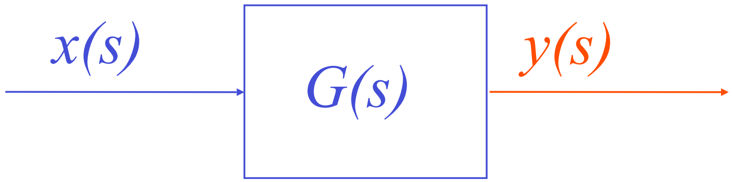
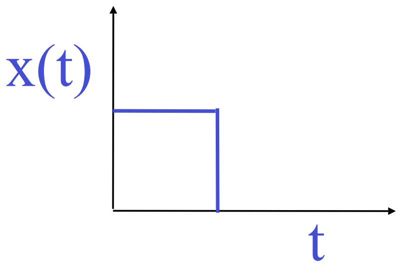
Dinamica dei Sistemi del I ordine

- Risposta a impulso quadro



$$x(s) = \frac{A}{s}\left(1 - e^{-bs}\right)$$



$$y(s) = \frac{K}{\tau s + 1}\frac{A}{s}\left(1 - e^{-bs}\right)$$

- Comportamento a tempi lunghi

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s y(s) = \lim_{s\to 0} s \frac{K}{\tau s + 1}\frac{A}{s}\left(1 - e^{-bs}\right) = 0$$

Dinamica dei Sistemi del I ordine

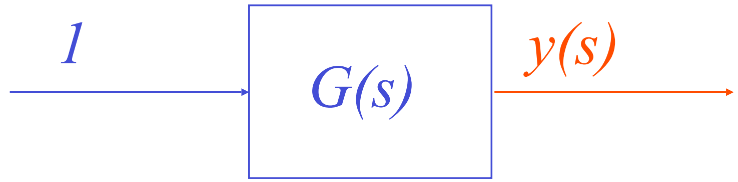
- Antitrasformando

$$y(t) = AK\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u(t) - AK\left(1 - e^{-\frac{t-b}{\tau}}\right)u(t-b)$$

- Fino al tempo b il sistema risponde come se fosse sollecitato a gradino.

Dinamica dei Sistemi del I ordine

- Risposta a impulso di Dirac



$$y(s)=\frac{K}{\tau s+1}$$

- La risposta è l'antitrasformata della funzione di trasferimento.

$$y(t)=\frac{K}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

- Comportamento a tempi lunghi

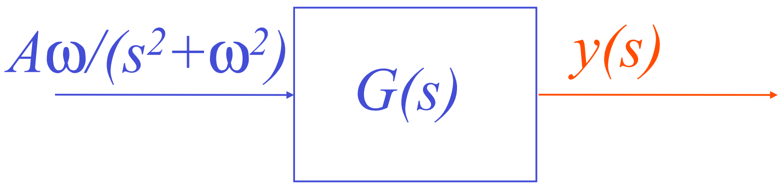
$$\lim_{t\to\infty} y(t)=\lim_{s\to 0} s y(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{K}{\tau s+1}=0$$

- Comportamento a tempi brevi

$$\lim_{t\to 0} y(t)=\lim_{s\to\infty} s y(s)=\lim_{s\to\infty} s\frac{K}{\tau s+1}=\frac{K}{\tau}$$

Dinamica dei Sistemi del I ordine

- Risposta a sollecitazione seno



$$x(t) = A\sin(\omega t)$$

$$y(s) = \frac{K}{\tau s+1}\frac{A\omega}{\left(s^2+\omega^2\right)}$$

- Risposta

$$y(t) = \frac{KA\omega\tau}{1+\tau^2\omega^2}e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{KA}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}\sin\left[\omega t + \tan^{-1}(-\tau\omega)\right]$$

- Il primo termine decade al crescere di t mentre il secondo persiste.

