



Variabile aleatoria vettoriale

Sommario della lezione 4

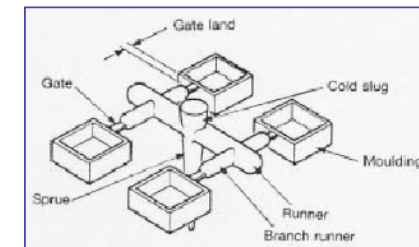
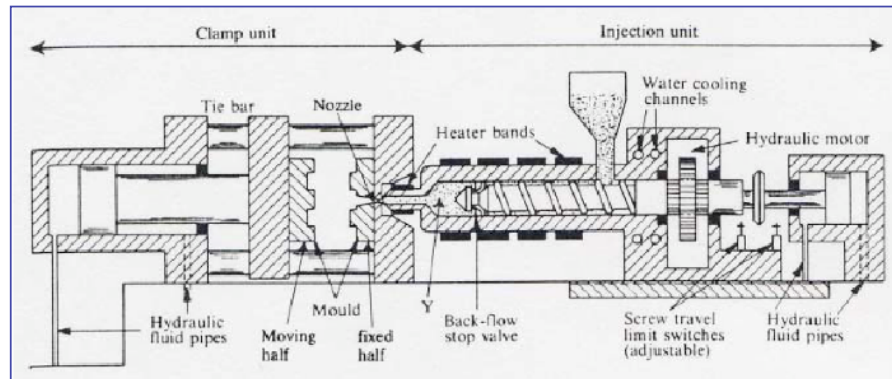
- Esperimenti combinati
- VA vettoriali
- La Gaussiana multidimensionale
 - Medie e matrice di covarianza
- Trasformazioni di VA vettoriali

Esperimenti combinati

- Variabili Aleatorie collegate allo stesso esperimento spesso si influenzano l'un l'altra.
 - ESEMPIO CENSIMENTO
 - Molte variabili come reddito, età e sesso sono di interesse sociologico in sè.
 - Quando due o più di queste variabili sono studiate simultaneamente si possono ottenere informazioni dettagliate sulla società analizzata.
 - Per esempio studiando reddito, età e sesso congiuntamente si può approfondire il tema dell'emancipazione femminile.
- Per descrivere questa influenza reciproca introdurremo la distribuzione di probabilità congiunta di due o più VA.
- Discuteremo anche la nozione di indipendenza, che modella la situazione in cui le VA non si influenzano tra loro.

