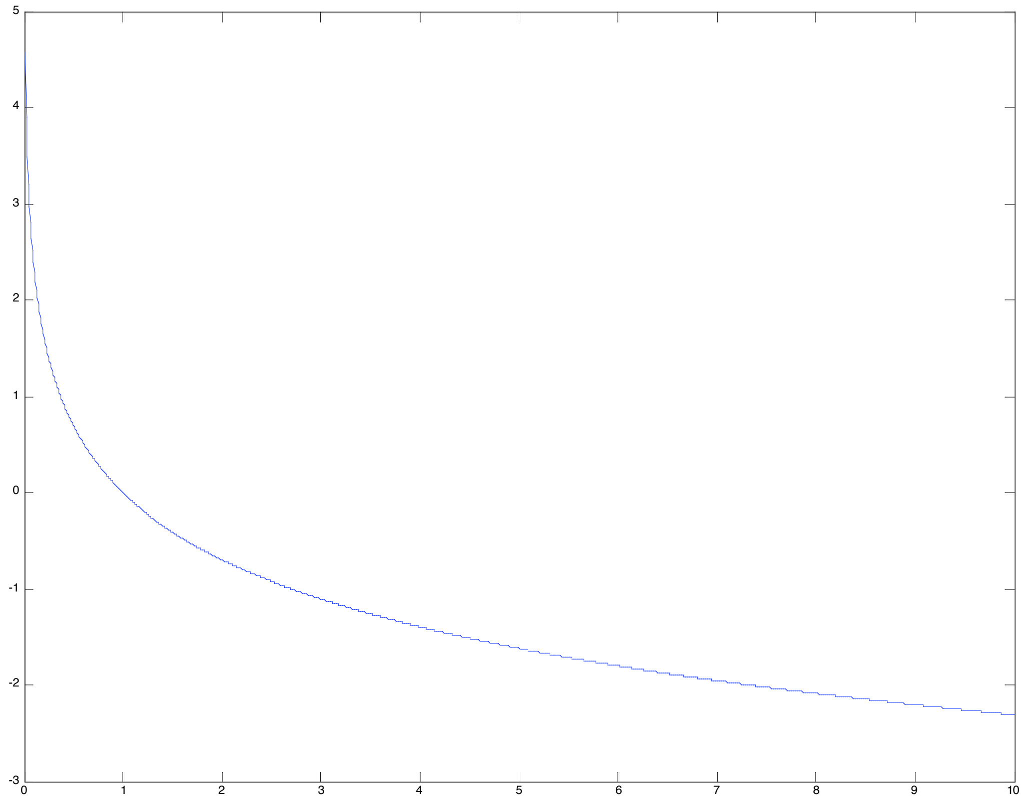
CORREZIONE ESERCIZIO 4 (29/10/09)

ESERCIZIO 1

a) calcolare la PDF della variabile aleatoria Z:

La trasformazione g(y) = ln(1/y) è biunivoca come si evince anche dal grafico:



Quindi la formula da applicare è:

$$f_Z(z) = \frac{f_Y(g^{-1}(z))}{\left|\frac{dg}{dy}\Big|_z\right|}$$

Calcolo della derivata:

$dg/dy = g'(y) = y\,(-1/y^2) = -1/y$

Calcolo dell'inversa di g(y):

$z = \ln(1/y) = \ln(y^{-1}) = -\ln(y) \quad \rightarrow \quad y = e^{-z}$

Ricordando che la PDF di una Gaussiana standard è:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

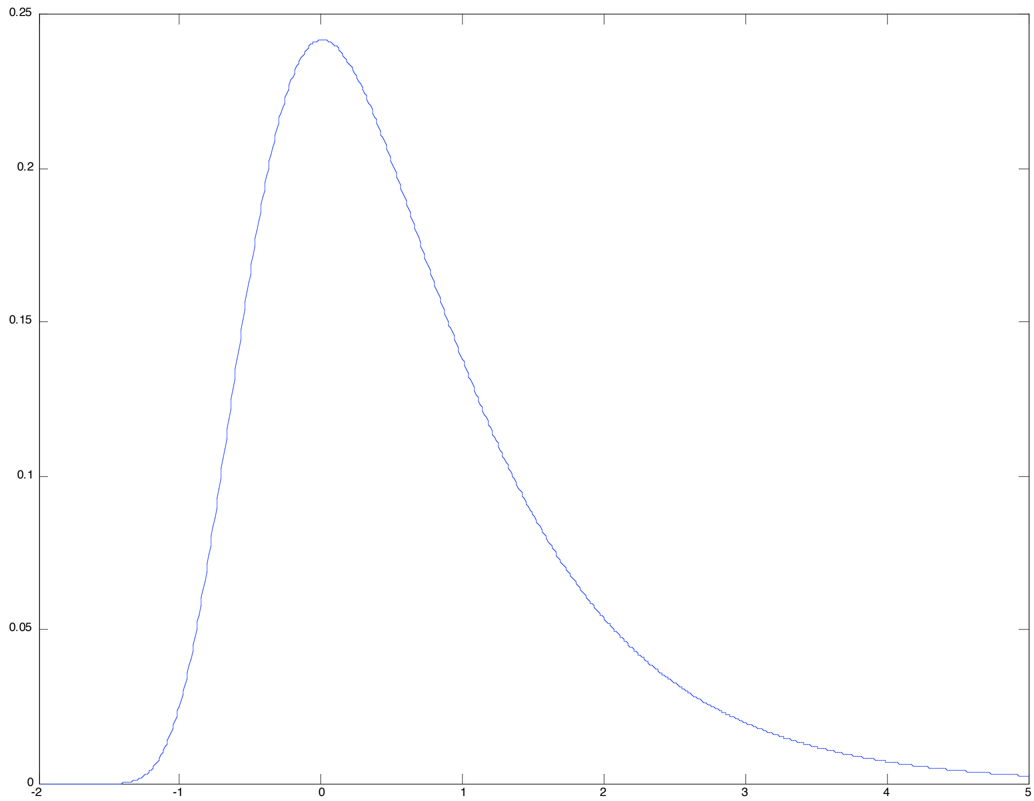
applicando la formula di sopra si ha:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{e^{-2z}}{2}} \cdot \left| -\frac{1}{e^z} \right| = \frac{e^{-z}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{e^{-2z}}{2}}$$

b) Diagramma la PDF di Z:

```
>> x = [-2.0:0.01:5.0];
>> zpdf = exp(-y)/sqrt(2*pi).*exp(-exp(-2*y)/2);
```

NB : da notare il punto prima dell'asterisco nel prodotto tra esponenziali



c) NO, Z non è una VA Gaussiana

d) NO, non è possibile il calcolo esatto della media e varianza di Z perché la trasformazione g(y) non è lineare

e) il calcolo approssimato è in teoria possibile attraverso le relazioni:

$$\mu_Z \cong g(\mu_Y)$$

oppure

$$\mu_Z \cong g(\mu_Y) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2 g}{dy^2}\right|_{\mu_Y} \sigma_Y^2$$

e

$$\sigma_Z^2 \cong \left(\left.\frac{d^2 g}{dy^2}\right|_{\mu_Y} \right)^2 \sigma_Y^2$$

Tuttavia, essendo la media di Y uguale a zero, le espressioni di sopra sono indeterminate.