

Esercizio 1

Si consideri la seguente V.A. Y di tipo Chi-quadro a 2 gradi di libertà.

1) Utilizzando i comandi di Matlab determinare la probabilità dei seguenti eventi:

$$1 < Y < 3; 5 < Y < \infty$$

2) Utilizzando i comandi di Matlab determinare il valore c tale che $P(X < c) = 0.8$

Si consideri la trasformazione: $X = Y^4 - 2Y^2 + 5$

3) si determini la PDF della variabile aleatoria X

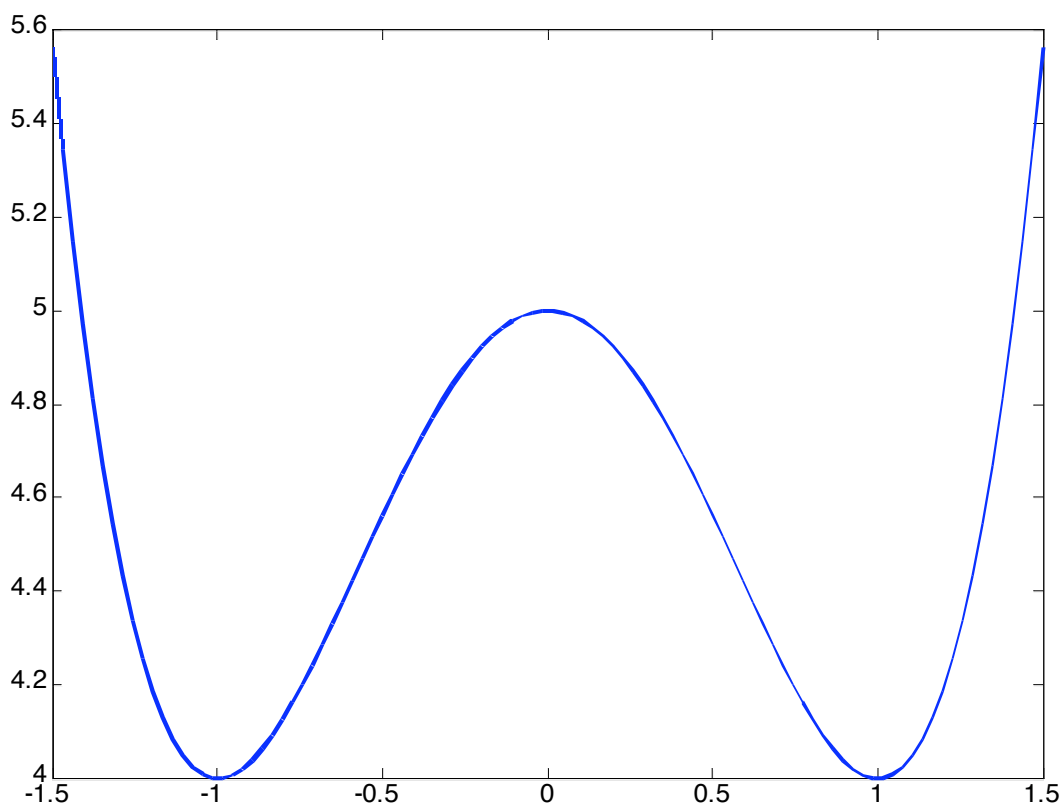
4) come potrebbero essere calcolate in maniera esatta la media e la varianza di X (impostare il procedimento)

1) $\text{chi2cdf}(3,2) - \text{chi2cdf}(1,2) = 0.3834$

2) $1 - \text{chi2cdf}(5,2) = 0.0821$

3) $\text{chi2inv}(0.8,2) = 3.2189$

4) Diagrammando la trasformazione $X(Y)$ si ha:



quindi si tratta di una trasformazione non biunivoca.

Siccome tale funzione ha 4 soluzioni per $4 < y < 5$ e 2 soluzioni per $y > 5$, è necessario considerare separatamente queste due zone.