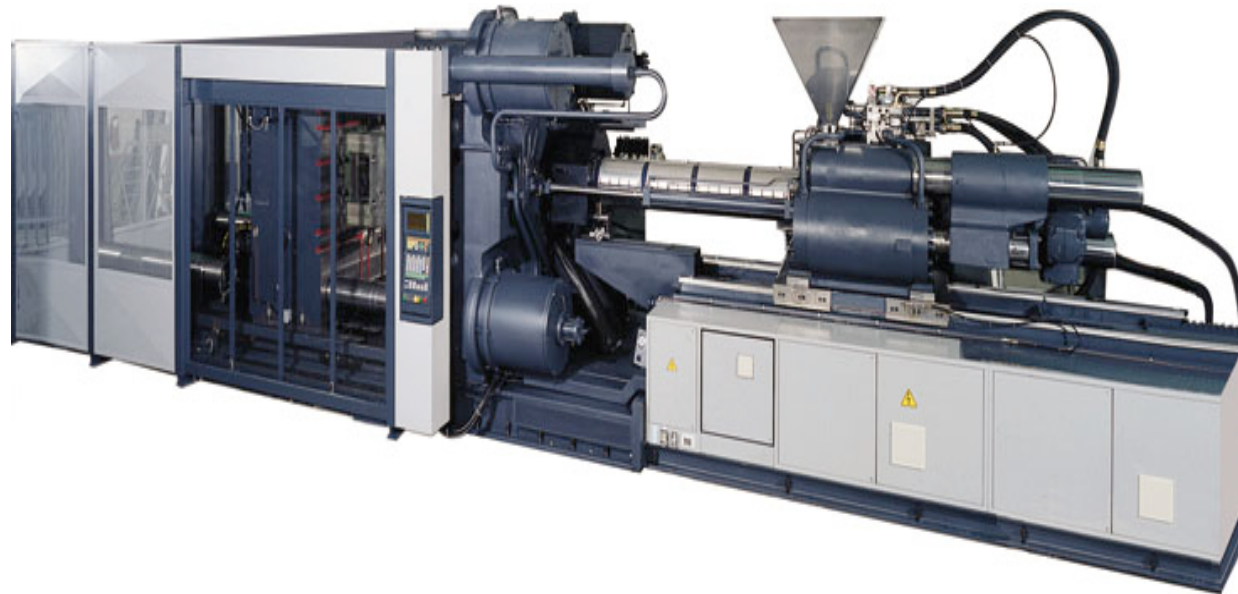
Esperimenti combinati

- Consideriamo un processo di stampaggio ad iniezione con cui si producono manufatti plastici. Immaginiamo che siamo interessati a caratterizzare gli oggetti prodotti con due dimensioni importanti (p.e., lunghezza e larghezza)
- Organizziamo una campagna sperimentale che si occupi di misurare su un campione del prodotto queste due dimensioni



Esperimenti combinati

- Macchina per lo stampaggio ad iniezione



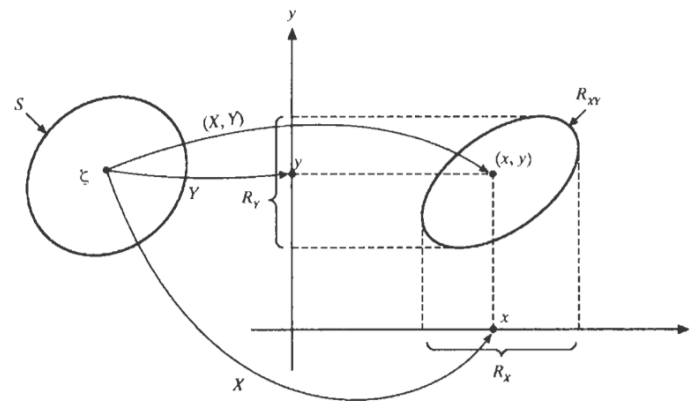
VA vettoriali

- Ogni esperimento fornirà due misure descritte da **due VA**
- Lo spazio del campione consiste di punti su un piano
- Possiamo studiare le due VA separatamente. Ma le due VA sono misure di uno stesso oggetto, e disturbi durante il processo di stampaggio (pressione, temperatura) influiscono su entrambe le dimensioni.
 - Un incremento di pressione potrebbe generare una crescita rispetto al valore desiderato sia della lunghezza che della larghezza dell'oggetto prodotto.
 - Un decremento di pressione potrebbe generare una diminuzione rispetto al valore desiderato sia della lunghezza che della larghezza dell'oggetto prodotto.
 - Quindi ci aspettiamo che osservare contemporaneamente incrementi di Lunghezza e decrementi di Larghezza sia poco probabile
- Conseguenza: **Esiste un legame tra le due VA**

VA vettoriali

- Sia S lo spazio campionario di un esperimento casuale. Siano X ed Y due VA. Allora la coppia (X, Y) è detta VA bivariata (o vettore aleatorio bidimensionale) se ogni X ed Y associa un numero reale ad ogni elemento di S
- Una VA bivariata (X, Y) può essere considerata una funzione tale che ad ogni punto ζ in S assegna un punto (x, y) nel piano. Il codominio della funzione è R definito come:

$$R_{xy} = \{(x, y); \zeta \in S \text{ and } X(\zeta) = x, Y(\zeta) = y\}$$



VA vettoriale

- Possiamo quindi considerare una VA **congiunta** (vettore) e una distribuzione di probabilità congiunta.
- La distribuzione di probabilità congiunta ci fornirà informazioni sulla probabilità che le due VA assumano valori contenuti in regioni di uno spazio bidimensionale.
- Nel caso della misura di più velocità di reazioni in un reattore differenziale ... o della misura della conversione, selettività e temperatura in un reattore integrale ... o, anche, della misura a tempi successivi della concentrazione di un reagente in un reattore STR discontinuo si incontra la necessità di considerare un esperimento combinato costituito da più esperimenti.
- **E' utile considerare combinati anche gli esperimenti condotti in condizioni ripetute o differenti**

