# CORREZIONE ESERCIZIO 5 (04/11/09)

## ESERCIZIO 1

a) calcolare la PDF della variabile aleatoria **Y**:

La formula da applicare è:

$$f_Y(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{det(\boldsymbol{V})}} exp\left(\frac{-\left[(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})\right]}{2}\right) \quad (1)$$

Per il calcolo del determinante di **V**:

det(**V**) = $4(2*1.5 - a^2)$

Per il calcolo dell'inversa di **V** si parte dalla definizione di matrice inversa:

$\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^{-1} = \mathbf{I}$

e sostituendo a **V** la matrice data ed ad **I** la matrice identica si ha:

$$\begin{pmatrix} 1.5 & a & 0 \\ a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sfruttando la proprietà che l'inversa di una matrice simmetrica è anch'essa simmetrica:

$v_{12} = v_{21}$; $v_{23} = v_{32}$; $v_{13} = v_{31}$

Effettuando il prodotto riga per colonna si perviene ad un sistema di equazioni lineari che risolto fornisce:

$$\boldsymbol{V}^{-1} = \begin{pmatrix} 2/(3-a^2) & -a/(3-a^2) & 0 \\ -a/(3-a^2) & 3/(6-2a^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Il prodotto righe per colonne nell'esponenziale fornisce:

$$(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu})^T \boldsymbol{V}^{-1}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{\mu}) = (0.5+y_1)\left[\frac{2(0.5+y_1)}{3-a^2} - \frac{a(-0.1+y_2)}{3-a^2}\right] +$$

$$+(-0.1+y_2)\left[-\frac{a(0.5+y_1)}{3-a^2} + \frac{3(-0.1+y_2)}{6-2a^2}\right] + \frac{(-1+y_3)^2}{4}$$

che sostituita nella equazione (1) con n = 3 fornisce la PDF cercata.

b) Il calcolo delle probabilità (con a = 0) si ottiene svolgendo gli integrali (per il caso 2a):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{+\infty}\int_{-\infty}^{-0.1} \frac{1}{\sqrt{1.5}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_1+0.5)^2}{3}} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_2-0.1)^2}{4}} \frac{1}{\sqrt{4}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_3-1.0)^2}{8}} dy_1 dy_2 dy_3$$

ovvero:

1*(1 – normcdf(0, 0.1, sqrt(2)))*normcdf(-0.1, -0.5, sqrt(1.5))) = 0.3317

Per il caso 2b:

$$\int_{1.1}^{3.5}\int_{-1.5}^{-1.2}\int_{-0.1}^{50} \frac{1}{\sqrt{1.5}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_1+0.5)^2}{3}} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_2-0.1)^2}{4}} \frac{1}{\sqrt{4}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_3-1.0)^2}{8}} dy_1 dy_2 dy_3$$

ovvero:

(normcdf(3.5, 1, sqrt(4)) – normcdf(1.1, 1, sqrt(4)))*(normcdf(-1.2, 0.1, sqrt(2)) – normcdf(-1.5, 0.1, sqrt(2)))*(normcdf(50, -0.5, sqrt(1.5)) – normcdf(-0.1, -0.5, sqrt(1.5)) ) = 0.0070

**ESERCIZIO 2**

Siccome abbiamo n > 30 esperimenti indipendenti, è possibile applicare il TLC.

Quindi:

$$P\left\{48 \le \overline{X}_n \le 62\right\} = P\left\{\frac{48-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le Z_n \le \frac{62-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right\} = P\left\{-14.14 \le Z_n \le 14.14\right\} \cong 1$$

L'ipotesi di Gaussianietà non è importante perché il TLC vale qualunque sia la forma della PDF delle variabili aleatorie.