Quindi, si ha:

$$f_X(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^4 \frac{f_Y(y_i)}{|g'(y)|_{y_i}} & \text{per } 4 < x < 5 \\ \sum_{i=1}^2 \frac{f_Y(y_i)}{|g'(y)|_{y_i}} & \text{per } x > 5 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

dove:

$$f_Y(y) = \text{VA chi-quadro a 2 gradi di libertà}$$

$$g'(y) = 4y^3 - 4y$$

e le radici y_i sono calcolate risolvendo in y l'equazione della trasformazione (ovviamente si avranno quattro radici per $4 < y < 5$ e due radici per $y > 5$).

4) Si applicano le definizioni:

$$\mu_X = E(X)$$

$$\sigma^2 = E((Z - \mu_Z)^2)$$

Esercizio 2 (Vedi correzione II prova intercorso)

Esercizio 3

Si è proceduto ad una campagna sperimentale con due variabili indipendenti x_1 ed x_2 eseguendo esperimenti indipendenti modellabili con una VA Gaussiana con varianza indipendente dalle condizioni sperimentali. I risultati sperimentali sono riportati in tabella.

Si presume che il processo possa essere modellato con un modello lineare del tipo:
 $y = a + b x_1 + c x_2$.

- i) Si proceda alla stima dei parametri del modello
- ii) Si costruisca il diagramma dei residui standardizzati, riportando i residui contro l'indice della misura. Si commentino criticamente i risultati

x1	0.500	0.500	0.500	1.25	1.25	1.25	2.00	2.00	2.00
x2	0.500	1.25	2.00	0.500	1.25	2.00	0.500	1.25	2.00
y	2.55	2.59	2.61	4.89	4.88	4.92	7.18	7.20	7.24

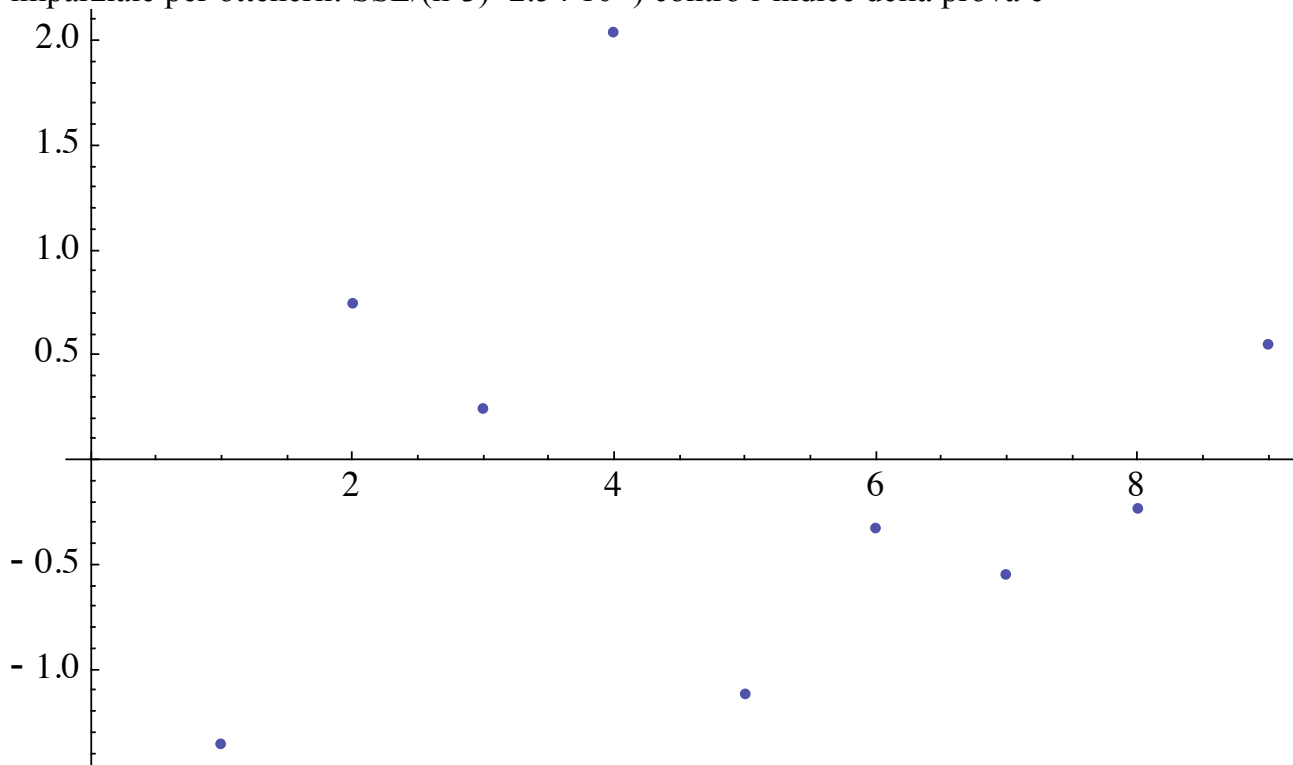
1) Il modello è di tipo multilineare. Il vettore dei parametri $\theta = (a \ b \ c)$ può essere stimato con Matlab definendo la matrice delle condizioni sperimentali e risultati sperimentali