Esperimenti combinati

- Nel caso di due soli esperimenti combinati lo spazio campionario è evidentemente: $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$
 - cioè i risultati dell'esperimento combinato sono le coppie ordinate $\omega = (\omega_1, \omega_2)$
- Allora lo spazio degli eventi deve contenere gli eventi del tipo $A_1 \times A_2$
- Come si calcola la funzione di probabilità combinata P ?
- Deve evidentemente risultare

$$P(A \times \Omega_2) = P_1(A)$$

$$P(\Omega_1 \times B) = P_2(B)$$

- non basta in genere la conoscenza delle funzioni P_1 e P_2 per calcolare la probabilità di un qualunque evento di Ω .

Esperimenti combinati, Esperimenti indipendenti

- Due esperimenti semplici si definiscono indipendenti se gli eventi $A \times \Omega_2$ ed $\Omega_1 \times B$ dello spazio prodotto sono indipendenti per ogni A e per ogni B
- Se i due esperimenti sono **indipendenti** risulta

$$P(A \times B) = P_1(A) P_2(B)$$

- La nozione di esperimenti indipendenti può essere facilmente estesa al caso di $n > 2$ esperimenti
- **Per esperimenti indipendenti la funzione di probabilità congiunta è il prodotto delle funzioni di probabilità definite sugli spazi componenti**

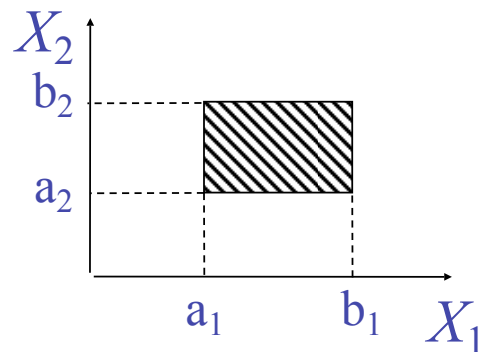
Variabili aleatorie vettoriali, Funzione distribuzione di probabilità

- Gli esperimenti combinati portano a considerare variabili aleatorie vettoriali.
- E' utile considerare combinati molti esperimenti condotti in condizioni ripetute o differenti e quindi, anche se ogni esperimento comporta la considerazione di un'unica **variabile aleatoria scalare**, è evidente che si dovranno considerare **variabili aleatorie vettoriali** ad n componenti ove n può anche essere un numero molto elevato.
- Considereremo inizialmente variabili vettoriali a due componenti

$$\mathbf{X} = (X_1, X_2).$$

V.A. VETTORIALI

- Se in un esperimento stocastico osserviamo 2 quantità dobbiamo associare all'esperimento due variabili aleatorie: X_1 ed X_2 .
- Ogni esecuzioni dell'esperimento fornisce una coppia di numeri (x_1 ed x_2)



- Dobbiamo conoscere la probabilità:

$$P\{a_1 < X_1 \leq b_1, a_2 < X_2 \leq b_2\}$$

Variabili aleatorie vettoriali, Funzione distribuzione di probabilità

- In analogia con il caso scalare la definizione della VA vettoriale $\mathbf{X}$ deve assicurare che siano definibili come eventi gli insiemi $\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\}$.
- Per caratterizzare completamente tale VA $\mathbf{X}$ occorre lo spazio di probabilità. Per determinare la funzione di probabilità P è sufficiente, come nel caso scalare, la funzione distribuzione di probabilità congiunta (CDF congiunta)

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = P \{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\}.$$

- Tale funzione è una funzione reale di due variabili reali $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$.

