Risposta di Sistemi del II ordine

- Sollecitazione a gradino

$$y = \frac{A}{s}\frac{K}{\left(\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1\right)}$$

- Comportamento a tempi lunghi:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = AK$$

- Pendenza iniziale:

$$\lim_{t\to 0}\frac{d}{dt}y(t) = \lim_{s\to\infty} s^2\,\frac{A}{s}\frac{K}{\left(\tau s^2 + 2\zeta\tau s + 1\right)} = 0$$

- La risposta parte con tangente orizzontale

Risposta di Sistemi del II ordine

- Sollecitazione a gradino

$$y = \frac{A}{s}\frac{K}{\left(\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1\right)}$$

- Antitrasformando otteremo qualcosa del tipo:

$$y(t) = C_0 + C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}$$

- dove r_1 ed r_2 sono i poli di G

- Il tipo di polo dipende da ζ:

$$r_{1,2} = -\frac{\zeta}{\tau} \pm \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau}$$

Risposta di Sistemi del II ordine

1. $0 < \zeta < 1$: 2 radici complesse e coniugate
2. $\zeta = 1$: 2 radici multiple reali
3. $\zeta > 1$: 2 radici reali e distinte

- Caso 1: sottosmorzato (underdamped)
  - Sinusoide smorzata

$$y(t) = AK\left[1 - \frac{1}{\beta} e^{-\frac{\zeta}{\tau}t} \sin\left(\frac{\beta}{\tau}t + \phi\right)\right]$$

$$\beta = \sqrt{\left|\zeta^2 - 1\right|},$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\beta}{\zeta}\right)$$

Risposta di Sistemi del II ordine

- Caso 2: criticamente smorzato

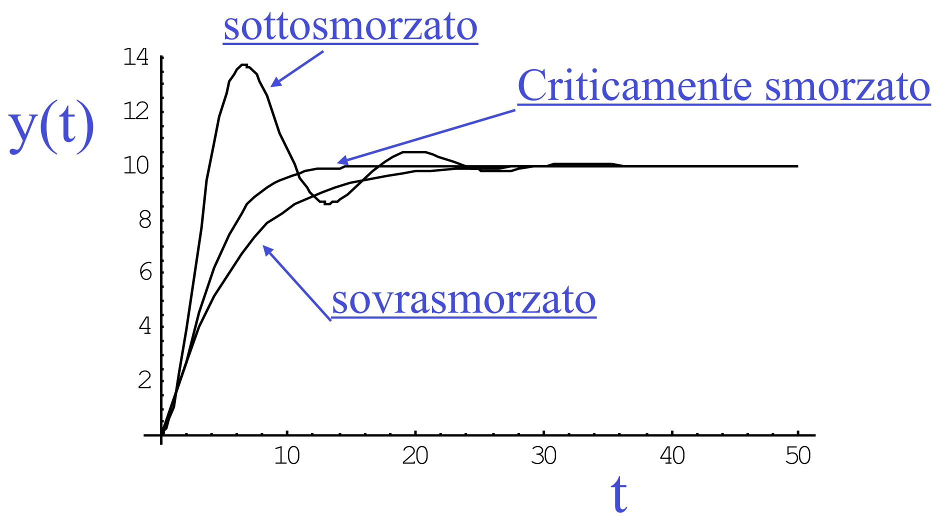
$$y(t) = AK\left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)e^{-\frac{1}{\tau}t}\right]$$

- Caso 3: sovrasmorzato (overdamped)

$$y(t) = AK\left[1 - e^{-\frac{\zeta}{\tau}t}\left(\cosh\frac{\beta}{\tau}t + \frac{\zeta}{\beta}\sinh\frac{\beta}{\tau}t\right)\right]$$

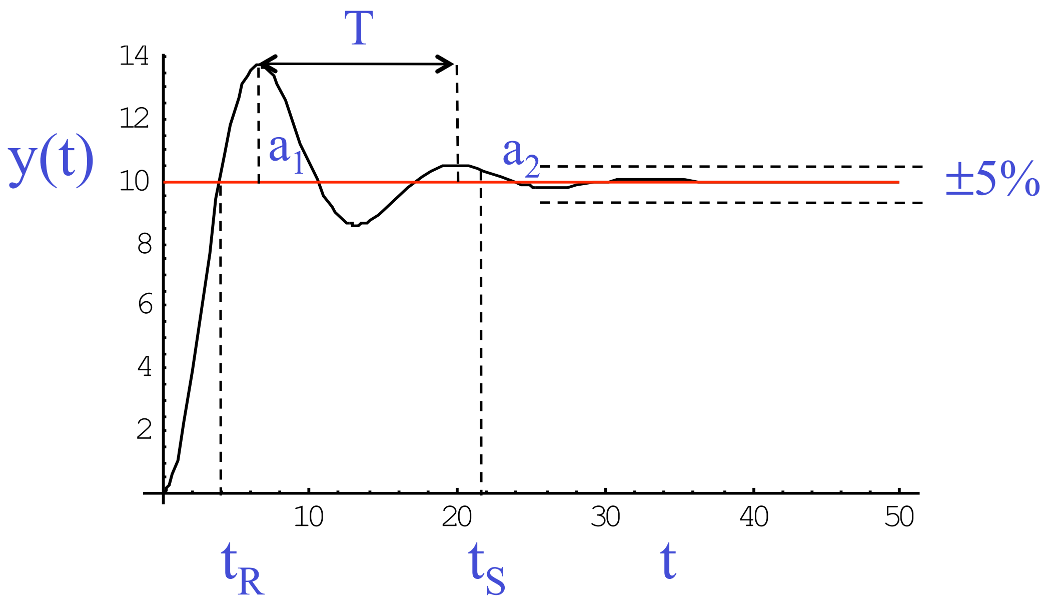
Risposta di Sistemi del II ordine

- Le risposte sono:



- Nel caso sottosmorzato la risposta supera durante il transitorio il valore a tempi lunghi.

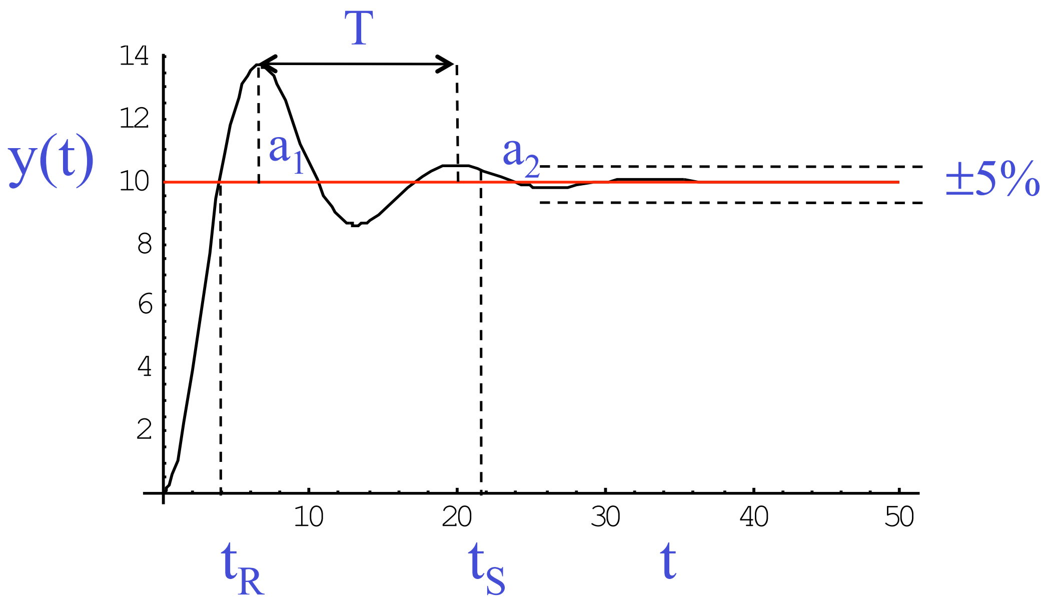
Risposta di Sistemi del II ordine



- Parametri caratteristici della risposta sottosmorzata:
  - t_R Tempo di risalita (rise time) tempo necessario a raggiungere AK la prima volta $t_R = \frac{\tau}{\beta}[\pi - \phi]$
  - a_1 Overshoot $a_1 = AK \exp\left[-\frac{\pi\zeta}{\beta}\right], \quad t = \frac{\pi\tau}{\beta}$

$$\frac{a_2}{a_1} = AK \exp\left[-\frac{2\pi\zeta}{\beta}\right]$$

Risposta di Sistemi del II ordine



- Parametri caratteristici della risposta sottosmorzata:
  - T Periodo $T = \dfrac{2\pi\tau}{\beta}$, $\quad Frequenza = \dfrac{\beta}{\tau}$
  - t_s Tempo di assestamento (settling time)

