

Correzione Prima Prova Intercorso MADS del 07/11/06

I risultati numerici si riferiscono al testo in cui la varianza dell'esercizio 3 è 0.25.

ESERCIZIO 1

Una buona scelta dei campi in cui suddividere l'intervallo dei dati può essere:

```
field1 = [2.06, 2.10]
field2 = [2.10, 2.14]
field3 = [2.14, 2.18]
field4 = [2.18, 2.22]
field5 = [2.22, 2.26]
field6 = [2.26, 2.30]
field7 = [2.30, 2.34]
field8 = [2.34, 2.38]
```

Gli intervalli sono identificati dai rispettivi punti medi per cui l'ascissa dei grafici richiesti è:

```
field = [2.08, 2.12, 2.16, 2.20, 2.24, 2.28, 2.32, 2.36]
```

Con tale scelta dei campi, le frequenze assolute sono:

```
freqAss = [1, 2.5, 3, 4, 4.5, 4, 1, 1]
```

Ovviamente la somma delle frequenze assolute = dimensione del campione = 21

Le frequenze relative si ottengono dividendo per 21 le frequenze assolute:

```
freqRel = [0.0476, 0.1190, 0.1429, 0.1905, 0.2143, 0.1905, 0.0476, 0.0476]
```

Ovviamente la somma delle frequenze relative = 1

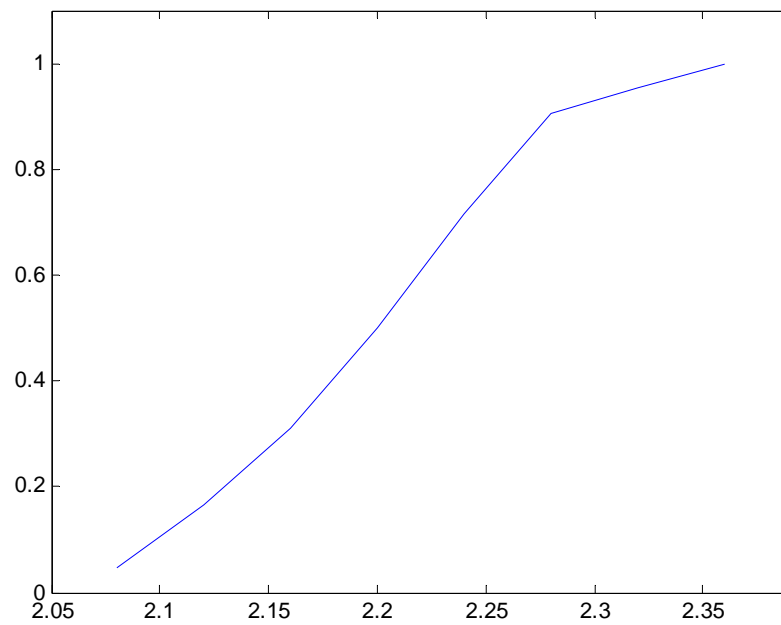
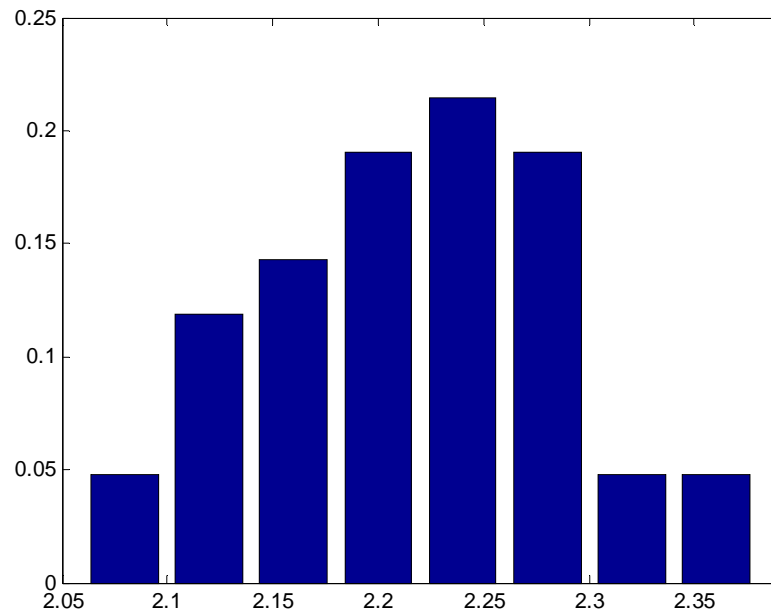
La frequenza cumulativa relativa è data da:

```
freqCumRel = [0.0476, 0.1666, 0.3095, 0.5, 0.7143, 0.9048, 0.9524, 1.0]
```