V.A. VETTORIALI

- La distribuzione di probabilità della VA vettoriale $\mathbf{X}$ è:

$$F(x_1, x_2) = P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\}$$

$$P\{a_1 < X_1 \leq b_1, a_2 < X_2 \leq b_2\} = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2)$$

- Come per le variabili aleatorie scalari può essere introdotta la funzione densità di probabilità congiunta (pdf congiunta) che spesso, al contrario della funzione distribuzione, ha forma analitica o forma analitica più semplice

$$F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} f(w, v) dw dv$$

$$P\{a_1 < X_1 \leq b_1, a_2 < X_2 \leq b_2\} = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(w, v) dw dv$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(w, v) dw dv = 1$$

Variabili aleatorie vettoriali, Funzione densità di probabilità

- Come nel caso scalare, nei casi di interesse in questa sede, la funzione densità di probabilità congiunta è una funzione continua (variabili aleatorie vettoriali continue) e quindi la probabilità di tutti gli eventi elementari è nulla.
 - Il calcolo di probabilità di un evento H a partire dalla pdf congiunta impone il calcolo di un integrale doppio.

V.A. VETTORIALI

DISTRIBUZIONI MARGINALI

- Quando trattiamo variabili aleatorie vettoriali è importante distinguere tra la probabilità congiunta e le probabilità di ciascuna variabile.
- Ad ogni distribuzione bidimensionale possiamo associare 2 distribuzioni monodimensionali che sono dette distribuzioni **marginali**

$$F_{X_1}(x_1) = P\{X_1 \leq x_1, -\infty < X_2 < \infty\} = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{\infty} f(w, v) dw dv$$

- La F si dice congiunta. Nel caso generico N-dimensionale si ha una F congiunta ed N marginali.
- Due VA X_1 ed X_2 di congiunta $F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)$ si dicono indipendenti se:

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2)$$

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)$$

**La probabilità
congiunta è
fattorizzata**

V.A. VETTORIALI

- Caso Gaussiano:

$$Y_1 := N(\mu_1, \sigma_1^2), \quad Y_2 := N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

$$f_{Y_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(y_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right]$$

$$f_{Y_2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(y_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]$$

- **Se le due VA sono indipendenti** allora la congiunta:

$$f_Y = \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(y_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{1}{2} \frac{(y_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]$$

- NB: la congiunta contiene 4 parametri

Coppie di variabili aleatorie gaussiane

- La VA continua (X_1, X_2) definisce una funzione che assegna un paio di numeri reali agli esiti di due esperimenti o a due risultati ottenuti in un esperimento.
- Consideriamo l'insieme $B = [a, b] \times [c, d] \subset \mathcal{R}^2$ di possibili esiti. Vogliamo calcolare la probabilità dell'evento

$$P((X_1, X_2) \in B) = P(X_1 \in [a, b], X_2 \in [c, d]) .$$

- Possiamo procedere come abbiamo già fatto nel caso scalare usando in questo caso le congiunte $F(X_1, X_2)$ oppure $f(X_1, X_2)$
- Possiamo pensare alla pdf congiunta come ad una funzione che assegna l'altitudine ad un punto identificato da (x_1, x_2)
- Le mappe topografiche mostrano le altitudini attraverso linee di isolivello possiamo descrivere la pdf con le linee di livello ovvero il luogo dei punti per cui $f(x_1, x_2)$ è costante.

Interazione

- ESEMPIO
- Dei vasi sono prodotti da un laboratorio artigianale. Un particolare modello ha forma cilindrica con altezza H e raggio R . A seguito della variabilità delle condizioni di produzione (la posizione del vaso nel forno, la tecnica manuale di produzione etc.) H ed R sono considerabili VA.
- Il volume dei vasi è anch'esso una VA: $V = \pi H R^2$
- Quale è il valore atteso di V : $E[V]$
- Sia f_V la densità di probabilità di V : $E[V] = \int_{-\infty}^{\infty} v f_V(v) dv$
- Ma: $E[V] = E[\pi H R^2] = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h r^2 f(h, r) dh dr$
 - Se H ed R sono VA indipendenti con f_H uniforme tra 25 e 35 cm ed f_R uniforme tra 7.4 e 12.5 cm quanto vale la media di V ?
 - Se non sono indipendenti?

