

Correzione Seconda Prova Intercorso MADS del 14/12/06

I risultati numerici si riferiscono al testo in cui la deviazione standard dell'esercizio 2 è 2.5 mm.

ESERCIZIO 1

T1 e T2 sono combinazioni lineari di 4 variabili aleatorie di uguale media e varianza. Quindi le varianze di tali stimatori si ottengono attraverso una combinazione delle varianze delle singole VA come riportato nella slide 24 del file "Mads_06_b.pdf".

Quindi:

$$\sigma_{T_1}^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \sigma^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \sigma^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \sigma^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \sigma^2 = 0.25\sigma^2$$

$$\sigma_{T_2}^2 = \left(\frac{5}{13}\right)^2 \sigma^2 + \left(\frac{4}{13}\right)^2 \sigma^2 + \left(\frac{2}{13}\right)^2 \sigma^2 + \left(\frac{2}{13}\right)^2 \sigma^2 = 0.2899\sigma^2$$

per cui è più efficiente lo stimatore T₁ avendo varianza minore.

ESERCIZIO 2

Si tratta di un problema di stima di un intervallo di fiducia dove, però, è noto l'intervallo e si chiede il calcolo del numero di prove sperimentali N.

La deviazione è standard è nota per cui:

$$\alpha = 0.05$$

$$c = \text{norminv}(1 - \alpha / 2) = 1.96$$

$$N = \left(\frac{c \cdot \sigma}{k}\right)^2 = \left(\frac{1.96 \cdot 2.5}{0.5}\right)^2 = 96.04$$

quindi sono necessarie almeno 97 prove sperimentali.

ESERCIZIO 3

Si tratta di un problema di stima dell'intervallo di fiducia. Si noti che è data la deviazione standard stimata del campione (s) che non è quella dello strumenti (σ). Quindi si tratta del caso di distribuzione Gaussiana con varianza non nota.

$$\gamma = 0.99$$

$$c = \text{tinv}(0.5(1 + \gamma), 29) = 2.7564$$

$$k = \frac{c \cdot s}{\sqrt{N}} = 0.1761$$

$$\mu \in [10.92 - 0.1761, 10.92 + 0.1761] = [10.744, 11.096]$$

ESERCIZIO 4

4.a) Si tratta di un test delle ipotesi sulla media. In particolare le ipotesi sono:

$$H_0: \mu_1 = 90$$

$$H_1: \mu_1 > 90$$

$$s_I = 0.9573$$

$$\bar{y} = 90.4$$

$$t = \frac{\bar{y} - \mu_0}{s / \sqrt{N}} = 1.4475$$

$$\alpha = 1 - \text{tcdf}(t, 11) = 0.0878$$

4.b) Si tratta di un test delle ipotesi sulla differenza di due medie. Le ipotesi sono:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1: \mu_1 > \mu_2$$

$$\alpha = 0.05$$

$$c = \text{tinv}(1 - \alpha, 20) = 1.7247$$

$$t = 1.6601$$

Essendo $t < c$ non rigetto l'ipotesi nulla.

ESERCIZIO 5

a) il modello linearizzato è:

$$\ln(p) = A + \frac{B}{T} + C \cdot \ln(T) + DT^2$$

Si tratta di una regressione multilineare. I parametri possono essere stimati attraverso il metodo dei minimi quadrati pesati:

$$\hat{\theta} = (X^T \cdot W \cdot X)^{-1} \cdot (X^T \cdot W \cdot y)$$

dove:

```
X = [ones(9, 1), (1./T)', log(T'), (T.^2)'];  
pesi = 1./P.^2;  
W = diag(1./pesi);  
A = X'*W*X;  
q = X'*W*log(P');  
theta = A\q;
```

da cui:

$$\begin{aligned}\hat{A} &= 1238.23 \\ \hat{B} &= -46183 \\ \hat{C} &= -193.97 \\ \hat{D} &= 0.000297\end{aligned}$$

b) a partire da tali stime è possibile utilizzare “fminsearch” oppure “nlinfit” per ottenere la stima definitiva del modello non lineare. Si ottiene:

$$\begin{aligned}\hat{A} &= 1104.4 \\ \hat{B} &= -41729.4 \\ \hat{C} &= -172.523 \\ \hat{D} &= 0.000261\end{aligned}$$

c) una stima della varianza è:

$$\hat{\sigma} = \frac{\sum_{i=1}^9 \left[P_i - \exp \left[A + \frac{B}{T_i} + C \cdot \ln(T_i) + DT_i^2 \right] \right]^2}{N - 4} = 19.57$$

d) il diagramma richiesto è:

