

Appunti delle lezioni

Fluidodinamica e Miscelamento in Regimi Asintotici.

($Re = 0$ or $Re \ll 1$ or $Re \gg 1$) and ($Da = 0$ or $Da \ll 1$ or $Da \gg 1$)

Prof. Antonio Cavaliere

GWc`UX] Dottorato]b Ingegneria =bXi gf]UY

' !') `A Ufnc 20%\$

Napoli

SOMMARIO

INTRODUZIONE

- Caratteristiche qualitative dei campi di moto turbolento
- Caratteristiche qualitative dei processi di mescolamento e miscelamento

1.TURBOLENZA EULERIANA

- Funzioni di correlazione e di struttura
- Definizione di turbolenza euleriana
- Scale di turbolenza (esterna, interna, di Kolmogorov, di Taylor)
- Modelli di turbolenza basati su distribuzioni si scale
(le due ipotesi di similarità di Kolmogorov, frattalità)

2.TURBOLENZA LAGRANGIANA

- Interfaccia.Superfici materiali: rapporto e velocità di stiramento
- Definizione di turbolenza lagrangiana
- Relazioni cinematiche tra linee, superfici e volumi materiali con il campo di moto
- Isosuperfici.Relazione tra velocità di propagazione e campo scalare

3.MESCOLAMENTO E MISCELAMENTO IN MEZZI OMOGENEI.

- Definizione di mescolamento e miscelamento
- Strati di miscelamento unidimensionali isolati (rilassati e stirati)
- Strati di miscelamento unidimensionali multipli (saturazione ed annichilimento)
- Effetti multidimensionali
- Evoluzione laminare e turbolenta di superfici progressive
- Classificazione dei regimi di miscelamento

4. CAMPI SCALARI TURBOLENTI

- L'equazione di evoluzione turbolenta delle superfici
- L'equazione di evoluzione turbolenta della funzione di densità di probabilità dello scalare e del gradiente dello scalare.
- Modellazione di termini delle equazioni di evoluzione (verifica con DNS)

BIBLIOGRAFIA

APPENDICI

INTRODUZIONE

- Caratteristiche qualitative dei campi di moto turbolento

La caratteristica principale dei campi di moto turbolenti è l'irregolarità della loro evoluzione nel tempo. A questa proprietà sono associate l'alto livello di diffusività delle grandezze estensive (ad esempio massa, quantità di moto, entalpia) e la forte tridimensionalità su scale spaziali più piccole di quelle associate al moto nel suo insieme. Inoltre i campi di moto turbolenti sono fortemente dissipativi nel senso che parte dell'energia cinetica associata al moto disordinato viene trasformata in energia interna e pertanto deve essere reinserita a spese del moto ordinato, altrimenti il campo turbolento "degenera" in un regime laminare.

Di tutte queste caratteristiche quella che influisce più direttamente sull'evoluzione di una miscela reagente è l'elevata diffusività, perché è appunto questa proprietà che favorisce il "contatto" e la "frammistione" molecolare tra diverse specie chimiche, sia in presenza che in assenza di reazione chimica.

E' comunque difficile separare nettamente le varie proprietà, perché esse sono aspetti diversi dello stesso fenomeno (l'incoerenza del moto). Ad esempio l'alta diffusività dei campi turbolenti è legata sia all'alta irregolarità che alla tridimensionalità del moto.

