'_{Au}+C'_{Au}=KC'_{Ai}, \qquad @t=0\ C'_{Au}=0$$

$$\tau=\frac{V}{\left(1+\frac{V}{F}k\right)F}, \qquad K=\frac{1}{\left(1+\frac{V}{F}k\right)}$$

Esempi di Sistemi del I ordine

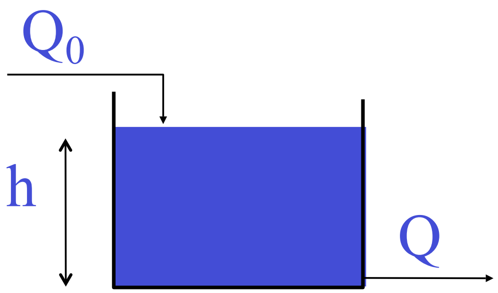
- Trasformando:

$$\hat{C}'_{Au}(s) = \frac{K}{\tau s + 1}\hat{C}'_{Ai}$$

- NB:
  - Input ed output dimensionalmente omogenei;
  - K non unitaria perché c'è il termine di generazione.

Esempi di Sistemi del I ordine

- Serbatoio



- Base del serbatoio A
- Bilancio di materia:

$$\rho \frac{d}{dt}(Ah) = \rho (Q_0 - Q), \qquad @t = 0 \; h = h_s$$

- La portata uscente dipende dal battente e dalle resistenze idrauliche:

$$Q \propto \sqrt{h} \quad \text{Problemi?}$$
$$Q = \frac{1}{R} h \quad \text{Linearizzato}$$

Esempi di Sistemi del I ordine

- Serbatoio

$$A\frac{d}{dt}h = Q_0 - \frac{1}{R}h, \qquad @t = 0\ h = h_s$$

- Variabili deviate:

$$AR\frac{d}{dt}h' + h' = RQ_0, \quad @t = 0\ h' = 0$$

- Trasformando

$$\hat{h}'(s) = \frac{K}{\tau s + 1} Q'_0$$

$$\tau = AR, \qquad K = R$$

- NB:
  - Input e output non omogenei
  - Perché K non unitaria?

Esempi di Sistemi del I ordine

- Linearizzazione

$$A\frac{d}{dt}h = Q_0 - Q, \qquad @t = 0\ h = h_s$$

- La portata in uscita è: $Q = c\sqrt{h}$
- Allo stazionario quindi: $Q_{0s} = c\sqrt{h_s}$
- Espandiamo in serie di Taylor la Q intorno allo stazionario e tronchiamo al I ordine:

$$\sqrt{h} = \sqrt{h_S} + \frac{1}{2\sqrt{h_S}}(h - h_s)$$

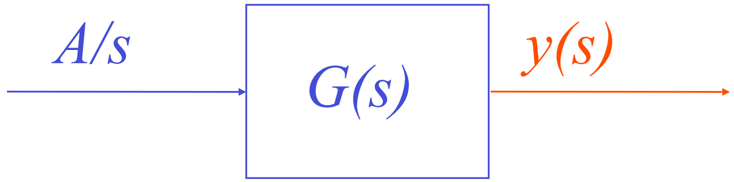
- Quindi:

$$A\frac{d}{dt}h = Q_0 - c\left[\sqrt{h_S} + \frac{1}{2\sqrt{h_S}}(h - h_s)\right]$$

$$A\frac{d}{dt}h' = Q'_0 - c\frac{1}{2\sqrt{h_S}}h'$$

Dinamica dei Sistemi del I ordine

- Risposta a step



$$y(s) = \frac{K}{\tau s + 1}\frac{A}{s} = AK\left(\frac{1}{s} - \frac{\tau}{\tau s + 1}\right)$$

- Risposta a tempi lunghi (Teor. Val. Fin.)

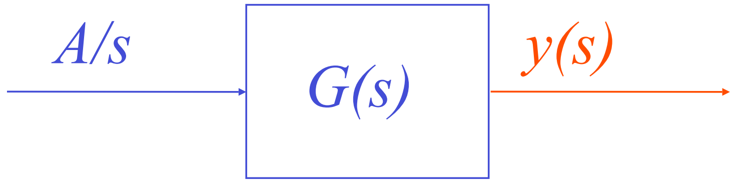
$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sy(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{A}{s}\frac{K}{\tau s + 1} = AK$$

- Pendenza iniziale della risposta (Teor. Val. In.)

$$\lim_{t\to 0}\frac{dy}{dt} = \lim_{s\to\infty} s\left(sy(s)\right) = \lim_{s\to\infty} s^2\frac{A}{s}\frac{K}{\tau s + 1} = \frac{AK}{\tau}$$

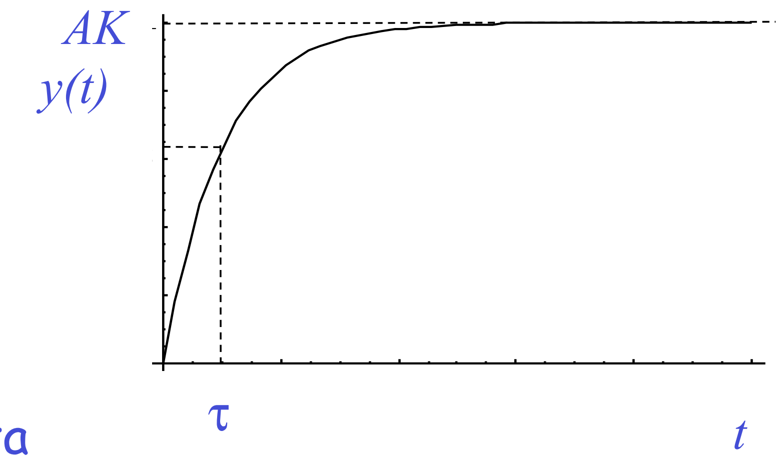
Dinamica dei Sistemi del I ordine

- Risposta a step



- Antitrasformando

$$y(t) = AK\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right)u\left(t\right)$$



- K: “grandezza” della risposta
- τ: velocità della risposta