Risposta di Sistemi del II ordine

- Risposta ad una sollecitazione ad impulso

- La risposta è la derivata della risposta a gradino infatti:

$$y_{step}(s) = \frac{1}{s} G(s)$$ A gradino unitario

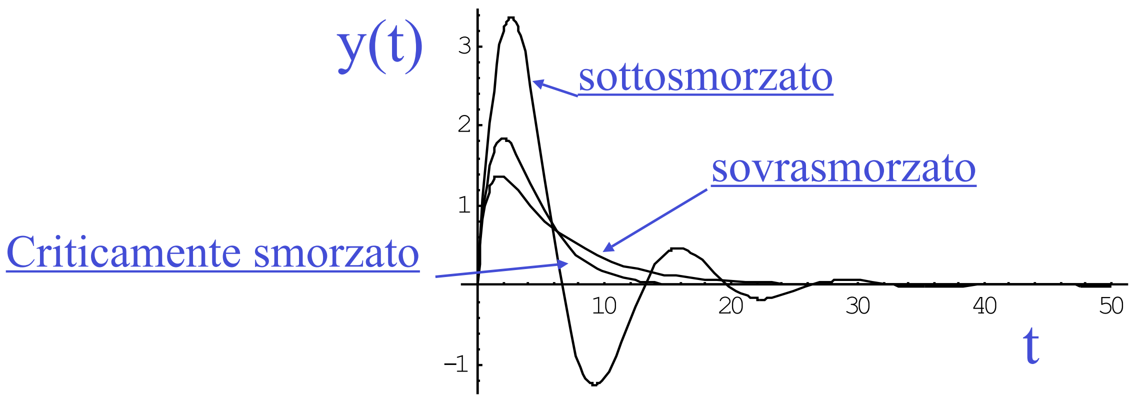
$$y_{imp}(s) = 1 G(s)$$ A impulso

$$s\, y_{step} + y(0) = y_{imp}$$

$$y_{imp}(s) = L\left\{ \frac{dy_{step}}{dt} \right\}$$ ® $$y_{imp}(t) = \frac{dy_{step}}{dt}$$

Risposta di Sistemi del II ordine

- Quindi nei tre casi le risposte sono:
  - Sottosmorzata: $y(t) = K \frac{1}{\beta\tau} e^{-\frac{\zeta}{\tau}t} \sin\left(\frac{\beta}{\tau}t\right)$
  - Criticamente smorzata: $y(t) = \frac{K}{\tau^2} t\, e^{-\frac{1}{\tau}t}$
  - Sovrasmorzata: $y(t) = \frac{K}{\beta\tau} e^{-\frac{\zeta}{\tau}t} \sinh\frac{\beta}{\tau}t$



Risposta di Sistemi del II ordine

- Risposta in frequenza: $$y(S)=\frac{A\omega}{s^2+\omega^2}G$$
  - Rifrasando: $$y(S)=\frac{AK\omega}{\tau^2}\frac{1}{(s+i\omega)(s-i\omega)(s-r_1)(s-r_2)}$$

- Abbiamo nuovamente tre casi:
  - 0<ζ<1 4 radici complesse coniugate
$$y(t)=P_1\cos\omega t+P_2\sin\omega t+e^{-\frac{\zeta}{\tau}t}\left[P_3\cos\frac{\beta t}{\tau}+P_4\sin\frac{\beta t}{\tau}\right]$$
  - ζ=1 2 radici complesse e coniugate e 2 reali e coincidenti
$$y(t)=P_1\cos\omega t+P_2\sin\omega t+Q_3e^{-\frac{1}{\tau}t}\left[1+\frac{t}{\tau}\right]$$
$$y(t)=P_1\cos\omega t+P_2\sin\omega t+e^{-\frac{\zeta}{\tau}t}\left[R_3\cosh\frac{\beta t}{\tau}+R_4\sinh\frac{\beta t}{\tau}\right]$$