- Dopo il transitorio che dura 4-5τ la risposta è sinusoidale: Ultimate Periodic Response

Dinamica dei Sistemi del I ordine

- La risposta ultima ha:
  - Stessa frequenza della forzante
  - Sfasamento rispetto alla forzante che dipende dalla frequenza della sollecitazione e dal sistema del primo ordine
    - Sfasamento

$$\phi = \tan^{-1}(-\tau\omega)$$

  - Ampiezza diversa dalla forzante che dipende dalla frequenza della forzante e dalle proprietà del sistema del primo ordine
    - Amplitude ratio

$$AR = \frac{K}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}}$$

  - Lo studio di come variano AR e ϕ sarà importante per il controllo.

Dinamica dei Sistemi del I ordine

- Sistemi di puro guadagno (resistori, molle meccaniche, controllore proporzionale)

$$G(s) = K$$

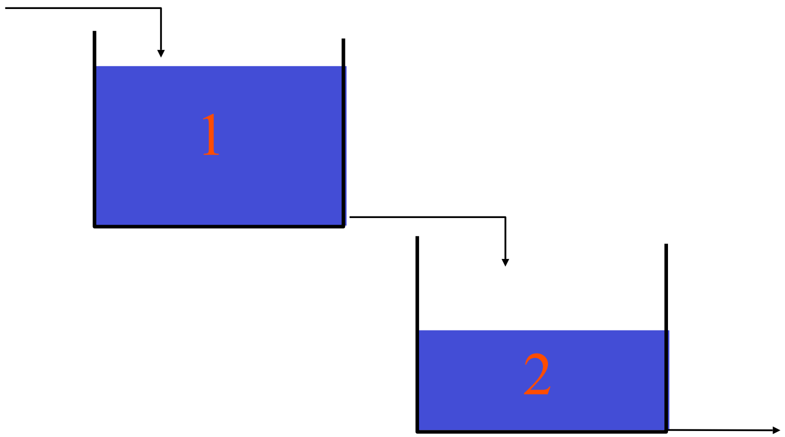
- Sistemi di pura capacità (batch, riempimento recipiente chiuso, preparazione soluzioni in batch)

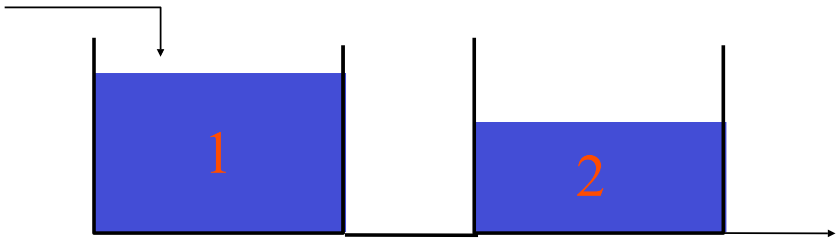
$$G(s) = \frac{K}{s}$$

  - Indipendentemente dal tipo di input la risposta è ottenibile per integrazione diretta (tali sistemi si chiamano anche integratori puri)

$$y(t) = K * \int_0^t f(m)\,dm$$

Sistemi del I ordine in serie





- Sistemi non interagenti
  - La dinamica del primo non dipende dalla dinamica del secondo serbatoio
- Sistemi interagenti
  - La dinamica del primo dipende dalla dinamica del secondo serbatoio

Dinamica dei Sistemi del I ordine in serie non interagenti

- Bilanci di materia

$$\begin{cases} A_1 \dfrac{d}{dt} h_1 = Q_0 - Q_1 & @t = 0 \ h_1 = h_{1s} \\ A_2 \dfrac{d}{dt} h_2 = Q_1 - Q_2 & @t = 0 \ h_2 = h_{2s} \end{cases}$$

$$h_1 = R_1 Q_1, \ h_2 = R_2 Q_2,$$

- In variabili deviate:

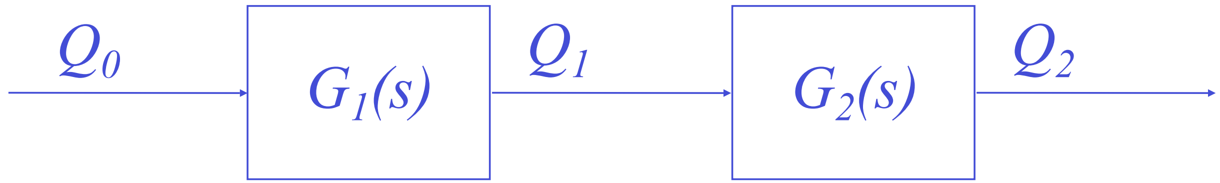
$$\begin{cases} A_1 R_1 \dfrac{d}{dt} Q'_1 = Q'_0 - Q'_1 & @t = 0 \ Q'_1 = 0 \\ A_2 R_2 \dfrac{d}{dt} Q'_2 = Q'_1 - Q'_2 & @t = 0 \ Q'_2 = 0 \end{cases}$$

Dinamica dei Sistemi del I ordine in serie non interagenti

- Il sistema di equazioni differenziali è disaccoppiato. Posso risolvere la prima equazione indipendentemente dalla seconda. Analogamente, trasformando:

$$\begin{cases} (\tau_1 s + 1) Q'_1 = Q'_0 \\ (\tau_2 s + 1) Q'_2 = Q'_1 \end{cases}$$

$$\tau_1 = A_1 R_1, \qquad \tau_2 = A_2 R_2$$



Dinamica dei Sistemi del I ordine in serie non interagenti

- Se consideriamo il sistema globalmente:

$$G = \frac{Q_2}{Q_0} = \frac{Q_1}{Q_0}\frac{Q_2}{Q_1} = G_1 G_2 = \frac{1}{\tau_1 s + 1}\frac{1}{\tau_2 s + 1}$$

- Il sistema non è più del I ordine. E' diventato qualcosa di diverso.

- Si tratta di un sistema del II ordine

Dinamica dei Sistemi del I ordine in serie interagenti

- Bilanci di materia:

$$\begin{cases} A_1 \dfrac{d}{dt} h_1 = Q_0 - Q_1 & @\, t=0 \;\; h_1 = h_{1s} \\ A_2 \dfrac{d}{dt} h_2 = Q_1 - Q_2 & @\, t=0 \;\; h_2 = h_{2s} \end{cases}$$

$$Q_1 = \frac{h_1}{R_1} - \frac{h_2}{R_1}, \qquad Q_2 = \frac{h_2}{R_2}$$

$$\begin{cases} A_1 \dfrac{d}{dt} h_1 = Q_0 - \dfrac{h_1 - h_2}{R_1} \\ A_2 \dfrac{d}{dt} h_2 = \dfrac{h_1 - h_2}{R_1} - \dfrac{h_2}{R_2} \end{cases}$$

Dinamica dei Sistemi del I ordine in serie interagenti

- In variabili deviate e trasformando:

$$\begin{cases} (\tau_1 s+1)h'_1 - h'_2 = Q_0 R_1 \\ -\dfrac{R_2}{R_1}h'_1 + \left(\tau_2 s + 1 + \dfrac{R_2}{R_1}\right)h'_2 = 0 \end{cases}$$

- In questo caso le due equazioni sono accoppiate.

- In termini globali possiamo ricavare:

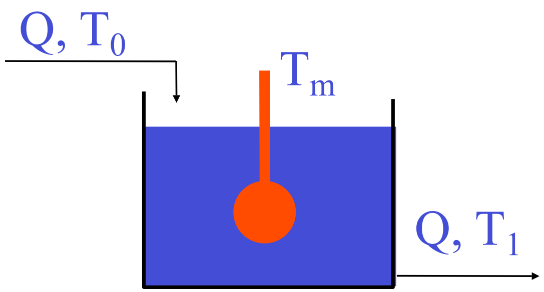
$$G = \frac{h'_2}{Q_0} = \frac{1}{\tau_1\tau_2 s^2 + (\tau_1 + \tau_2 + A_1R_2)s + 1}$$