E' ovvio che queste proprietà non definiscono cosa sia esattamente la turbolenza, anche se in alcuni testi scientifici la loro elencazione e descrizione dettagliata viene presentata come una possibile via per delimitare almeno le condizioni necessarie a cui debbono sottostare i campi di moto turbolento. Comunque gran parte della letteratura scientifica-didattica è equivoca sull'argomento della definizione di turbolenza. Ciò è dovuto a tre ragioni. La prima è che qualsiasi definizione rigorosa può essere criticata sulla base del fatto che esistono esempi di campi di moto che non rientrano nella definizione data. La seconda è che qualsiasi definizione di turbolenza passa attraverso l'assimilazione di altre definizioni e di trattazioni preliminari, a volte anche complesse, che impediscono la formulazione immediata di definizioni. La terza è che una trattazione alquanto rigorosa sembra risultare un esercizio accademico, che non riesce a dare un contributo informativo sulla prevedibilità dell'evoluzione di molti processi e sulla valutazione quantitativa di effetti legati alla turbolenza. In sintesi in virtù della fallacità, difficoltà ed inutilità pratica di definizioni rigorose, queste vengono relegate nel campo di corsi specialistici, in cui le valenze problematiche dell'argomento e delle definizioni possano essere apprezzate. In particolare la conoscenza del campo "della statistica dei processi random" (Monin e Yaglom, 1971) e la conoscenza di alcune tecniche associate alle trasformate di Fourier (Lesieur, 1997) sembrano essere di indispensabile propedeuticità. Ciò ha talvolta impedito, all'interno di un piano di studi di primo livello universitario, l'inserimento di un corso di "turbolenza" o, all'interno di corsi di livello superiore, di affrontare l'argomento con un approfondimento sistematico degli aspetti fisici e chimici piuttosto che quelli associati all'acquisizione degli strumenti analitico-matematici, necessari per la sua trattazione.

Lo scopo di queste note è appunto quello di presentare a studenti di dottorato i fondamenti della turbolenza, ed i processi ad essa connessi, senza l'utilizzo delle tecniche associate alle

trasformate di Fourier e sfruttando allo stesso tempo alcune nozioni di statistica, definite solo allorquando diventino utili per la comprensione generale. Pertanto la trattazione, riportata nei due paragrafi successivi, può essere presentata anche a studenti di livello inferiore, ma è assolutamente propedeutica a qualsiasi approfondimento dell'argomento.

Caratteristiche qualitative dei processi di mescolamento e miscelamento

Le diciture di "mescolamento" e "miscelamento", associate ai mezzi fluidi, sono usate in queste note come traduzione rispettivamente dei termini anglo-sassoni "stirring" e "mixing". Ad esse si associano due processi distinti, che verranno definiti nel terzo paragrafo in riferimento a quantità misurabili, mentre sono qui solo descritti qualitativamente.

Entrambi i processi si riferiscono alla compenetrazione reciproca di due specie e si distinguono in base alla scala su cui il processo evolve e, più precisamente, in base al criterio che stabilisce se le scale spaziali sono paragonabili o più piccole del cammino libero medio molecolare.

Liquidi immiscibili si possono solo mescolare, mentre i liquidi miscibili ed i gas si possono, per definizione stessa, miscelare. Specie miscibili possono anche mescolarsi. E' questo ultimo aspetto che rende difficile la comprensione e definizione del mescolamento senza aver prima introdotto alcune grandezze che saranno definite nel terzo paragrafo. Comunque si può facilmente intuire che la distinzione tra i due processi si basa, in questo caso, su grandezze che evolvono "senza diffondere" in campi diffusivi e pertanto saranno associate a grandezze "materiali", che evolvono seguendo la derivata sostanziale di alcune grandezze estensive.

Come accennato nel paragrafo precedente, il mescolamento ed il miscelamento si sviluppano più intensamente in campi di moto turbolento rispetto a campi di moto laminare. Tuttavia in quest'ultimo regime si può identificare una categoria di flussi che presentano caratteristiche di mescolamento e miscelamento paragonabile a quelle dei moti turbolenti. Si tratta dei flussi caotici a cui è associata la cosiddetta turbolenza lagrangiana che verrà definita nel secondo paragrafo. Lo studio di questi flussi ha rappresentato negli ultimi anni un'occasione di approfondimento sia del processo di mescolamento/miscelamento sia della turbolenza classica, cosiddetta euleriana. E' interessante sottolineare che non si tratta di una descrizione lagrangiana della turbolenza, (intesa quest'ultima come l'unico regime in cui evolve un "flusso irregolare"), bensì di un regime a se stante con una sua propria definizione. Pertanto è opportuno comparare i due regimi e cercare di delimitare l'estensione delle categorie dei flussi a cui essi si riferiscono.

