Identificazione di modelli

- La modellazione di processi può essere effettuata seguendo due strategie:
  - Sviluppando modelli teorici i cui parametri devono essere stimati da dati sperimentali.
  - Sviluppando modelli empirici.
- Ora considereremo la seconda strategia perché:
  - Ignoranza
  - Interesse limitato
  - Semplificazione
- Il processo dinamico è trattato come una scatola nera.
  - Le caratteristiche del sistema sono "identificate" sulla base delle risposte a sollecitazioni note.

Identificazione di modelli

- L'identificazione di processo costruisce un modello partendo da dati input/output senza ricorrere a leggi che riguardano aspetti fondamentali e proprietà del sistema.
- L'identificazione può essere condotta off-line o on-line.
- Procedura
  - Definizione del processo
  - Formulazione di un modello empirico
    - Dati significativi
    - Funzioni di input
    - Dinamica: Iord_delay, IIord_delay, 2_1_delay
  - Stima dei parametri
  - Validazione

Identificazione di modelli

IDENTIFICAZIONE CON RISPOSTA A IMPULSO.

- La risposta ad impulso di un sistema del I ordine è data da:

$$y(t) = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = G(t)$$

- E' utile notare che:

$$\int_0^\infty G(t)\,dt = \frac{K}{\tau}\int_0^\infty e^{-\frac{t}{\tau}}\,dt = K \qquad \boxed{\text{Momento 0 di G(t)}}$$

$$\int_0^\infty tG(t)\,dt = \frac{K}{\tau}\int_0^\infty te^{-\frac{t}{\tau}}\,dt = K\tau \qquad \boxed{\text{Momento 1 di G(t)}}$$

Identificazione di modelli

IDENTIFICAZIONE CON RISPOSTA A IMPULSO.

- Quindi K e τ possono essere ottenuti come momenti della risposta ad impulso:

$$m_j = \int_0^{\infty} t^j G(t)\, dt$$

- Per un sistema del primo ordine abbiamo appena scoperto che:

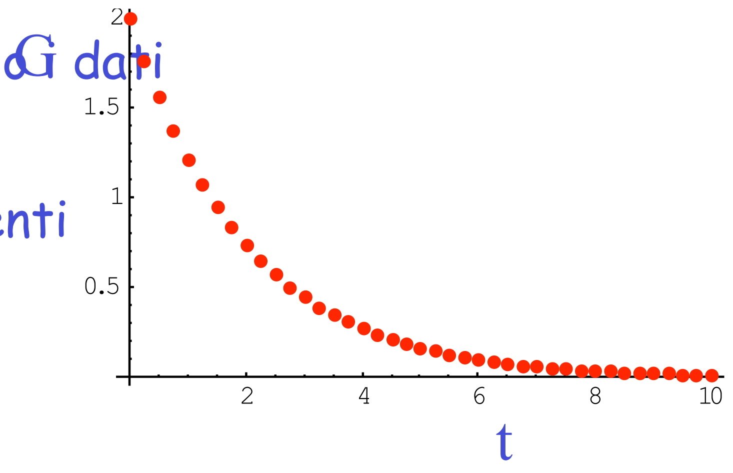
$$K = m_0$$

$$\tau = \frac{m_1}{m_0}$$

Identificazione di modelli

IDENTIFICAZIONE CON RISPOSTA A IMPULSO.

- Operativamente procediamo generando i dati della risposta ad impulso e quindi calcolando i momenti numericamente.



- I dati

$$G_K = G(t_K)$$

- Gli integrali necessari li possiamo calcolare per esempio con Simpson (N pari, equispaziati):

$$\widehat{K} = \int_0^{t_N} G(t)\,dt \approx \frac{\Delta t}{3}\left[G_0 + 4\sum_{i=1}^{N/2} G_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{N/2-1} G_{2i} + G_N\right]$$

Identificazione di modelli

IDENTIFICAZIONE CON RISPOSTA A IMPULSO.

- Analogamente per τ:

$$\widehat{\tau} = \frac{\int_0^{t_N} tG(t)\,dt}{\widehat{K}} \approx \frac{1}{\widehat{K}} \frac{\Delta t}{3} \left[t_0 G_0 + 4 \sum_{i=1}^{N/2} t_{2i-1} G_{2i-1} + 2 \sum_{i=1}^{N/2-1} t_{2i} G_{2i} + t_N G_N \right]$$

- Abbiamo ottenuto questo risultato ipotizzando che la funzione di trasferimento fosse del I ordine. Questa procedura può essere generalizzata a qualunque funzione di trasferimento.

Identificazione di modelli

IDENTIFICAZIONE CON RISPOSTA A IMPULSO.

- Per una generica G(s)

$$G(s)=\int_0^{\infty} G(t)e^{-st}dt$$

- L'esponenziale nell'integrale può essere espanso in serie di potenze:

$$e^{-st}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-st)^j}{j!}$$

$$G(s)=\int_0^{\infty} G(t)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j (st)^j}{j!}dt$$

Identificazione di modelli

IDENTIFICAZIONE CON RISPOSTA A IMPULSO.