Interazione

- Si può facilmente dimostrare che vale sempre:

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y]$$

**Linearità dell'operatore
valore atteso**

- Ma cosa succede per la varianza? $Var(X + Y) = ?$

- Applichiamo la definizione di varianza

$$Var(X + Y) = E\left[\left(X + Y - E[X + Y]\right)^2\right]$$

$$\begin{aligned}\left(X + Y - E[X + Y]\right)^2 &= \left[\left(X - E[X]\right) + \left(Y - E[Y]\right)\right]^2 \\ &= \left(X - \mu_X\right)^2 + \left(Y - \mu_Y\right)^2 + 2E\left[\left(X - \mu_X\right)\left(Y - \mu_Y\right)\right]\end{aligned}$$



$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$$

$$\begin{aligned}Cov(X, Y) &= E\left[\left(X - \mu_X\right)\left(Y - \mu_Y\right)\right] \\ Cov(X, Y) &= E[XY] - E[X]E[Y]\end{aligned}$$

Coppie di variabili aleatorie gaussiane

- Supponiamo che $X_1=N(0,1)$ e $X_2=N(0,1)$ siano due VA non necessariamente indipendenti.
- Siamo interessati a valutare il grado di dipendenza reciproca di queste due VA
- Possiamo valutare $E(X_1 X_2)$
 - Se esiste una **interazione positiva** tra X_1 e X_2 allora gli esiti sperimentali godranno della seguente proprietà
 - A valori positivi di X_1 corrisponderanno valori positivi di X_2 quindi il valore di $X_1 X_2$ tenderà ad essere positivo
 - A valori negativi di X_1 corrisponderanno valori negativi di X_2 quindi il valore di $X_1 X_2$ tenderà ad essere positivo.
 - Quindi $E(X_1 X_2) > 0$ indica una correlazione positiva.

Coppie di variabili aleatorie gaussiane

- Possiamo valutare $E(X_1 X_2)$
 - Se invece esiste una **interazione negativa** tra X_1 e X_2 allora gli esiti sperimentali godranno della seguente proprietà
 - A valori positivi di X_1 corrisponderanno valori negativi di X_2 quindi il valore di $X_1 X_2$ tenderà ad essere negativo
 - A valori negativi di X_1 corrisponderanno valori positivi di X_2 quindi il valore di $X_1 X_2$ tenderà ad essere negativo.
 - Quindi $E(X_1 X_2) < 0$ indica una correlazione negativa.
 - Ovviamente se non c'è interazione tra le due VA allora $E(X_1 X_2) = 0$

Coppie di variabili aleatorie

- Quando due o più variabili aleatorie sono definite su uno spazio di probabilità è utile misurare che relazione esse abbiano.
- Un modo comune di misurare tale relazione è la valutazione della covarianza.
- La covarianza è un valore atteso sulla distribuzione congiunta.
- La definizione di covarianza tra due VA X ed Y è indicata con $\text{cov}(X, Y)$ o σ_{XY} ed è data da:

$$\sigma_{X1X2} = E\left[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\right] = E(XY) - \mu_X\mu_Y$$

Covarianza

Coppie di variabili aleatorie

- La covarianza è una misura di un legame lineare tra VA.
- Se il legame tra VA è non lineare la covarianza potrebbe non rilevarlo.

- Covarianza e cambio di unità di misura
 - Siano X ed Y due VA, allora per quanto abbiamo visto:

$$\text{cov}(aX + b, cY + d) = ac \text{cov}(XY)$$

- La covarianza può non sempre essere ideale per esprimere la interazione tra X ed Y .
- Per questo motivo si usa spesso una versione standardizzata della covarianza detta coefficiente di correlazione.

Coppie di variabili aleatorie

- Esiste un'altra misura del legame tra VA che è spesso più facile da interpretare rispetto alla covarianza: la correlazione

$$\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

- Il coefficiente di correlazione $\rho(X, Y)$ non è influenzato da cambiamenti di unità di misura, ovvero è una grandezza adimensionale.