Oltre a questo inquadramento, l'analisi dei processi in questione si è avvalsa in modo estensivo dell'impiego di altri due mezzi, maturati nell'ultimo quarto di secolo grazie alla realizzazione di potenti macchine di calcolo e di sofisticate apparecchiature per l'illuminazione ed il rilevamento di campi elettromagnetici non interferenti (p.e. laser e telecamere digitali). Essi sono la modellazione/ simulazione numerica e la diagnostica multidimensionale dei campi di moto complessi. Grazie ad essi si è potuto esplorare il comportamento dell'evoluzione temporale della distribuzione spaziale delle specie diffondenti, su una o più scale spaziali. In altre parole si sono studiate le strutture del

mescolamento/ miscelamento isolatamente o nel loro insieme tenendo conto della loro interazione reciproca.

Da questo punto di vista il nuovo mezzo di calcolo ha integrato e potenziato l'analisi dei campi diffusivi ottenuta "tradizionalmente" per mezzo dell'integrazione analitica di semplici equazioni differenziali associate a semplici strutture diffusive laminari con definite condizioni iniziali e al contorno. In virtù della comprovata capacità di descrizione dettagliata del laminare e del peso, che conseguentemente viene attribuito nei corsi di primo livello a questo argomento, è opportuno che i modelli "turbolenti" di mescolamento e di miscelamento siano quanto è più possibile sviluppati sulla base delle conoscenze accumulate nel campo del laminare. E' pertanto necessario che le singole-semplici strutture siano approfonditamente analizzate rispetto alle grandezze fluidodinamiche locali che caratterizzano i campi di moto turbolento e che i modelli complessi tengano in conto esplicitamente del comportamento di insieme e delle interazioni tra le diverse strutture. Il terzo paragrafo riporta, a questo riguardo, alcune delle fenomenologie associate a questo tipo di comportamento ed analizzate per mezzo di campi unidimensionali che colgono gli aspetti salienti dei singoli processi unitari. Mentre nel quarto paragrafo vengono presentati alcuni modelli basati sull'evoluzione delle superfici a concentrazione costante, che meglio si prestano ad un utilizzo concettuale ed operativo del grande capitale di conoscenze accumulate nel campo del laminare.

Funzioni di correlazione e di struttura

Un modo operativo di definire un campo di moto turbolento può essere sviluppato a partire dalla misura di velocità in un mezzo continuo. Questa deve essere compiuta contemporaneamente sulle tre componenti della velocità, ma per semplicità supponiamo di misurare una sola componente (u) e che le proprietà che andremo a descrivere per questa componente siano vere anche per le altre due.

Una misura di velocità è sempre riferita ad una integrazione su un volume $\Delta \underline{r}^3$ e un intervallo di tempo Δt finiti e centrati in un punto dello spazio \underline{r} e del tempo t . Si suppone che $\Delta \underline{r}$ e Δt siano più grandi del cammino libero medio molecolare e del tempo medio di collisione tra le molecole e che la misura non dipenda dalla distribuzione di velocità delle molecole. Sotto questa ipotesi, che verrà discussa più avanti è possibile misurare una $u(\underline{r}, t)$, che, come quella esemplificata in fig. 1.1, è per un punto fissato dello spazio ($\underline{r} = \underline{r}^*$) funzione solo del tempo.

