

Metodi per l'Analisi dei Dati Sperimentali

AA2009/2010



VARIABILI ALEATORIE VETTORIALI

COMPORTAMENTI LIMITE

Gaetano D'Avino

Esercitazioni
Lezione 4
05/11/09



Variabili aleatorie vettoriali

Esercitazioni
Lezione 4
05/11/09

Sommario

- Introduzione
- Distribuzioni marginali
- Diagramma di VA vettoriali
- Calcolo di probabilità
- Teorema del limite centrale

La teoria di questa esercitazione si trova nei file "Lezione4.pdf" e "Lezione5.pdf" sul sito web del Prof. Maffettone



Introduzione

Esercitazioni
Lezione 4
05/11/09

- Spesso, nella pratica, si effettua una campagna sperimentale costituita da due o più esperimenti
- Esempi sono:
 - La misura di più velocità di reazioni
 - La misura di resa e selettività all'uscita di un reattore
 - Misure di concentrazioni a tempi diversi
 -
- Esperimenti combinati portano alla definizione di VARIABILI ALEATORIE VETTORIALI
- Siamo interessati a calcolare la probabilità che si verificano eventi COMBINATI o INDIPENDENTI tra le componenti delle VA vettoriali



Introduzione

Esercitazioni
Lezione 4
05/11/09

- Come per il caso scalare, è possibile definire la CDF e la PDF per variabili aleatorie vettoriali (per i dettagli si veda la teoria)
- Sia \mathbf{X} una VA vettoriale, per es. a 2 componenti: $\mathbf{X}=(X_1, X_2)$
- La CDF si definisce come:

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\}$$

- Analogamente si introduce la PDF (congiunta) della VA \mathbf{X} :

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f(w, v) dw dv$$

che gode della proprietà che: $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(w, v) dw dv = 1$



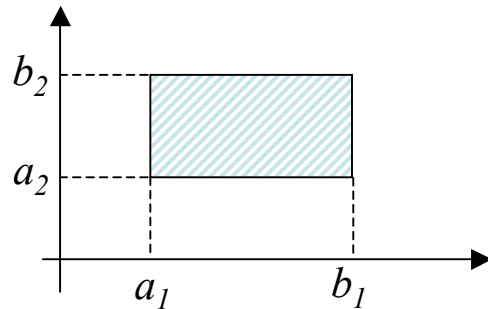
Introduzione

Esercitazioni
Lezione 4
05/11/09

- Si dimostra che:

$$\begin{aligned} P\{a_1 \leq X_1 \leq b_1, a_2 \leq X_2 \leq b_2\} &= \\ &= F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2) = \\ &= \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(w, v) dw dv \end{aligned}$$

- Graficamente:



- Si noti che il calcolo della probabilità nel rettangolo in figura attraverso la PDF implica il calcolo di un integrale doppio

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = F_{X_l}(x_l) \cdot F_{X_s}(x_s) \quad f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = f_{X_l}(x_l) \cdot f_{X_s}(x_s)$$



Gaussiane vettoriali

Esercitazioni
Lezione 4
05/11/09

- Una VA vettoriale \mathbf{X} ad n componenti si dice GAUSSIANA e si denota con $\mathbf{X} = N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$ se la PDF congiunta ha espressione:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det(\mathbf{V})}} \exp \left(-\frac{[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})]}{2} \right)$$

- $\boldsymbol{\mu}$ è il vettore delle medie (dimensione n)
- \mathbf{V} è la matrice di covarianza (dimensione $n \times n$, simmetrica, definita positiva)
- Se le componenti di \mathbf{X} sono indipendenti, la matrice di covarianza \mathbf{V} è diagonale. L'inverso NON VALE in generale ma SOLO se le \mathbf{X} sono Gaussiane.