Risposta di Sistemi del II ordine

- In tutti e tre i casi a tempi lunghi sopravvive solo la risposta periodica:

$$y(t) = P_1 \cos \omega t + P_2 \sin \omega t$$

- Con un pò di algebra si ottiene a tempi lunghi:

$$y(t) = \frac{AK}{\sqrt{\left(1-\omega^2\tau^2\right)^2 + \left(2\zeta\omega\tau\right)^2}} \sin\left(\omega t + \phi\right)$$

$$\phi = -\tan^{-1}\left(\frac{2\zeta\omega\tau}{1-\omega^2\tau^2}\right)$$

Sistemi di ordine superiore

- Sistemi di ordine superiore di nostro interesse sono:
  - N processi del I ordine in serie
  - Sistemi con zeri e poli
  - Sistemi con tempo morto
  - Sistemi con risposta inversa

- I sistemi con zeri, quelli con tempo morto ed i sistemi con risposta inversa sono in genere classificati come sistemi con dinamica difficile. Il perché di tale definizione apparirà chiaro più avanti.

Sistemi di ordine superiore

- N processi del I ordine in serie
- Consideriamo il generico sistema sottoposto ad una generica sollecitazione

$$\frac{y_i}{x_i} = \frac{K_i}{(\tau_i s + 1)}$$

- Se il primo sistema è sottoposto ad un gradino allora:

$$y_1 = \frac{A}{s} \frac{K_1}{(\tau_1 s + 1)}$$

$$y_2 = y_1 \frac{K_2}{(\tau_2 s + 1)}$$

$$\ldots$$

$$y_N = y_{N-1} \frac{K_N}{(\tau_N s + 1)}$$

Sistemi di ordine superiore

- N processi del I ordine in serie
- Considerando il sistema globalmente si ottiene:

$$y_N = \frac{A}{s} \prod_{i=1}^{n} \frac{K_i}{(\tau_i s + 1)}$$

- La costante di guadagno è: $K = \prod_{i=1}^{n} K_i$

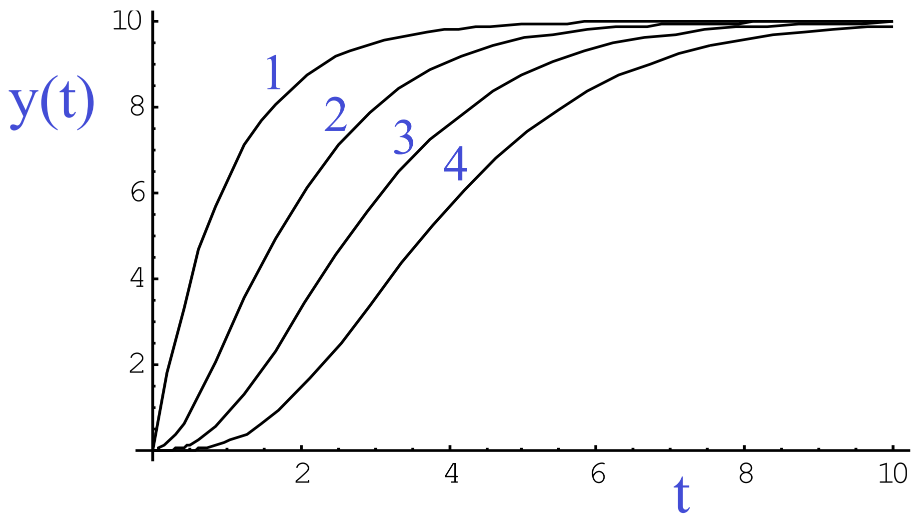
- Inoltre abbiamo N costanti di tempo

$$G = K \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(\tau_i s + 1)} = \frac{K}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \dots a_1 s + 1}$$

- Ci sono N poli: $-\frac{1}{\tau_i}$

Sistemi di ordine superiore

- N processi del I ordine in serie
- Se tutti i sistemi sono uguali e la sollecitazione è un gradino si ha il seguente comportamento



- Al crescere dell'ordine la risposta diventa più lenta.