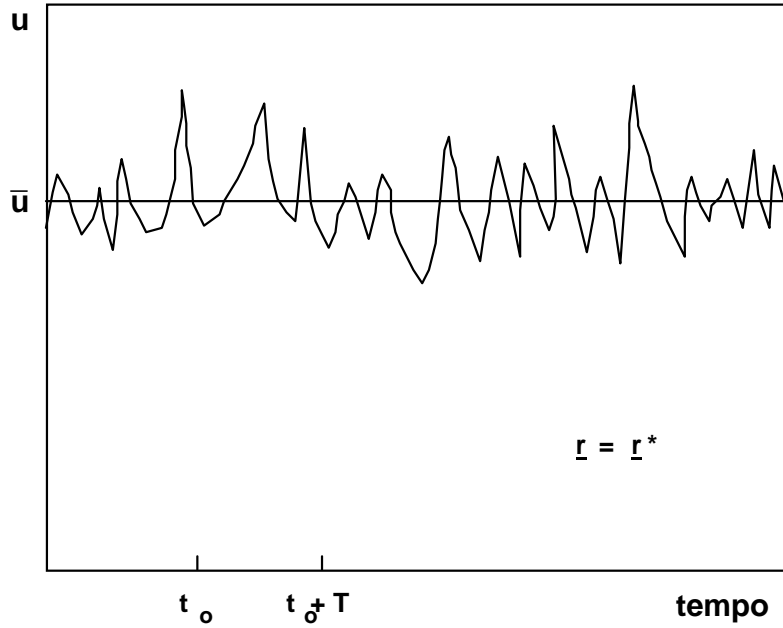


Figura 1.1 Esempio di evoluzione temporale di una componente di velocità e del suo valore medio in un punto fissato nello spazio.

Nel caso in cui questa funzione oscilli intorno ad un valore medio, è possibile definire una velocità media \bar{u} come il limite per T tendente all'infinito dell'integrale della funzione $u(t)$ tra un generico tempo t_0 ed un tempo t_0+T , diviso per l'intervallo di tempo T

$$\bar{u} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) dt \quad (1.1)$$

In questo caso il valore istantaneo della velocità può essere scomposto in due parti \bar{u} e u'

$$u(t) = \bar{u} + u'(t) \quad (1.2)$$

dove $u'(t)$ è una delle tre componenti delle fluttuazioni di velocità. Analogamente si possono definire l'energia cinetica media e turbolenta associata alla componente di velocità u . Se questa è, ad esempio, la componente lungo l'asse cartesiano x , l'energia cinetica per unità di massa può essere scritta come:

$$\bar{e}_x = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{1}{2} (u + u')^2 dt = \frac{1}{2} (\bar{u}^2 + \overline{u'^2}) = K_x + k_x \quad (1.3)$$

dove il segno orizzontale sulla componente fluttuante u'^2 indica l'operazione di media temporale così come è stata definita in precedenza per \bar{u} .

L'esistenza di una parte fluttuante della velocità, u' , o dell'energia cinetica k_x associati ad un dominio spaziale del campo di moto, ancora non permette di concludere che siamo in presenza di un campo turbolento. Infatti le fluttuazioni potrebbero originare da un rumore esterno, cosicché non sarebbe possibile identificarne l'aspetto di irregolarità interna, che più

di ogni altra proprietà è proprio della turbolenza. Di qui la necessità di esprimere in termini più rigorosi lo stesso concetto. Questo può essere fatto con l'aiuto di uno dei coefficienti di correlazione definiti come il rapporto della covarianza rispetto al prodotto delle deviazioni standard di due componenti fluttuanti. Per covarianza si intende la media temporale del prodotto di due qualsiasi componenti fluttuanti (per esempio a u' e v' è associata la covarianza $\overline{u'v'}$) e per deviazione standard si intende la radice della media del quadrato delle componenti fluttuanti (per esempio a u' e v' sono associate le deviazioni $\sqrt{\overline{u'^2}}$ e $\sqrt{\overline{v'^2}}$). Pertanto un coefficiente di correlazione su un singolo punto può essere espresso come $C_{u'v'}$

$$C_{u'v'} = \frac{\overline{u'v'}}{\sqrt{\overline{u'^2}}\sqrt{\overline{v'^2}}} \quad 1.4)$$

Un coefficiente di correlazione può essere definito su una sola componente fluttuante nel caso in cui si riferisca a due punti diversi dello spazio o del tempo.