Esercizio

Esercitazioni
Lezione 4
05/11/09

- Vediamo che aspetto ha una variabile aleatoria Gaussiana di dimensione 2

Esercizio 1

- Sia $\mathbf{X}=(X_1, X_2)$ una VA GAUSSIANA di vettore delle medie e matrice di covarianza:

$$\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \mu_2] = [2, 3] \qquad V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Si chiede di scrivere e diagrammare la PDF della \mathbf{X}



Gaussiane vettoriali

Esercitazioni
Lezione 4
05/11/09

- Riscriviamo la forma generale della PDF GAUSSIANA:

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det(\mathbf{V})}} \exp\left(-\frac{[(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})]}{2}\right)$$

- Calcoliamo le grandezze:

- $n = 2$
- $\det(\mathbf{V}) = 3$
- $(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = (x_1 - 2, x_2 - 3)$
- $\mathbf{V}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix}$
- $(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) = (-2 + x_1)^2 + \frac{1}{3}(-3 + x_2)^2$

$$\boldsymbol{\mu} = [2, 3]$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$



Gaussiane vettoriali

Esercitazioni
Lezione 4
05/11/09

- Quindi la PDF sarà:

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{3}} \exp \left(\frac{-(-2+x_1)^2 - \frac{1}{3}(-3+x_2)^2}{2} \right)$$

- Possiamo diagrammarla con Matlab
- Nell'M-file "**grafGaussVett.m**" si trova un programma che diagramma la PDF di una GAUSSIANA vettoriale 2 x 2 per un qualsiasi vettore di medie e matrice di covarianza
- Per il diagramma si utilizzano:
 - grafico di superficie con il comando "**surf**"
 - curve di isolivello con il comando "**contour**"



Esercizio 2

Esercitazioni
Lezione 4
05/11/09

- Procediamo ora al calcolo delle probabilità per variabili aleatorie vettoriali

Esercizio 2

- Si consideri la funzione:
$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = 4x_1x_2 & \text{in } 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$
- a. mostrare che tale funzione può rappresentare la pdf della VA \mathbf{X}
- b. valutare la probabilità dell'evento $\{0 \leq x_1 \leq 0.5, 0 \leq x_2 \leq 0.2\}$
- c. valutare $E(x_1), E(x_2)$ e $Cov[X_1, X_2]$



Esercizio 2

Esercitazioni
Lezione 4
05/11/09

Soluzione 2a

- Perché la f sia la pdf di una VA deve essere:
 - Positiva
 - L'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(w, v) dw dv$ deve avere valore unitario
- La f è positiva
- L'integrale vale: $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(w, v) dw dv = \int_0^1 \int_0^1 4wv dw dv = 4 \left[\frac{w^2}{2} \right]_0^1 \left[\frac{v^2}{2} \right]_0^1 = 1$
- Quindi la funzione può essere la pdf di una variabile aleatoria vettoriale



Esercizio 2

Esercitazioni
Lezione 4
05/11/09

Soluzione 2b

- La probabilità dell'evento $\{0 \leq x_1 \leq 0.5, 0 \leq x_2 \leq 0.2\}$ si calcola attraverso il seguente integrale:

$$P\{a_1 < X_1 \leq b_1, a_2 < X_2 \leq b_2\} = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(w, v) dw dv$$

- Nel caso in esame si ha:

$$P\{0 < X_1 \leq 0.5, 0 < X_2 \leq 0.2\} =$$

$$\int_0^{0.5} \int_0^{0.2} 4wv dw dv = 4 \left[\frac{w^2}{2} \right]_0^{0.5} \left[\frac{v^2}{2} \right]_0^{0.2} = 0.5^2 \cdot 0.2^2 = 0.01$$



Esercizio 2

Esercitazioni
Lezione 4
05/11/09

Soluzione 2c

$$E(X_1) = \mu_{X_1} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w f(w, v) dw dv = \int_0^1 \int_0^1 4w^2 v dw dv = 4 \left[\frac{w^3}{3} \right]_0^1 \left[\frac{v^2}{2} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$E(X_2) = \mu_{X_2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v f(w, v) dw dv = \int_0^1 \int_0^1 4w v^2 dw dv = 4 \left[\frac{w^2}{2} \right]_0^1 \left[\frac{v^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\text{Cov}[X_1, X_2] = E[(X_1 - \mu_{X_1})(X_2 - \mu_{X_2})] =$$

$$\int_0^1 \int_0^1 4wv \left(w - \frac{2}{3} \right) \left(v - \frac{2}{3} \right) dw dv = 4 \int_0^1 \int_0^1 \left(w^2 v - \frac{2}{3} wv \right) \left(v - \frac{2}{3} \right) dw dv =$$

$$4 \int_0^1 \int_0^1 \left(w^2 v^2 - \frac{2}{3} w^2 v - \frac{2}{3} wv^2 + \frac{4}{9} wv \right) dw dv =$$

$$4 \left[\frac{w^3 v^3}{9} - \frac{1}{9} w^3 v^2 - \frac{1}{9} w^2 v^3 + \frac{1}{9} w^2 v^2 \right]_{w=0, v=0}^{w=1, v=1} = 4 \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \right) = 0$$



