Trasformazioni di variabili aleatorie scalari

Sommario della Esercitazione 3

- Richiami sulle trasformazioni di VA
- Esercizi

Richiami

- Procedimento per la trasformazione biunivoca di una VA scalare

$$Z = g(Y)$$

  - Fissiamo z
  - Risolviamo per y: $y=g^{-1}(z)$
  - Valutiamo $\left.\frac{dz}{dy}\right|_z = \left.\frac{dg(y)}{dy}\right|_z$
  - Quindi determiniamo

$$\boxed{f_Z(z) = \frac{f_Y(y)}{\left|\left.\frac{dz}{dy}\right|_z\right|} = \frac{f_Y\left[g^{-1}(z)\right]}{\left|\left.g'(y)\right|_z\right|}}$$

Richiami

- Procedimento per la trasformazione non biunivoca di una VA scalare

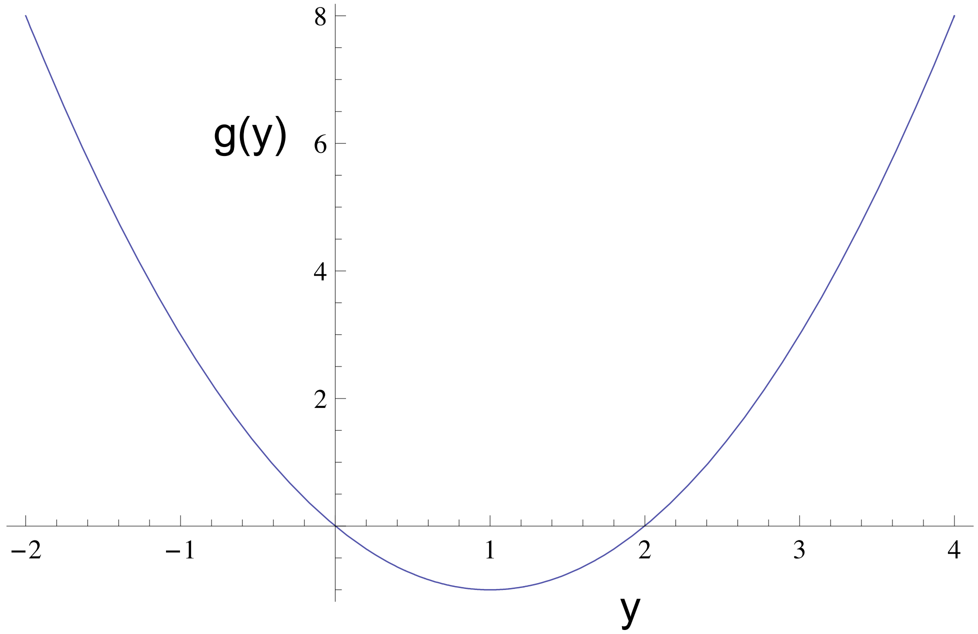
$$Z = g(Y)$$

  - z=g(y)
  - Si fissa z quindi si ricavano le radici y
  - P{z<Z≤z+dz}=ΣP{y<Y≤y+dy}

- Quindi anche in questo caso se si conosce f_Y possiamo ricavare f_Z anche se il procedimento è un po' più complesso

$$f_Z = \sum_{i=1}^{NR} \frac{f_Y(y_i)}{\left| \left. \frac{dz}{dy} \right|_{y_i} \right|} \qquad NR = numero\ radici$$

Esercizio I

- Si consideri una variabile aleatoria Gaussiana standard Y. Si consideri la seguente trasformazione: $Z = Y^2 - 2Y$
  - si determini la PDF della variabile aleatoria Z
  - è possibile stimare la media e la varianza di Z
- 

Esercizio I

- La trasformazione non è biunivoca, ed non abbiamo radici per z<-1. Quindi:
  - Quando è biunivoca, l'equazione ammette una sola radice e va applicata la formula per trasformazioni biunivoche.
- Quindi:

$$f_Z = \sum_{i=1}^{NR} \frac{f_Y(y_i)}{\left|\frac{dz}{dy}\right|_{y_i}} \qquad NR = numero\ radici$$