Sono così definiti un coefficiente di autocorrelazione spaziale $C_{\Delta r}^{u'}$ e temporale $C_{\Delta t}^{u'}$

$$C_{\Delta r}^{u'} = \frac{\overline{u'(\underline{r},t)u'(\underline{r} + D\underline{r},t)}}{\sqrt{\overline{u'^2(\underline{r},t)}}\sqrt{\overline{u'^2(\underline{r} + D\underline{r},t)}}} \quad 1.5)$$

$$C_{\Delta t}^{u'} = \frac{\overline{u'(\underline{r},t)u'(\underline{r},t + Dt)}}{\sqrt{\overline{u'^2(\underline{r},t)}}\sqrt{\overline{u'^2(\underline{r},t + Dt)}}} \quad 1.6)$$

il limite dei quali per Δr e Δt tendenti a zero è uno.

Questi coefficienti possono assumere valore unitario anche nel caso siano funzioni periodiche del tempo o dello spazio ed i valori di Δr o Δt per cui ciò accade sono legati ai periodi P_t e P_r dalle relazioni $nP_t = \Delta t$ e $nP_r = \Delta r$, dove n è un intero qualsiasi. Due esempi limite di coefficienti di autocorrelazione temporale sono riportati in fig. 1.2.

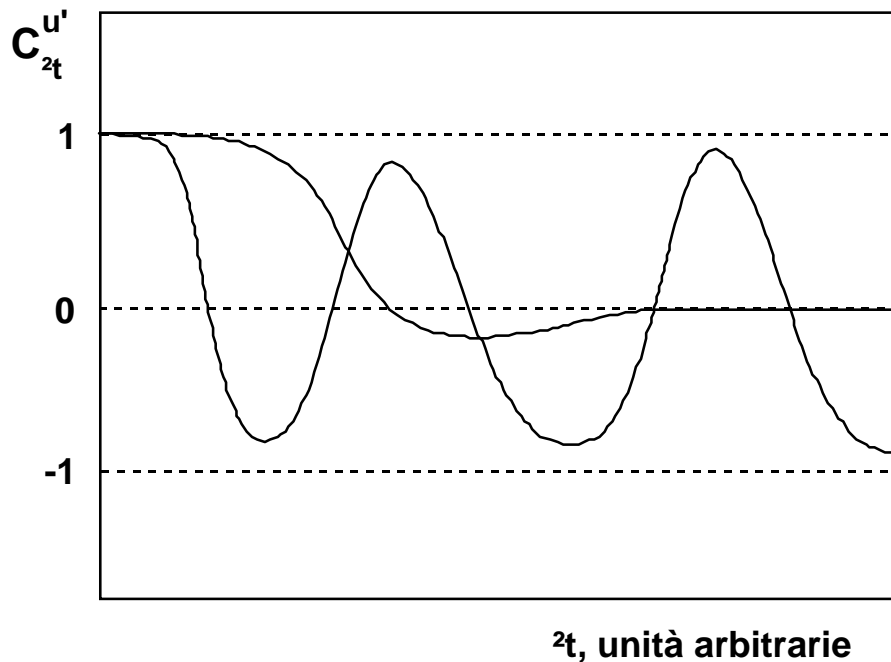


Figura 1.2 Esempio di coefficienti di autocorrelazione temporale di una componente di velocità fluttuante contro l'intervallo di tempo Δt .