Esercizio 3

Esercitazioni
Lezione 4
05/11/09

Esercizio 3

- Si consideri la funzione:
$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = 8x_1x_2 & \text{in } 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$
- a. mostrare che tale funzione può rappresentare la pdf della VA **X**
- b. valutare $E(x_1), E(x_2)$ e $Cov[X_1, X_2]$



Esercizio 3

Esercitazioni
Lezione 4
05/11/09

Soluzione 3a

- Perché la f sia la pdf di una VA deve essere:
 - Positiva
 - L'integrale $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(w, v) dw dv$ deve avere valore unitario

- La f è positiva

ATTENZIONE!!!

- L'integrale su tutto lo spazio vale:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(w, v) dw dv &= \int_0^1 \int_0^v 8wv dw dv = \int_0^1 \left(\int_0^v 8wv dw \right) dv = 8 \int_0^1 \left[\frac{w^2}{2} \right]_0^v dv = \\ &= 4 \int_0^1 v^3 dv = 4 \left[\frac{v^4}{4} \right]_0^1 = 1 \end{aligned}$$



Esercizio 3

Esercitazioni
Lezione 4
05/11/09

Soluzione 3b

- Analogamente all'esercizio 2c, facendo attenzione a come si fanno gli integrali, si dimostra che:

$$E(X_1) = \mu_{X1} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} w f(w, v) dw dv = \int_0^1 \int_0^v 8w^2 v dw dv = \frac{8}{15}$$

$$E(X_2) = \mu_{X2} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v f(w, v) dw dv = \int_0^1 \int_0^v 8wv^2 dw dv = \frac{4}{5}$$

$$E[(X_1 - \mu_{X1})(X_2 - \mu_{X2})] = \int_0^1 \int_0^v 8wv \left(w - \frac{8}{15} \right) \left(v - \frac{4}{5} \right) dw dv \approx 0.018$$



Esercizio 4

Esercitazioni
Lezione 4
05/11/09

Esercizio 4

- Sia $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ una VA vettoriale Gaussiana con:

$$\mu = (0, 0, 1) \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- Determinare la probabilità dei seguenti eventi:
 - a. $\{y_1 \leq 0, y_2 \leq 0, -\infty < y_3 < \infty\}$
 - b. $\{-10 \leq y_1 \leq 20, 1.5 \leq y_2 \leq 1.6, -2 < y_3 \leq 4\}$



Esercizio 4

Esercitazioni
Lezione 4
05/11/09

Soluzione 4a

- Per definizione, la pdf congiunta è:

$$f_Y(\mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{\det(\mathbf{V})}} \exp\left(-\frac{((\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{y}-\boldsymbol{\mu}))}{2}\right)$$

- Svolgendo l'algebra si ha:

$$f_Y(\mathbf{y}) = \frac{1}{4\sqrt{2}\pi^{3/2}} \exp\left[-\frac{y_1^2 + y_2^2 + 4(y_3 - 1)^2}{2}\right]$$



Esercizio 4

Esercitazioni
Lezione 4
05/11/09

- La probabilità dell'evento $\{y_1 \leq 0, y_2 \leq 0, -\infty < y_3 < \infty\}$ si calcola come:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 \frac{1}{4\sqrt{2\pi}^{3/2}} \exp \left[-\frac{y_1^2 + y_2^2 + \frac{(y_3 - 1)^2}{4}}{2} \right] dy_1 dy_2 dy_3 =$$

Prodotto di tre
Gaussiane

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_1^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_2^2}{2}} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_3 - 1)^2}{8}} dy_1 dy_2 dy_3 =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_3 - 1)^2}{8}} dy_3 \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_2^2}{2}} dy_2 \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_1^2}{2}} dy_1 =$$

Il primo
integrale è
banale

$$1 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 0.25$$



Esercizio 4

Esercitazioni
Lezione 4
05/11/09

Soluzione 4b

- La probabilità dell'evento $\{-10 \leq y_1 \leq 20, 1.5 \leq y_2 \leq 1.6, -2 < y_3 \leq 4\}$ si calcola come:

$$\int_{-2}^4 \int_{1.5}^{1.6} \int_{-10}^{20} \frac{1}{4\sqrt{2\pi}^{3/2}} \exp \left[-\frac{y_1^2 + y_2^2 + \frac{1}{4}(y_3^2 - 1)^2}{2} \right] dy_1 dy_2 dy_3 =$$

$$\int_{-2}^4 \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y_3^2 - 1)^2}{8}} dy_3 \underbrace{\int_{1.5}^{1.6} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_2^2}{2}} dy_2}_{0.0120} \underbrace{\int_{-10}^{20} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_1^2}{2}} dy_1}_{\sim 1} =$$

$$\underbrace{\int_{-1.5}^{1.5} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz}_{0.8664} \cdot 0.0120 \cdot 1 = 0.8664 \cdot 0.0120 \cdot 1 = 0.0104$$

C'è una Gaussiana non standard
Trasformiamo l'evento per la
standard

$$\begin{aligned} &\{-2 \leq y_3 \leq 4\} \\ &\downarrow \\ &\left\{ \frac{-2-1}{2} \leq z \leq \frac{4-1}{2} \right\} \\ &\downarrow \\ &\left\{ \frac{-3}{2} \leq z \leq \frac{3}{2} \right\} \end{aligned}$$



Teorema del limite centrale

Esercitazioni
Lezione 4
05/11/09

- La probabilità di un evento quando una VA non è di tipo Gaussiana, può essere calcolata utilizzando il teorema del limite centrale

TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE

Sia X_1, X_2, \dots una qualunque sequenza di VA indipendenti ed identicamente distribuite con media finita μ e varianza finita σ^2 . Sia

$$Z_n = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \left(= \frac{\frac{1}{n} \sum X_i - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{\sum X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{S - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \right)$$

denotiamo con F_n la CDF di Z_n , e con Φ la CDF GAUSSIANA IN FORMA STANDARD. Allora, per ogni valore fissato di $z \in \mathbb{R}$, al divergere di n si ha: $P\{Z_n \leq z\} = F_n(z) \rightarrow \Phi(z)$



Esercizio 5

Esercitazioni
Lezione 4
05/11/09

Esercizio 5

- Si considerino 30 VA indipendenti X_i , ciascuna delle quali ha una distribuzione esponenziale:

$$f_{X_i}(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

con $\lambda = 0.1$.

Sia S la VA somma delle trenta VA X_i .

- Si determini la probabilità che S assuma valore compreso tra 300 e 420



Esercizio 5

Esercitazioni
Lezione 4
05/11/09

Soluzione 5

Perché?

$$\mu = E(X_i) = \int_0^{\infty} x \lambda e^{-\lambda x} dx = - \left[x e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = \left[\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda} = 10$$

$$\text{Var}(X_i) = E[(X_i - \mu)^2] = \left[\frac{e^{-\lambda x} (-2 + 2\lambda(\mu - x) - \lambda^2(\mu - x)^2)}{\lambda^2} \right]_0^{\infty} = \frac{(2 - 2\lambda\mu + \lambda^2\mu^2)}{\lambda^2} = 100$$

$$P\{300 \leq S \leq 420\} = P\left\{ \frac{300 - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq Z_n \leq \frac{420 - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \right\} = P\{0 \leq Z_n \leq 2.19\} = 0.4857$$

Integrazione per
parti
 $\int v du = uv - \int u dv$



Esercizio/1

Esercitazioni
Lezione 4
05/11/09

- Sia $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)$ una VA vettoriale Gaussiana con:

$$\boldsymbol{\mu} = (-0.5, 0.1, 1) \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 1.5 & a & 0 \\ a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

con a parametro reale.

- Si scriva la PDF congiunta di \mathbf{Y}
- Per $a = 0$, determinare la probabilità dei seguenti eventi:
 - $\{y_1 \leq -0.1, y_2 \geq 0, -\infty < y_3 < \infty\}$
 - $\{-0.1 \leq y_1 \leq 50, -1.5 \leq y_2 \leq -1.2, 1.1 < y_3 \leq 3.5\}$



Esercizio/2

Esercitazioni
Lezione 4
05/11/09

- Sono stati effettuati 32 esperimenti indipendenti il cui modello si ipotizza sia una VA gaussiana con media 55 e deviazione standard 2.8.
- Si determini la probabilità che la media dei risultati sia contenuta nell'intervallo $[48, 62]$.
- L'ipotesi di gaussianità è importante?