Parametro di interazione

$$G \neq G_1 G_2$$

Dinamica dei Sistemi del I ordine accoppiati

- Possiamo anche comporre sistemi del I ordine in altro modo. Per esempio: termometro e bagno



$$\begin{cases} V\rho c_P \dfrac{d}{dt}T_1 = Q\rho c_P\left(T_0 - T_1\right) - hA\left(T_1 - T_m\right) & @t=0 \;\; T_1 = T_{1s} \\ mc\dfrac{d}{dt}T_m = hA\left(T_1 - T_m\right) & @t=0 \;\; T_m = T_{ms} \end{cases}$$

Dinamica dei Sistemi del I ordine accoppiati

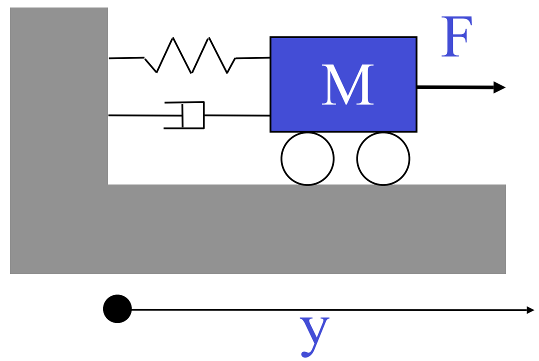
- Se nel bilancio relativo al bagno trascuriamo la quantità di calore assorbita dal termometro i due sistemi del I ordine sono non interagenti, altrimenti i due sistemi sono interagenti.

- L'accoppiamento di due sistemi del I ordine determina un sistema del II ordine.

- La funzione di trasferimento del sistema del II ordine ha un polinomio di grado zero al numeratore ed un polinomio di secondo grado al denominatore

Sistemi del II ordine

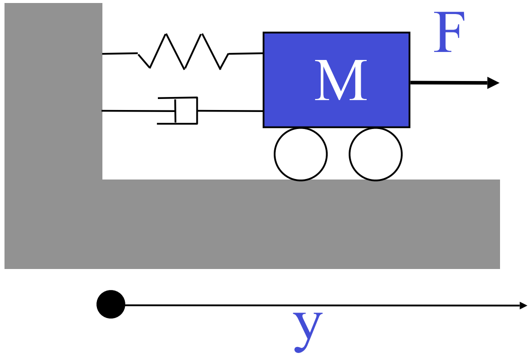
- Sistemi intrinsecamente del II ordine



- Sistema in quiete per $t=0$ quindi applichiamo una forza $F(t)$.

- Il modello è un bilancio di forze

Sistemi del II ordine



- Bilancio di forze lungo y (Newton).

$$Ma = \sum F$$

- Forza di richiamo elastico: Hy
- Smorzamento viscoso: $C\frac{dy}{dt}$

$$M\frac{d^2y}{dt^2} = F(t) - Hy - C\frac{dy}{dt}, \quad @t = 0 \; y = 0 \; \frac{dy}{dt} = 0$$

- Date le condizioni iniziali il modello è già scritto in variabili deviate. Possiamo trasformarlo.

Sistemi del II ordine

$$\underbrace{\frac{M}{H}}_{\tau^2}\frac{d^2y}{dt^2}+\underbrace{\frac{C}{H}}_{2\zeta\tau}\frac{dy}{dt}+y=\underbrace{\frac{1}{H}}_{K}F(t)$$

- Trasformando: $\tau^2 s^2\hat{y}+2\zeta\tau s\hat{y}+\hat{y}=K\hat{F}$

$$\frac{\hat{y}}{\hat{F}}=\frac{K}{\tau^2 s^2+2\zeta\tau s+1}$$

- Questa è la forma canonica della funzione di trasferimento di un sistema del II ordine

Sistemi del II ordine

- Nomenclatura di un sistema del II ordine

$$G = \frac{K}{\tau s^2 + 2\zeta\tau s + 1}$$

- K: costante di guadagno
- τ: periodo naturale
- ζ: coefficiente di smorzamento