I rispettivi diagrammi si ottengo con l'ausilio di Matlab, definendo i vettori field, freqRel a freqCumRel e diagrammando:

```
bar(field, freqRel)
plot(field, freqCumRel)
```

che producono i seguenti grafici:



Media: 2.1192

Mediana: 2.20

Deviazione standard: 0.4401

Varianza: 0.1937

ESERCIZIO 2

Sono date le seguenti informazioni:

$$P\{y \leq 1.2\} = F_Y(1.2, \mu, \sigma) = 0.2$$

$$P\{y \leq 1.4\} = F_Y(1.4, \mu, \sigma) = 1 - 0.1 = 0.9$$

Si tratta di un sistema di due equazioni in due incognite. Siccome il sistema è non lineare (essendo la F_Y una funzione da *erf*) non è possibile risolvere il sistema per via algebrica.

E' conveniente quindi trasformare la Gaussiana incognita in una Gaussiana standard ovvero:

$$P\{y \leq 1.2\} = P\{z \leq (1.2 - \mu)/\sigma\} = 0.2$$

$$P\{y \leq 1.4\} = P\{z \leq (1.4 - \mu)/\sigma\} = 0.9$$

Con Matlab (o anche con le tabelle) si calcola la costante $d = (1.2 - \mu)/\sigma$ tale da verificare l'evento $P\{z \leq d\} = 0.2$ e analogamente per $P\{z \leq (1.4 - \mu)/\sigma\} = 0.9$:

$$\text{norminv}(0.2, 0, 1) = -0.842$$

$$\text{norminv}(0.9, 0, 1) = 1.2816$$

Quindi:

$$(1.2 - \mu)/\sigma = -0.842$$

$$(1.4 - \mu)/\sigma = 1.2816$$

Risolvendo il sistema si ottiene: $\mu = 1.28$ e $\sigma = 0.0942$

Infine, $P\{y > 1.5\}$ si calcola come:

$$1 - \text{normcdf}(1.5, 1.28, 0.0942) = 0.098$$

ESERCIZIO 3

a. SI

Si faccia attenzione che nel testo è data la varianza della Y e NON la deviazione standard. Quindi, applicando le formule di trasformazione:

$$\begin{aligned}\mu_Z &= b + a \mu_Y = 1.5 + 3 \cdot 0 = 1.5 \\ \sigma_Z^2 &= a^2 \sigma_Y^2 = 3^2 \cdot 0.5^2 = 2.25\end{aligned}$$

b. SI

c. essendo la Z una trasformazione lineare, la formula da applicare è:

$$f_Z(z) = \frac{f_Y(y)}{\left| \frac{dz}{dy} \right|} = \frac{f_Y[g^{-1}(z)]}{|g'(y)|_y}$$

dove:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 0.5} \exp[-2y^2]$$

e:

$$\frac{dz}{dy} = 3$$

Quindi, sostituendo nella formula, dopo qualche passaggio algebrico:

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 1.5} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(z-1.5)^2}{2.25}\right]$$

Che rappresenta una Gaussiana di media 1.5 e varianza 2.25, come ci si aspettava.

d. i) $P\{2.2 \leq z \leq 2.8\}$

Standardizzando (indicando con $K = N(0,1)$):

$$\begin{aligned}P\{(2.2 - 1.5)/1.5 \leq k \leq (2.8 - 1.5)/1.5\} &= P\{0.47 \leq k \leq 0.87\} = \\ &= P\{k \leq 0.87\} - P\{k \leq 0.47\} = \text{dalle tabelle} = 0.8078 - 0.6808 = \underline{0.127}\end{aligned}$$

d. ii) $P\{\mu_Z \leq z \leq c_1\} = 0.4$

Standardizzando (indicando con $K = N(0,1)$):

$$P\{0 \leq k \leq (c_1 - 1.5)/1.5\} = P\{0 \leq k \leq d\} = 0.4$$

dove $d = (c_1 - 1.5)/1.5$.