Coppie di variabili aleatorie gaussiane

- Siano $\mu_{x_1} = E(X_1)$ and $\sigma_{x_1}^2 = \text{Var}X_1 < \infty$, e $\mu_{x_2} = E(X_2)$ e $\sigma_{x_2}^2 = \text{Var}X_2 < \infty$.

- Possiamo valutare la **correlazione** di X_1 e X_2 :

$$\rho_{X_1 X_2} = E \left[\left(\frac{X_1 - \mu_{X_1}}{\sigma_{X_1}} \right) \left(\frac{X_2 - \mu_{X_2}}{\sigma_{X_2}} \right) \right]$$

- Questa grandezza ha le seguenti proprietà:

- $-1 \leq \rho_{X_1 X_2} \leq 1$

- $\rho_{X_1 X_2} = \pm 1$ se e solo se $\frac{X_2 - \mu_{X_2}}{\sigma_{X_2}} = \pm \frac{X_1 - \mu_{X_1}}{\sigma_{X_1}}$ ovvero se X_2 è

completamente determinata da X_1

- Se X_1 e X_2 sono indipendenti allora $\rho_{X_1 X_2} = 0$
- Se X_1 e X_2 sono normali allora $\rho_{X_1 X_2} = 0$ implica che X_1 e X_2 siano indipendenti.

Coppie di variabili aleatorie gaussiane

- E' evidente che se $\rho_{X_1X_2} = \pm 1$ allora i valori (x_1, x_2) cadono su una linea retta.
- Abbiamo praticamente scoperto che per caratterizzare una VA vettoriale gaussiana costituita da due elementi abbiamo bisogno di 5 informazioni: le due medie, le due varianze e la covarianza.

Coppie di variabili aleatorie gaussiane

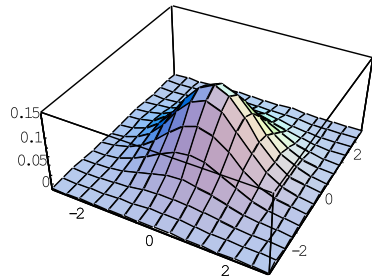
- Una coppia di variabili aleatorie $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ si dicono congiuntamente gaussiane o normali e si denotano con $\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$ se la loro pdf congiunta ha la seguente espressione

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\mathbf{V})}} \exp\left(\frac{-((\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}))}{2}\right)$$

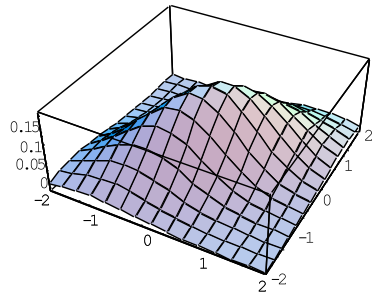
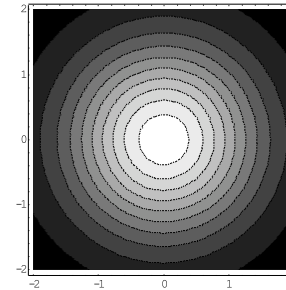
- I parametri di tale pdf sono raccolti nel vettore $\boldsymbol{\mu}$ e nella matrice $\mathbf{V}$:
 - $\boldsymbol{\mu} = (\mu_{x1}, \mu_{x2}) \hat{=} \mathbb{R}^2$ si chiama vettore delle medie ;
 - $\mathbf{V}$, matrice 2 per 2, simmetrica, definita positiva, si chiama matrice di covarianza.

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \sigma_{x1}^2 & \sigma_{x1x2} \\ \sigma_{x1x2} & \sigma_{x2}^2 \end{vmatrix}$$

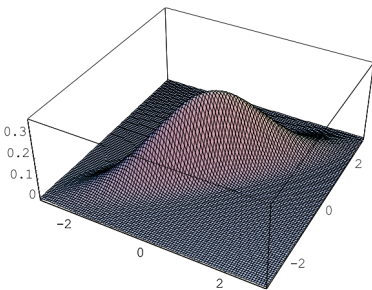
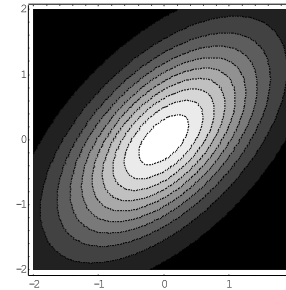
Coppie di variabili aleatorie gaussiane