Sistemi di ordine superiore

- Sistemi con zeri

$$G = \frac{K\,(\xi_1 s+1)\ldots(\xi_q s+1)}{(\tau_1 s+1)\ldots(\tau_p s+1)}$$

- In generale q zeri e p poli.
- I parametri caratteristici sono
  - K
  - i poli $-1/\tau_i$
  - gli zeri $-1/\xi_i$

- Nei casi di nostro interesse vale sempre che $p \geq q$
- Un modo breve per indicare un sistema con zeri e poli è (p,q)

Sistemi di ordine superiore

- Sistemi (2,1) sollecitati a step unitario

$$G = \frac{K\left(\xi_1 s + 1\right)}{\left(\tau_1 s + 1\right)\left(\tau_2 s + 1\right)}$$

$$y\left(s\right) = K\left[\frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{\tau_1 s + 1} + \frac{C_3}{\tau_2 s + 1}\right]$$

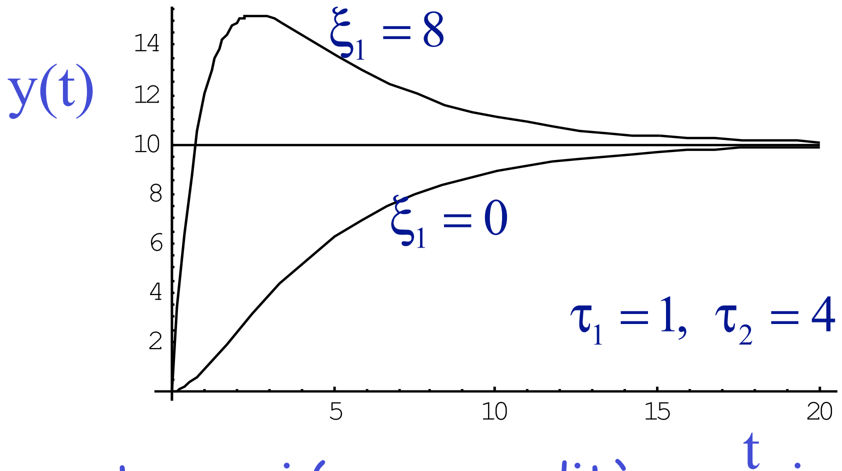
- Le costanti valgono:

$$C_1 = 1, \qquad C_2 = \frac{-\tau_1\left(\tau_1 - \xi_1\right)}{\left(\tau_1 - \tau_2\right)}, \qquad C_2 = \frac{-\tau_2\left(\tau_2 - \xi_1\right)}{\left(\tau_2 - \tau_1\right)}$$

- Antitrasformando:

$$y\left(t\right) = K\left[1 - \frac{\left(\tau_1 - \xi_1\right)}{\left(\tau_1 - \tau_2\right)} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{\left(\tau_2 - \xi_1\right)}{\left(\tau_2 - \tau_1\right)} e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right] u\left(t\right)$$

Sistemi di ordine superiore



- Si possono avere tre casi (per comodità assumiamo che $\tau_2 > \tau_1$):
  - $\xi_1 > \tau_2$ Risposta con overshoot
  - $\xi_1 = \tau_2$ o $\xi_1 = \tau_1$ Risposta come un I ordine
  - $0 < \xi_1 < \tau_2$ Risposta senza overshoot

- Quando c'è lo zero la risposta è più rapida

Sistemi di ordine superiore

- Sistemi (1,1) Anticipo-Ritardo sollecitati a step
  - Servono per il controllo di tipo feedforward

$$G = \frac{K(\xi_1 s + 1)}{(\tau_1 s + 1)}$$

$$G = K\left[C_1 + \frac{C_2}{\tau_1 s + 1}\right]$$

- Le costanti valgono:

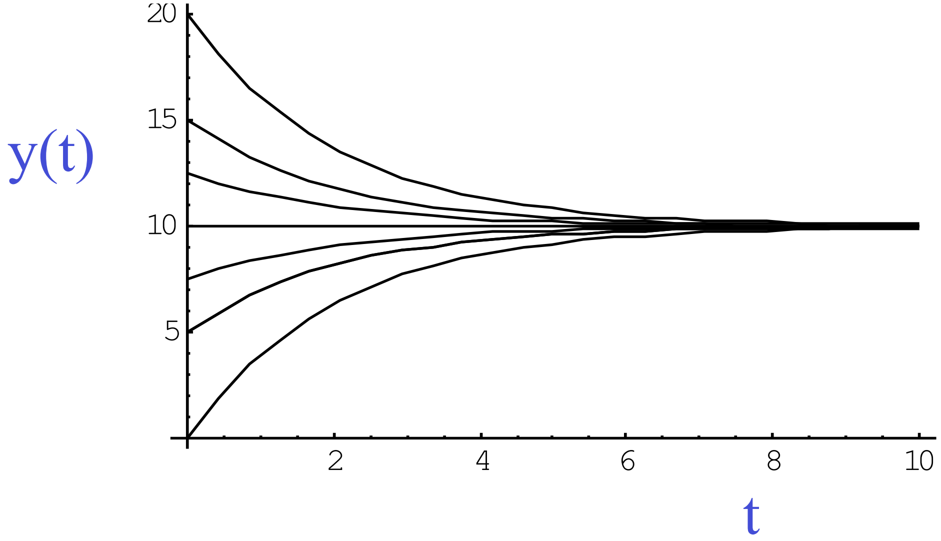
$$C_1 = \frac{\xi_1}{\tau_1} = \rho, \qquad C_2 = 1 - \frac{\xi_1}{\tau_1} = 1 - \rho$$

- Nel dominio di Laplace: $y(s) = K\left[\rho + \frac{1-\rho}{\tau_1 s + 1}\right]\frac{A}{s}$
  - La risposta è una media pesata di un puro guadagno e di un sistema del I ordine normale

Sistemi di ordine superiore

- Valore iniziale $\lim_{t\to 0} y(t) = \lim_{s\to\infty} sK\left[\rho + \frac{1-\rho}{\tau_1 s+1}\right]\frac{A}{s} = KA\rho$
    - La risposta salta immediatamente ad un valore diverso da zero se ρ non è nullo
- Valore finale $\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sK\left[\rho + \frac{1-\rho}{\tau_1 s+1}\right]\frac{A}{s} = KA$
- Antitrasformando: $y(t) = AK\left[1-(1-\rho)e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right]u(t)$

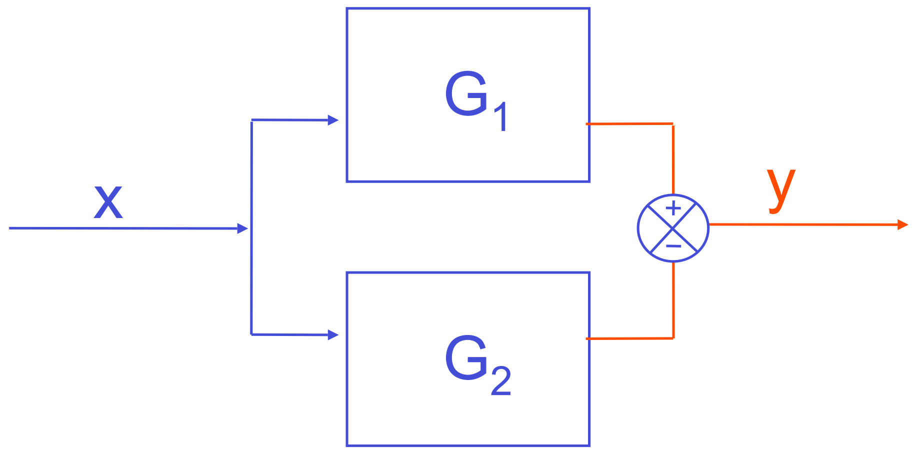
Sistemi di ordine superiore



- Per ρ=1 risposta orizzontale, ρ<1 crescenti, ρ>1 decrescenti

Sistemi di ordine superiore

- Sistemi a risposta inversa: La risposta a tempi brevi si avvia nella direzione opposta rispetto al nuovo stazionario che si raggiungerà a tempi lunghi.



- La Funzione di trasferimento complessiva è

$$G=G_1-G_2$$

Sistemi di ordine superiore

- Il sistema 1 si dice principale ed il 2 "in opposizione"

$$y(s) = G_1 x - G_2 x$$

- Le due funzioni di trasferimento sono del I ordine con $K_1 > K_2$
- Sollecitiamo a step tale sistema.
- Il teorema del valore finale ci assicura che a tempi lunghi y(t) vale: $K_1 - K_2 > 0$
- La pendenza iniziale la possiamo ricavare dal teorema del valore iniziale.