La linea più spessa rappresenta un coefficiente in cui non emerge nessun periodo caratteristico mentre la linea più sottile mostra una curva con più massimi relativi di cui alcuni raggiungono quasi il valore unitario

Un'altra grandezza statistica che permette di caratterizzare i campi di moto turbolento è la velocità di struttura $v_{l,i}^{(n)}$. In accordo con Kolmogorov A.N. (1941) (il quale parla di funzione di distribuzione F_n della pulsazione di velocità) e Sreenivasan (1991) questa funzione è definita come il momento di ordine n della velocità di "struttura" su una fissata scala spaziale e cioè $v_{l,i}^{(n)} = \langle v_{l,i}^{(n)} \rangle$. La velocità di "struttura" su una fissata scala spaziale, l , e lungo una direzione i , nel caso di turbolenza non isotropa, è definita a sua volta come il valore assoluto della differenza delle componenti di velocità lungo i misurate nei due punti r (generica coordinata spaziale dove la funzione è valutata) ed $r + l$. Nel caso di turbolenza isotropa la direzione, individuata dal vettore l non ha più significato. Pertanto in questo caso la velocità di struttura è determinata una volta fissata lo scalare, l , ovverosia la scala spaziale su cui essa è valutata, e può essere rappresentata semplicemente dal simbolo $v_l^{(n)}$. Si sottintende così una direzione che viene specificata solo nel caso in cui risulti rilevante

E' interessante notare che la misura di questa funzione statistica comporta lo stesso grado di difficoltà dei coefficienti di autocorrelazione spaziale. Infatti entrambe le funzioni si basano sulla misura di componenti di velocità in due punti separati dello spazio, anche se nel primo caso si opera una differenza, mentre nel secondo caso si opera una moltiplicazione. Per entrambe le funzioni statistiche vale la considerazione che, proprio in virtù della difficoltà di misura, queste funzioni sono state generalmente poco adoperate e che la loro effettiva

misurazione si è generalmente basata sull'ipotesi, cosiddetta di Taylor, che lega l'evoluzione spaziale della velocità con quella temporale. Infine è utile sottolineare che la velocità di struttura è stata ancor meno utilizzata delle funzioni di correlazione spaziale, ma il suo valore concettuale è forse più alto, perché permette, come si vedrà, di stabilire in modo rigoroso delle relazioni tra le diverse scale spaziali-temporali e quelle ad esse collegate come le velocità caratteristiche (ovverosia le stesse velocità di struttura).

E' infine utile sottolineare che la velocità di struttura e la scala spaziale ad essa associata sono a volte chiamate velocità e dimensione caratteristiche del vortice (eddy). Questa dicitura è generalmente associata a trattazioni di tipo qualitativo e non sottendono il fatto che tutte le fluttuazioni siano necessariamente legate a strutture ben definite, come appunto i vortici.

Definizione di turbolenza euleriana

Il primo coefficiente di autocorrelazione temporale, riportato con linea scura in fig 1.2, è rappresentativo di un campo turbolento, in cui non vi è nessuna scala temporale dominante, per cui le fluttuazioni diventano statisticamente indipendenti al crescere del tempo. Al contrario la seconda curva è rappresentativa di un campo in cui vi è un grado di organizzazione nell'evoluzione del moto, per cui è difficile definire turbolento il campo nel suo insieme.

Generalizzando questo esempio è giustificata la seguente definizione di turbolenza.

Un campo di moto si definisce turbolento, in senso euleriano, quando i coefficienti di correlazione spaziale e temporale di tutte le componenti di velocità decrescono "quasi con continuità" a partire dal valore unitario e tendono a zero per $\Delta \underline{r}$ e Δt tendenti all'infinito.

Dove per "decrescono quasi con continuità" si intende che sono ammessi alcuni minimi relativi legati alle correlazioni incrociate delle velocità su grandi scale.

La presenza di massimi relativi è, comunque, l'espressione di una coerenza spaziale e temporale che in linea di principio può essere filtrata, ma che in pratica è difficile misurare a causa del carattere tridimensionale sia della turbolenza che di eventuali strutture coerenti immerse nel campo.