- L'integrale che definisce la trasformata di G esiste ed è finito quindi possiamo scambiare la posizione di sommatoria e di integrale

$$G(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j s^j}{j!} \int_0^{\infty} t^j G(t)\,dt = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j s^j}{j!} m_j$$

$$m_j = \int_0^{\infty} t^j G(t)\,dt$$

- Un modello con G qualunque può essere identificato con i momenti della risposta a impulso.

Identificazione di modelli

IDENTIFICAZIONE CON RISPOSTA A IMPULSO.

- Per definizione $K = \lim_{s \to 0} G(s)$ se il limite esiste. Allora:

$$K = \lim_{s \to 0} \int_0^{\infty} e^{-st} G(t)\,dt = \int_0^{\infty} G(t)\,dt = m_0$$

- Il momento di ordine zero della risposta ad impulso di un sistema qualunque è pari alla sua costante di guadagno.

- A questo punto possiamo normalizzare la $G(s)$

$$\bar{G}(a) = \frac{G(s)}{K}$$

La G normalizzata ha guadagno unitario

Identificazione di modelli

IDENTIFICAZIONE CON RISPOSTA A IMPULSO.

- Analogamente possiamo normalizzare i momenti:

$$\mu_j = \frac{m_j}{m_0}$$

$$\bar{G}(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j s^j}{j!} \mu_j = 1 - \mu_1 s + \frac{\mu_2}{2} s^2 - \frac{\mu_3}{6} s^3 + \ldots$$

- I momenti normalizzati possono essere ottenuti dai dati sperimentali.

Identificazione di modelli

PROCEDIMENTO

1. Si raccolgono i dati sperimentali
2. Si ipotizza una forma di funzione di trasferimento che conterrà parametri da definire.

$$G(s) = \frac{K}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + 1}$$

3. Si determinano i parametri uguagliando la G di tentativo con l'espansione nei momenti normalizzati misurati sperimentalmente.

$$\frac{1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + 1} = 1 - \mu_1 s + \ldots$$

4. Si valuta il risultato.

Identificazione di modelli

IDENTIFICAZIONE CON RISPOSTA A IMPULSO.

- La stima dei parametri è facile

$$1 = \left(1 - \mu_1 s + \ldots\right)\left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + 1\right)$$

- Uguagliando i termini a destra e sinistra dell'uguale di egual grado si determinano i parametri della funzione di trasferimento.

Identificazione di modelli

Esempio G I ordine

- Ipotesi:

$$\bar{G}(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

$$1 = (1 - \mu_1 s + \ldots)(\tau s + 1)$$

$$1 = 1 + (\tau - \mu_1)s + \left(\tau\mu_1 + \frac{\mu_2}{2}\right)s^2 + \ldots$$

- Uguagliando

$$\tau = \mu_1, \quad \tau = \sqrt{\frac{\mu_2}{2}}, \ \tau = \sqrt[3]{\frac{\mu_3}{6}}$$

- I momenti di ordine superiore sono affetti da notevole errore numerico.
- La seconda eguaglianza può essere usata per avere una informazione sulla bontà della stima.

Identificazione di modelli

Esempio G II ordine

- Ipotesi: $$\bar{G}(s) = \frac{1}{a_2 s^2 + a_1 s + 1}$$
- Uguagliando $$a_1 = \mu_1, \quad a_2 = \mu_1^2 - \frac{\mu_2}{2}$$

Esempio G 2,1

- Ipotesi: $$\bar{G}(s) = \frac{\xi s + 1}{a_2 s^2 + a_1 s + 1}$$
- Uguagliando $$a_1 = \frac{3\mu_1\mu_2 - \mu_3}{3\left(2\mu_1^2 - \mu_2\right)}, \quad a_2 = a_1\mu_1 - \frac{\mu_2}{2}, \quad \xi = a_1 - \mu_1$$

Identificazione di modelli

Esempio G I ordine + delay

- Ipotesi: $$\bar{G}(s) = \frac{e^{-\alpha s}}{\tau s + 1}$$
- Uguagliando $$e^{-\alpha s} = (1 - \mu_1 s + \ldots)(\tau s + 1)$$

$$1 - \alpha s + \frac{\alpha^2 s^2}{2} + \ldots = (1 - \mu_1 s + \ldots)(\tau s + 1)$$

$$\tau^2 = \mu_2 - \mu_1^2, \ \alpha = \mu_1 - \tau$$

- NB: La $G(t)$ normalizzata ha media $\tau+\alpha$ e varianza τ_2.

$$\sigma^2 = \int_0^\infty (t - \mu_1)^2 G(t) dt = \int_0^\infty \left(t^2 + \mu_1^2 - 2\mu_1 t\right) dt = \mu_2 - \mu_1^2$$