$X = [1 \ 0.5 \ 0.5; 1 \ 0.5 \ 1.25; \dots];$
 $y = [2.55; 2.59; \dots];$
quindi:

$A = X' * X;$
 $c = X' * y$
 $teta = A \backslash c$

I parametri stimati sono: $a=1.0$, $b=3.08$, $c=0.03$

2) Il diagramma dei residui standardizzati (è necessario stimare la varianza sperimentale imparziale per ottenerli: $SSE/(n-3)=2.54 \cdot 10^{-4}$) contro l'indice della prova è



Si nota una assenza di struttura nei residui, ed una distribuzione in una fascia compresa tra ± 2 . Quindi il modello scelto per descrivere i dati sperimentali sembra adeguato.

Esercizio 4

In tabella è riportato un campione sperimentale di una VA di tipo Gaussiano.

- Si stimi la media della corrispondente popolazione
- Si determini l'intervallo fiduciario della media

$$\begin{pmatrix} 1.105 \\ 1.099 \\ 1.109 \\ 1.084 \\ 1.111 \\ 1.101 \\ 1.106 \\ 1.106 \\ 1.083 \\ 1.098 \\ 1.101 \\ 1.088 \\ 1.097 \\ 1.083 \\ 1.105 \end{pmatrix}$$

La VA è una Gaussiana. La media è pari a 1.10. La varianza della VA non è nota a priori, ma può essere stimata dal campione. Quindi il problema si tradurrà nella caratterizzazione di una T di Student a 14 gdl.

Si seleziona un coefficiente fiduciario $\gamma=1-\alpha=0.95$

Sapendo che $T(c)=0.5+\gamma/2$ si deve determinare c tale che $T(c)-T(-c)=0.95$. Si può utilizzare il comando Matlab `tinv(0.5*(1+0.95),14)` che restituisce il valore $c=2.14$. L'intervallo fiduciario della media è quindi:

$G=\text{media} \pm K$ con $K = \frac{cs}{\sqrt{n}}$. La deviazione standard stimata è pari a 0.0095, quindi:

$G=1.1 \pm 0.0053$

Esercizio 5

Un campione di 850 transistors ne contiene 70 difettosi. Due transistor sono estratti a caso e senza rimpiazzo dal campione.

- Qual è la probabilità che il primo transistor estratto sia difettoso?
- Qual è la probabilità che il secondo estratto sia difettoso se il primo estratto non era difettoso?
- Qual è la probabilità che entrambi siano difettosi?

- Probabilità Evento A $P(A)=70/850$
- $P(B)=70/849$
- $P(A \cap D)=P(D|A)P(A)=69/849 \quad 70/850=67\%$