Scale di turbolenza

I coefficienti di autocorrelazione permettono di definire diverse scale importanti nello studio della turbolenza. Alcune di queste sono definite con l'aiuto della fig. 1.3 in cui viene riportato come esempio il coefficiente di autocorrelazione spaziale della componente u della velocità lungo l'asse cartesiano x .

La scala riportata sull'ascissa è puramente esemplificativa ed è logaritmica per mettere in evidenza che il campo di moto può essere coerente su scale molto piccole anche dell'ordine di micron ($C_{\Delta x=1 \mu m}^{u'}=1$), ma queste devono essere sempre più grandi del cammino libero medio che per gran parte dei gas in condizioni standard è dell'ordine di 10^{-7} m.

Si definiscono scala interna (l_i) ed esterna (l_e) della turbolenza i valori più grandi e più piccoli di \underline{x} per cui $C_{\Delta x}^{u'}$ sia rispettivamente più grande e più piccola di un numero piccolo a piacere. Pertanto un campo di moto è coerente su tutte le scale più piccole di l_i ; due particelle a distanze minori di l_i non alterano la loro distanza relativa nel tempo, mentre due particelle a distanze maggiori di l_e sono praticamente non correlate.

E' inoltre facilmente determinabile la scala integrale l_T detta anche scala di turbolenza.

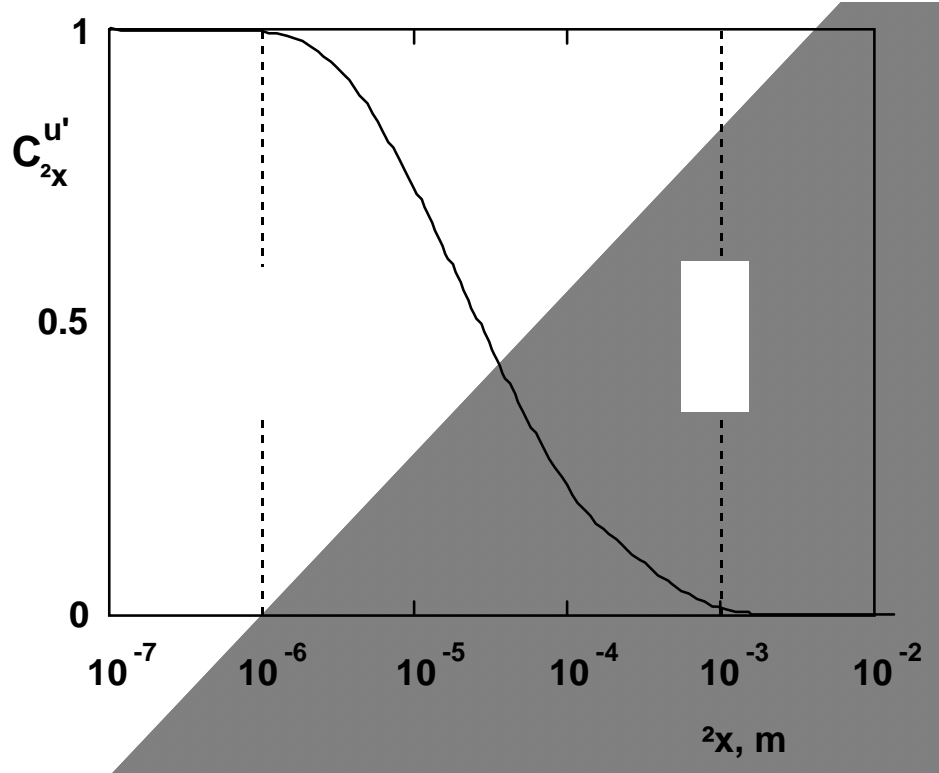


Figura 1.3 Esempio di coefficiente di autocorrelazione spaziale di una componente di velocità fluttuante contro l'intervallo spaziale di correlazione Δr .

