Soluzione prova intracorso di MADS - 15/11/07

Esercizio 1)

Compito A, Simile C

Campioni di emissioni da tre diversi fornitori sono classificati per le valutare la conformità alle specifiche della qualità dell'aria. I risultati da 100 campioni sono riportati in tabella.

		Conformità	
		Si	No
Fornitore	1	22	8
	2	25	5
	3	30	10

Sia A l'evento che il campione proviene dal fornitore 1, e B l'evento di conformità alle specifiche. Se un campione è selezionato a caso, determinare le seguenti

1.1) P(A) = (8 + 22)/100 = 0.3

1.2) P(A U B) = (22 + 8 + 25 + 30)/100 = 0.85

1.3) P(A ∩ B) = 22/100 = 0.22

1.4) P(A' U B) = (70 + 22)/100 = 0.92

Compito B, Simile D

1) Dischi di policarbonato sono stati analizzati per caratterizzare la resistenza a graffi e ad urto. I risultati ottenuti con 100 dischi sono riassunti in tabella

		Urto	
		Alta	Bassa
Graffio	Alta	70	9
	Bassa	16	5

1.1) Se un disco è selezionato a caso, quale è la probabilità che la sua resistenza a graffio sia alta e la sua resistenza ad urto sia alta?

1.2) Se un disco è selezionato a caso, quale è la probabilità che la sua resistenza a graffio sia alta o la sua resistenza ad urto sia alta?

1.3) Si consideri l'evento che un disco abbia una alta resistenza a graffio e l'evento che abbia una alta resistenza all'urto. Questi eventi sono mutamente esclusivi?

1.1) 70/100=0.7
1.2) (70 + 9 + 70 + 16 - 70)/100 = 0.95
1.3) No, perchè l'intersezione dei due eventi non è vuota

Esercizio 2)

Compito A

Sono state effettuate misure di temperatura all'interno di un ambiente chiuso. Tali misure sono distribuite nell'arco di un giorno con intervalli regolari di un'ora e nelle medesime condizioni operative. Il campione di dati rilevato è il seguente: 300.2, 298.5, 297.3, 299.6, 298.7, 297.5, 299.7, 298.7, 297.6, 299.8, 298.9, 297.8, 299.5, 298.9, 298.0, 300.3, 299.1, 298.3, 299.1, 298.4, 299.2, 298.5, 299.4, 298.5. Per il campione riportati si calcoli:
2.1) frequenza relativa
2.2) frequenza cumulativa relativa
2.3) media, mediana e moda
2.4) deviazione standard e varianza
2.5) Si diagrammino inoltre le frequenze relative e cumulative relative per il campione di dati riportato.

Una buona scelta dei campi è:

field1 = [297.0, 297.5]
field2 = [297.5, 298.0]
field3 = [298.0, 298.5]
field4 = [298.5, 299.0]
field5 = [299.0, 299.5]
field6 = [299.5, 300.0]
field7 = [300.0, 300.5]

da cui seguono le frequenze assolute e cumulative assolute:

freqass = [1.5, 3.0, 4.0, 5.5, 4.5, 3.5, 2.0]
freqcum = [1.5, 4.5, 8.5, 14.0, 18.5, 22.0, 24.0]

Dividendo i due vettori per N = 24 si ottengono le corrispondenti frequenze relative.
Infine:

media = 298.8125
mediana ≈ 298.5
moda ≈ 298.75
deviazione standard = 0.8232
varianza = 0.6777

Esercizio 3)

Compito A, Simile C

La densità di probabilità di una VA che rappresenta il peso netto in kg di confezioni di un erbicida chimico è f(x)=2.0 per 49.75<x<50.25 kg

3.1) Determinare la probabilità che una confezione pesi più di 50 kg.

3.2) Quanto erbicida è contenuto nel 90% di tutti i pacchi?

3.1) $\int_{50}^{50.25} f(x)dx = \int_{50}^{50.25} 2dx = 0.5$

3.2) $0.9 = \int_{x}^{50.25} f(m)dm$ x è limite minimo dell'erbicida contenuto nel 90% di pacchi

$0.9 = \int_{49.75}^{x} f(m)dm$ x limite massimo dell'erbicida contenuto nel 90% di pacchi

Compito B, Simile D

La densità di probabilità di una VA che rappresenta la lunghezza di barre di polipropilene è f(x)=1.25 per 74.6<x<75.4 cm

3.1) Determinare la probabilità P(X<74.8).

3.2) Determinare la probabilità P(X<74.8 or X>75.2).

3.1) $\int_{74.6}^{74.8} f(x)dx = \int_{74.6}^{74.8} 1.25dx = 0.25$

3.2) $\int_{74.6}^{74.8} 1.25dx + \int_{75.2}^{75.4} 1.25dx = 0.25 + 0.25 = 0.5$

Esercizio 4)

Compito A

Si consideri una variabile aleatoria Gaussiana $Y = N(\mu_Y, \sigma_Y^2) = N(0.5, 0.3)$

Attraverso l'uso delle tabelle si chiede di calcolare:

4.1) la probabilità: $P\{1.5 \le y + \mu_Y \le 2\}$

4.2) la costante c_1 (reale) tale che: $P\{2y \ge c_1\} = 0.1$

Calcolare (con matlab) le costanti c_2 e c_3 (reali positive) tali che:

4.3) $P\{ -c_2/2 \le y \le c_2\} = c_2^2$

4.4) $P\{y \ge 0.9\}$ U $P\{ -c_3 \le y \le c_3\}$ U $P\{-1 \le y \le -0.5\} = 0.5$

Si consideri la seguente trasformazione: $Z = Y^3 - 2Y$

4.5) si determini la PDF della variabile aleatoria Z

4.6) è possibile stimare la media e la varianza di Z

4.7) come potrebbero essere calcolate in maniera esatta la media e la varianza di Z (impostare il procedimento)

4.1) $P\{1.5 \le y + \mu_y \le 2.0\} = P\{1.5 \le y + 0.5 \le 2.0\} = P\{1.0 \le y \le 1.5\} = P\{y \le 1.5\} - P\{y > 1.0\}$

standardizzando:

$P\{1.0 \le y \le 1.5\} = P\{(1.0 - 0.5)/\text{sqrt}(0.3) \le z \le (1.5 - 0.5)/\text{sqrt}(0.3)\} = P\{0.9129 \le z \le 1.8257\} =$ dalle tabelle = 0.9664 - 0.8186 = 0.1478

4.2) $P\{2y \ge c_1\} = 0.1 \longrightarrow P\{y \ge c_1/2\} = 0.1 \longrightarrow P\{y \ge c_1^*\} = 0.1$ con $c_1^* = c_1/2$

$P\{y \geq c_1^*\} = 1 - P\{y \leq c_1^*\} = 0.1$

standardizzando:

$1 - P\{z \leq (c_1^* - 0.5)/\text{sqrt}(0.3))\} = 0.1 \longrightarrow P\{z \leq c_1^{**}\} = 0.9$

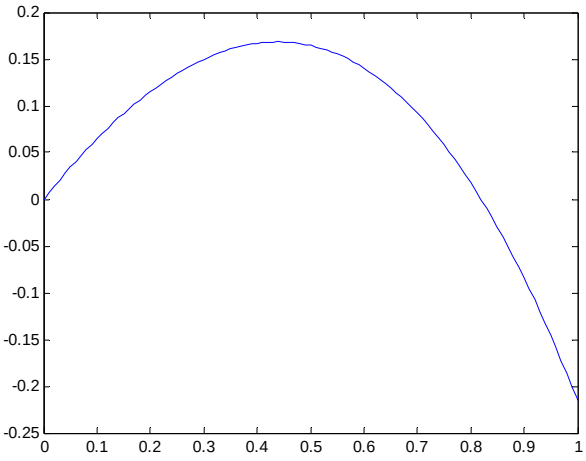
e dalle tabelle: $c_1^{**} = (c_1^* - 0.5)/\text{sqrt}(0.3)) = 1.28$

$c_1^* = 1.2011$

$c_1 = 2.4022$

4.3) per tentativi con Matlab:

```
c = [0:0.01:1];
p = normcdf(c, 0.5, sqrt(0.3)) - normcdf(-c/2, 0.5, sqrt(0.3)) - c.^2;
plot(c,p)
```



Il valore di c_2 cercato è quello per cui la curva blu passa per zero, ovvero in 0 e in ≈ 0.82. Siccome la costante deve essere positiva, la soluzione è $c_2 \approx 0.82$.