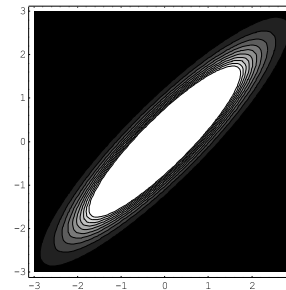
$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix} \quad \mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 0.9 \\ 0.9 & 1 \end{bmatrix} \quad \mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Caratterizzazione sintetica di una coppia di variabili aleatorie

- La caratterizzazione parziale delle coppie di variabili aleatorie utilizza momenti e momenti centrali.
- In particolare la caratterizzazione minima (che fornisce le indicazioni della tendenza centrale e della dispersione dei risultati degli esperimenti) fa uso del vettore delle medie e della matrice di covarianza
- Il vettore delle medie è il vettore: $\boldsymbol{\mu} = (\mu_{X_1}, \mu_{X_2}) = (E(X_1), E(X_2))$

Trasformazioni di coppie di variabili aleatorie

- Come per le VA scalari si devono a volte considerare trasformazioni di una VA vettoriale $\mathbf{X}$ a 2 componenti in un'altra VA $\mathbf{Z}$ a 2 componenti.

$$\mathbf{Z} = g(\mathbf{X})$$

- Come nel caso scalare il risultato più importante è che solo le trasformazioni g lineari conservano il tipo di variabile aleatoria.
- E' anche utile considerare trasformazioni di coppie di VA $\mathbf{X}$ **in una variabile aleatoria scalare Z**

$$Z = g(\mathbf{X}) = g(X_1, X_2)$$

Trasformazioni di coppie di variabili aleatorie

- Se la trasformazione è lineare

$$Z = a_1 X_1 + a_2 X_2 + b$$

- Dalla caratterizzazione minima della $\mathbf{X}$ è possibile ottenere la caratterizzazione minima della Z . Infatti:

$$\begin{aligned}\mu_Z &= a_1 \mu_{X_1} + a_2 \mu_{X_2} + b \\ \sigma_Z^2 &= a_1^2 \sigma_{X_1}^2 + a_2^2 \sigma_{X_2}^2 + 2 a_1 a_2 \sigma_{X_1 X_2}\end{aligned}$$

- Se la trasformazione $Z = g(\mathbf{X}) = g(X_1, X_2)$ non è lineare è possibile ottenere solo valori approssimati

$$\begin{aligned}\mu_Z &\cong g(\mu_X) \\ \sigma_Z^2 &\cong \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \right)^2 \bigg|_{\mu_X} \sigma_{X_1}^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial x_2} \right)^2 \bigg|_{\mu_X} \sigma_{X_2}^2 + 2 \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial x_2} \right) \bigg|_{\mu_X} \sigma_{X_1 X_2}\end{aligned}$$

Trasformazioni di coppie di variabili aleatorie

ESERCIZIO

- Supponiamo che le VA X_1 ed X_2 rappresentino la lunghezza e la larghezza di un oggetto prodotto. Assumiamo che $E(X_1)=2\text{cm}$ con deviazione standard 0.1cm e $E(X_2)=5\text{cm}$ con deviazione standard 0.2cm . Assumiamo anche che la covarianza tra X_1 e X_2 sia -0.005cm^2 . Allora la VA $Y=2X_1+2X_2$ rappresenta il perimetro dell'oggetto. Caratterizzate questa VA.

- $E(Y)=2 E(X_1)+2 E(X_2)=14\text{cm}$

- $\sigma_Y^2 = 2^2 \sigma_{X_1}^2 + 2^2 \sigma_{X_2}^2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \sigma_{X_1 X_2} = 0.16 \text{ cm}^2$.

- La deviazione standard di Y è pari a 0.4cm più alta di quelle delle misure lineari.