- Risolviamo per y:

$$y_1 = 1 - \sqrt{1+z}$$
$$y_2 = 1 + \sqrt{1+z}$$

2 radici

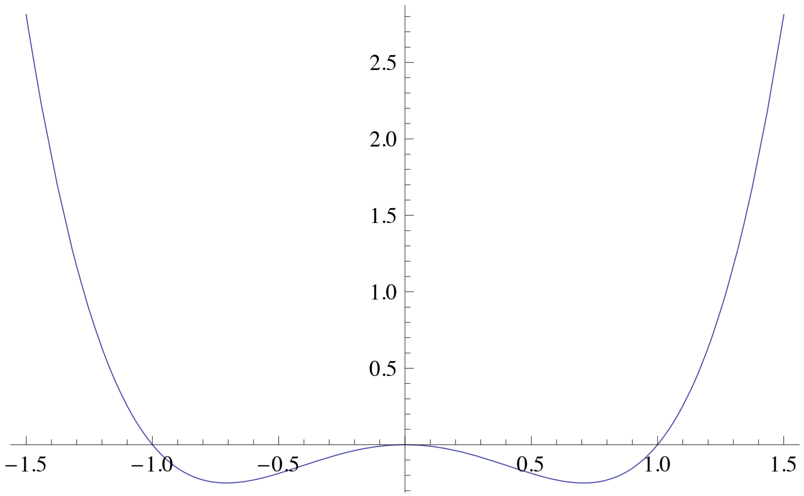
  - Valutiamo la derivata della trasformazione in z $\frac{dz}{dy} = 2y - 2$

$$\frac{dz}{dy}|_z = -2\sqrt{1+z} \qquad \frac{dz}{dy}|_z = 2\sqrt{1+z}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} f_Z = 0 \qquad z < -1 \\ f_Z = \frac{1}{|2\sqrt{1+z}|}[f_Y(1-\sqrt{1+z}) + f_Y(1+\sqrt{1+z})] \qquad z \geqslant -1 \end{array}}$$

Esercizio II

- Si consideri una variabile aleatoria Gaussiana $Y = N(0.5, 0.3)$. Si consideri la seguente trasformazione: $Z=Y^4-Y^2$.
- Si determini la densità di probabilità della VA Z
- Qui la nonbiunivocità è più complessa



- Per $z>0$ abbiamo 2 radici
- per $-0.25<z<0$ abbiamo 4 radici

Esercizio II

- Dobbiamo procedere nelle due zone separatamente
- z>0: le radici sono $y_1 = -\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4z}}$ $\quad y_2 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4z}}$
- la derivata: $\frac{dz}{dy} = 4y^3 - 2y$ $\quad |\frac{dz}{dy}|_z = \sqrt{2+8z}\sqrt{1+\sqrt{1+4z}}$
- per -0.25<z<0: le radici sono 4

$$y_1 = -\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4z}} \qquad y_2 = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4z}}$$

$$y_3 = -\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4z}} \qquad y_4 = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4z}}$$

- le derivate $|\frac{dz}{dy}|_z = \sqrt{2+8z}\sqrt{1+\sqrt{1+4z}}$ $\quad |\frac{dz}{dy}|_z = \sqrt{2+8z}\sqrt{1-\sqrt{1+4z}}$

Esercizio II

- Quindi la variabile aleatoria Z ha pdf data da:

$$f_Z = 0 \qquad z < -0.25$$

$$f_Z = \frac{1}{|\sqrt{2+8z\sqrt{1+\sqrt{1+4z}}}|}[f_Y(-\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4z}}) + f_Y(\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4z}})] + \frac{1}{|\sqrt{2+8z}\sqrt{1-\sqrt{1+4z}}|}[f_Y(-\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+4z}}) + f_Y(\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+4z}})] \qquad -0.25 < z < 0$$

$$f_Z = \frac{1}{|\sqrt{2+8z\sqrt{1+\sqrt{1+4z}}}|}[f_Y(-\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4z}}) + f_Y(\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+4z}})] \qquad z > 0$$