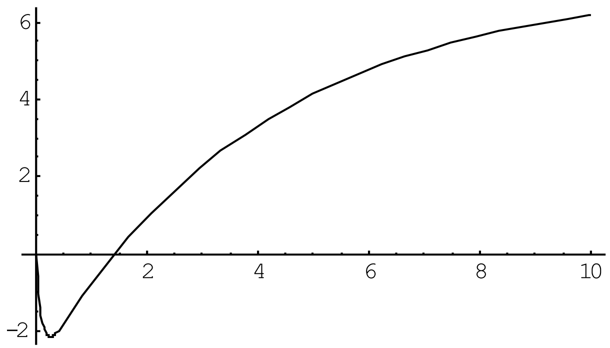
Sistemi di ordine superiore

- La pendenza iniziale la possiamo ricavare dal teorema del valore iniziale.

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = \frac{K_1}{\tau_1} - \frac{K_2}{\tau_2}$$

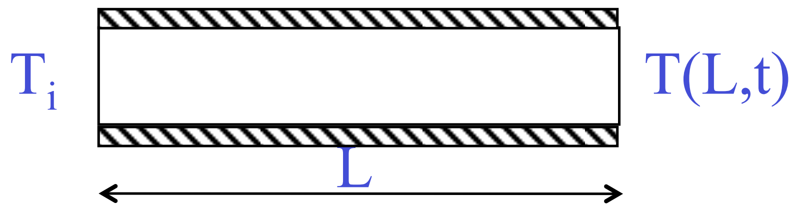
- Il segno di tale pendenza dipende dai parametri delle due funzioni di trasferimento.

- In particolare la pendenza è negativa se $\frac{K_2}{\tau_2} > \frac{K_1}{\tau_1}$ ovvero se il sistema in opposizione è più veloce $\tau_1 > \tau_2$



Sistemi di ordine superiore

- Sistemi con tempo morto
- Un liquido cammina a pistone con velocità v in un sistema coibentato. Al tempo zero T_i ha un gradino



- Come evolve $T(L,t)$?

- Il modello in questo caso non è a parametri concentrati, la funzione incognita dipende sia dallo spazio che dal tempo $T(x,t)$.

Sistemi di ordine superiore

- Bilancio di energia
- Al finito

$$\rho A \Delta x c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \rho A v c_p \left(T - T_{rif}\right)\Big|_x - \rho A v c_p \left(T - T_{rif}\right)\Big|_{x+\Delta x}$$

- Per $\Delta x \rightarrow 0$ si ottiene:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -v \frac{\partial T}{\partial x}, \quad @\, t = 0 \;\; T = T_S, \quad @\, x = 0 \;\; T = T_i$$

- Variabili deviate: $T' = T(x,t) - T_S$

- Trasformando l'equazione diventa ordinaria:

$$sT' + v\frac{dT'}{dx} = 0$$

Sistemi di ordine superiore

- Integrando su L si ottiene:

$$T'(s,x) = T(s,0)e^{-\frac{x}{v}s}$$

- All'uscita x=L $\quad T'(s,L) = T(s,0)e^{-\frac{L}{v}s}$

- In termini di funzione di trasferimento:

$$G = e^{-\frac{L}{v}s}$$

- Per la sollecitazione considerata (u(t))si ottiene:

$$T'(t,L) = u(t - \frac{L}{v})$$

- La risposta è la sollecitazione traslata nel tempo

Sistemi di ordine superiore

- Un altro modo di "vedere" il tempo morto è considerare N sistemi del primo ordine in serie con $K=1$ e costante di tempo pari a α/N

- La funzione di trasferimento di tale sistema è:

$$G = \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{N}s+1\right)^N}$$

- Se consideriamo infiniti sistemi si ricava:

$$G = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{N}s+1\right)^N} = \exp\left[\lim_{N\to\infty}\log\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{N}s+1\right)^N}\right] = \exp\left[\lim_{N\to\infty} -N\log\left(\frac{\alpha}{N}s+1\right)\right] = \exp\left[-\alpha s\right]$$

Sistemi di ordine superiore

- Quindi un sistema di puro ritardo è un sistema ad infinite dimensioni.