4.4) Con Matlab:

$P\{y \geq 0.9\}$ = 1 - normcdf(0.9, 0.5, sqrt(0.3)) = 0.2326
$P\{-1 \leq y \leq -0.5\}$ = normcdf(-0.5, 0.5, sqrt(0.3)) - normcdf(-1.0, 0.5, sqrt(0.3)) = 0.0309

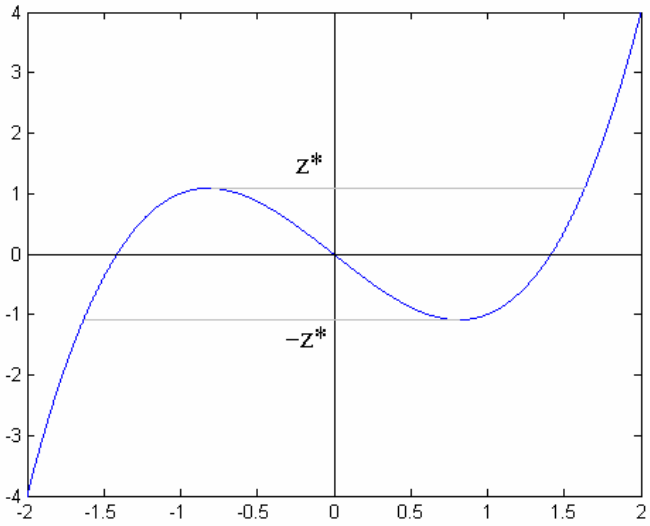
quindi:

$P\{-c_3 \leq y \leq c_3\} = 0.2674$

Siccome $P\{-0.5 \leq y \leq 0.5\} = 0.4661$, la costante deve essere minore di 0.5.

Procedendo con Matlab per tentativi (vedi sopra), si ottiene $c_3 \approx 0.27$.

4.5) La funzione $Z = Y^3 - 2Y$ è la seguente:



la quale è biunivoca per z < -z* e z > z* mentre è non biunivoca per -z* ≤ z ≤ z*. Quindi, quando è biunivoca, l'equazione ammette una sola radice e va applicata la formula per trasformazioni biunivoche.
Quando invece non è biunivoca, l'equazione ammette 3 radici e va applicata la formula per trasformazioni non biunivoche.

Quindi:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \dfrac{f_Y\left[g^{-1}(z)\right]}{\left|g'(y)\right|_y\right|} & per\ \ z \le -z^*\ \ e\ \ z \ge z^* \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \dfrac{f_Y(y_i)}{\left|g'(y)\right|_{y_i}\right|} & per\ \ -z^* \le z \le z^* \end{cases}$$

con:

$f_Y(y) = N(0.5, sqrt(0.3))$
$g'(y) = 3y^2 - 2$
y_i = l'i-ma radice

4.6) Si, vedi formule nella slide 14, esercitazione 3

4.7) Possono essere calcolate con le formule:

$\mu_z = E(Z)$
$\sigma^2 = E((Z - \mu_z)^2)$

Esercizio 5)

Compito A
Un sito di vendite online riceve ordini attraverso due server indipendenti. Il tempo tra gli ordini per ciascun server in un giorno tipico è distribuito con una pdf esponenziale $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ e con λ si è espresso l'inverso della media. Si consideri una media pari a 3.2 minuti e si tenga presente che i due server operano indipendentemente.

5.1) Si determini la probabilità che nessun ordine sia ricevuto in un periodo di 5 minuti.
5.2) La domanda precedente non richiede la conoscenza della densità di probabilità congiunta. Perché?

Si tratta di una VA aleatoria a due componenti, indipendenti fra loro.

5.1) La probabilità richiesta è il prodotto delle probabilità delle singole componenti:

$$\int_5^\infty \lambda e^{-\lambda x} \cdot \int_5^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = 0.0439$$

5.2) Perchè le componenti sono indipendenti.