Si può calcolare d dalle tabelle considerando che la probabilità richiesta equivale a calcolare d tale che $P\{-d \leq k \leq d\} = 0.8$.

Il valore di $d = 1.282$ da cui $c_1 = 3.423$.

e. i) $P\{-2c_2 \leq z \leq 0\} = 0.15$

$$P\{-2c_2 \leq z \leq 0\} = P\{-d \leq z \leq 0\} = 0.15$$

dove $d = 2c_2$.

La probabilità dell'evento $P\{z \leq 0\}$ è:

$$\text{normcdf}(0, 1.5, \text{sqrt}(2.25)) = 0.1587$$

alla quale devo togliere 0.15. Quindi d è data da:

$$\text{norminv}(0.1587 - 0.15, 1.5, \text{sqrt}(2.25)) = -2.067 = -d$$

da cui $c_2 = 1.034$.

e. ii) $P\{1 \leq z \leq c_3 + \mu_Z\} = 0.15$

$$P\{1 \leq z \leq c_3 + \mu_Z\} = P\{1 \leq z \leq d\} = 0.15$$

dove $d = c_3 + \mu_Z$.

La probabilità dell'evento $P\{z \leq 1\}$ è:

$$\text{normcdf}(1, 1.5, \text{sqrt}(2.25)) = 0.3694$$

alla quale devo aggiungere 0.15. Quindi d è data da:

$$\text{norminv}(0.3694 + 0.15, 1.5, \text{sqrt}(2.25)) = 1.573 = d$$

da cui $c_3 = 0.073$.

f. NO

g. NO

h. essendo la W una trasformazione NON lineare, la formula da applicare è:

$$f_w(w) = \sum_{i=1}^{NR} \frac{f_Y(y_i)}{\left| \frac{dw}{dy} \right|_{y_i}}$$

dove:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 0.5} \exp[-2y^2]$$

e:

$$\frac{dw}{dy} = 2y - 2$$

Le radici si ottengono risolvendo l'equazione $W = Y^2 - 2Y + 1$ ovvero:

$$y_1 = 1 - \sqrt{w}$$

$$y_2 = 1 + \sqrt{w}$$

Quindi, sostituendo nella formula, dopo qualche passaggio algebrico:

$$f_w(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi w}} \exp \left\{ \left[-2(1 - \sqrt{w})^2 \right] + \exp \left[-2(1 + \sqrt{w})^2 \right] \right\}$$

da cui è evidente che non si tratta di una Gaussiana.

ESERCIZIO 4

Essendo le componenti fuori diagonale di V uguali a zero, le tre VA sono indipendenti quindi la probabilità dell'evento complessivo è uguale al prodotto della probabilità dei singoli eventi.

Risolvendo il problema con Matlab:

a. $\text{normcdf}(0, 0, 3) * \text{normcdf}(1.5, 2, 1) * 1 = \underline{0.1543}$

b. $(\text{normcdf}(3, 0, 3) - \text{normcdf}(-1, 0, 3)) * \\ * (\text{normcdf}(1.6, 2, 1) - \text{normcdf}(0.5, 2, 1)) * \\ * (\text{normcdf}(4, 1, 2) - \text{normcdf}(-3, 1, 2)) = \underline{0.1193}$

ESERCIZIO 5

a. $\mu_\alpha = 33$
 $\mu_\beta = 52$

Con la definizione delle varianze con n gradi di libertà

$$\sigma_\alpha = \sqrt{2} = 1.41$$

$$\sigma_\beta = \sqrt{3.2} = 1.79$$

b. La covarianza possiamo definirla come:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (\alpha - \mu_\alpha)(\beta - \mu_\beta)}{n} = -2.4$$

c. $\mu_q = \mu_\alpha + \mu_\beta = 85$
 $\sigma_q^2 = \sigma_\alpha^2 + \sigma_\beta^2 + 2 \sigma_{\alpha\beta} = 0.36 \rightarrow \sigma_q = 0.6$

d. Nel caso di indipendenza tra α e β , poniamo erroneamente la covarianza a zero e si ha: $\sigma_q = 2.3$

La correlazione esistente tra le misure di α e β determina un effetto nella propagazione dell'errore. Si può notare che alti valori di α sono associati a bassi valori di β . Esiste una interazione negativa, e sulla grandezza q si ha una compensazione degli errori.