Vettori di variabili aleatorie

- Quanto detto per una coppia di variabili aleatorie può essere esteso a vettori di variabili aleatorie ad n componenti, $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$.
- Per caratterizzare una tale VA vettoriale è sufficiente la funzione distribuzione di probabilità $F_{\mathbf{X}}$, funzione reale di n variabili reali,

$$F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n)$$

- La funzione densità di probabilità congiunta $f_{\mathbf{X}}$, anch'essa funzione reale di n variabili reali:

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = F_{\mathbf{X}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

- La pdf congiunta, $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$, si dice anche funzione verosimiglianza del vettore $\mathbf{x}$.

Variabili aleatorie vettoriali gaussiane

- Una VA vettoriale ad n componenti $\mathbf{X}$ si dice gaussiana o normale e si denota con $\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{V})$ se la pdf congiunta ha la seguente espressione

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det(\mathbf{V})}} \exp\left(-\frac{((\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \mathbf{V}^{-1} (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu}))}{2}\right)$$

- I parametri di tale pdf sono raccolti nel vettore $\boldsymbol{\mu}$ e nella matrice $\mathbf{V}$:
 - $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$ si chiama vettore delle medie ;
 - $\mathbf{V}$, matrice n per n reale, simmetrica, definita positiva, si chiama matrice di covarianza.
- Se le componenti della VA vettoriale $\mathbf{X}$ sono indipendenti la matrice di covarianza $\mathbf{V}$ è diagonale. L'inverso è vero solo in casi particolari (per es. VA congiuntamente gaussiane).

Variabili aleatorie vettoriali gaussiane

- Come per le VA scalari si devono a volte considerare trasformazioni di VA vettoriali ad n componenti in altre VA ad m componenti
- La caratterizzazione sintetica di una VA vettoriale $\mathbf{X}$ è in genere costituita dal vettore delle medie $\boldsymbol{\mu}$ (ad n componenti) e dalla matrice di covarianza $\mathbf{V}$ (matrice $n \times n$).
- Se si dispone solo della caratterizzazione sintetica (vettore delle medie e matrice di covarianza) della VA vettoriale $\mathbf{X}$ (e quindi non è nota la sua pdf congiunta), è possibile ottenere in modo esatto la stessa caratterizzazione per la VA $\mathbf{Z}$, solo se la trasformazione $\mathbf{Z} = g(\mathbf{X})$ è lineare.

Variabili aleatorie vettoriali gaussiane

- Per esempio se si usa la trasformazione lineare

$$Z = \mathbf{a}^T \mathbf{X} + \mathbf{b}$$

dalla conoscenza delle sole media $\boldsymbol{\mu}$ e matrice di covarianza $\mathbf{V}$ della VA $\mathbf{X}$ è possibile il calcolo esatto della media μ_Z e varianza σ_Z^2 della VA Z :

$$\mu_Z = \mathbf{a}^T \boldsymbol{\mu} + \mathbf{b}$$

$$\sigma_Z^2 = \mathbf{a}^T \mathbf{V} \mathbf{a}$$

- Caso importante: $\bar{X} = \frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_N)}{N}$ con $E(X_i) = \mu$ e $Var(X_i) = \sigma^2$

$$E(\bar{X}) = \mu$$

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{N}$$

Cosa vi suggerisce?

Caratterizzazione sintetica di una VA vettoriale trasformata

- Se la trasformazione non è lineare la caratterizzazione è possibile solo in modo approssimato attraverso una linearizzazione della trasformazione g.
- Le formule sono una semplice generalizzazione del caso $n = 2$
- Particolare importanza hanno le trasformazioni di una VA vettoriale $\mathbf{X}$ in una VA scalare (caso $m=1$).
- Sono ad esempio di uso molto comune alcune VA scalari che derivano (attraverso trasformazioni non lineari) da variabili aleatorie vettoriali gaussiane $\mathbf{X}$ ad n componenti, con vettore delle medie $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ e con matrice di covarianza $\mathbf{V} = \mathbf{I}$.

Concetti importanti

- Esperimenti combinati
- Distribuzione congiunta
- Distribuzione marginale
- Covarianza e correlazione
- VA normale vettoriale