Questa è definita come l'integrale tra zero ed infinito del coefficiente $C_{\Delta x}^u$

$$l_T = \int_0^\infty C_{\Delta x}^u d(\Delta x) \quad (1.7)$$

Le scale integrali ed esterne sono in pratica coincidenti perchè tutti i valori di $C_{\Delta x}^u$ decrescono e sono piccoli per scale maggiori di l_T .

La scala integrale può essere anche interpretata come una misura della grandezza di un insieme di molecole che si muovono con un minimo, identificabile grado di coerenza oppure come la dimensione dei vortici più grandi del campo di moto turbolento.

Analogamente a come è stata definita la scala integrale di turbolenza, può essere definita e misurata una scala temporale integrale t_T a partire dal coefficiente di correlazione $C_{\Delta t}^u$. Il

rapporto tra queste due scale (l_T e t_T) è dello stesso ordine di grandezza della radice quadratica media della fluttuazione $u_T \cong \sqrt{u'^2}$. Inoltre le stesse definizioni valgono per le scale associate alle altre due componenti della velocità. Il caso fin qui considerato è relativo alla turbolenza isotropa, per cui le scale coincidono. Negli altri casi è pratica comune riferirsi per l_T alla media aritmetica delle scale spaziali ottenute per ogni singola componente e per la scala integrale di velocità v_T alla radice quadrata della somma delle energie cinetiche fluttuanti riferite alle tre componenti di velocità, per cui $v_T = \sqrt{2(k_x + k_y + k_z)}$.

A differenza delle scale integrali, che hanno una definizione basata su quantità che sono facilmente misurabili, le scale interne non sono sempre misurabili a causa delle loro piccole dimensioni. Infatti nei campi di moto di interesse nella combustione esse possono essere anche nell'ordine di decine di micron e solo con l'avvento di tecniche ottiche bidimensionali si è potuta raggiungere una loro identificazione sperimentale. In altre condizioni, come quelle dei moti nell'atmosfera terrestre, esse sono facilmente misurabili ed hanno fornito la verifica sperimentale di alcune relazioni tra le scale interne temporali e spaziali che sono di grande utilità nella caratterizzazione del campo turbolento. La prima relazione è quasi ovvia e si basa sulla considerazione che per scale molto piccole gli effetti dovuti alla diffusività di quantità di moto prevalgono su quelli convettivi, per cui localmente all'interno di queste scale il moto deve considerarsi laminare. Ciò accade quando il numero di Reynolds, calcolato con velocità e lunghezze caratteristiche delle zone del campo dove il trasporto convettivo e diffusivo della quantità di moto si equivalgono, diventa dell'ordine dell'unità per cui $u_k l_k / \nu$, dove ν è la viscosità cinematica. Le scale u_k e l_k vengono chiamate scale di Kolmogorov dal nome del ricercatore russo che ne ha ipotizzato l'esistenza. Su queste scale è concentrata anche la dissipazione della quantità di moto, infatti l'energia cinetica per unità di massa trasferita all'energia interna nell'unità di tempo (ε) è uguale a:

$$\varepsilon = \nu \overline{\nabla \mathbf{v} : \nabla \mathbf{v}} \quad (1.8)$$

e quindi è proporzionale al flusso diffusivo di quantità di moto.

L'espressione è soprastegnata in quanto anche in questo caso rappresenta la media temporale su un intervallo tendente all'infinito.

Sotto l'ipotesi di isotropia delle fluttuazioni sulle scale piccole il gradiente della velocità può essere valutato come il rapporto tra una generica componente della velocità u_k e l'unica scala spaziale l_k . Questa ipotesi ha una forte rilevanza concettuale perchè viene considerata universalmente valida in base alla considerazione che, qualunque sia l'orientamento del campo di moto sulle scale integrali, le strutture del campo associate alle zone ad alta dissipatività sono il frutto di instabilità fluidodinamiche che non si sviluppano su direzioni preferenziali e generano strutture sempre più piccole e sempre più orientate casualmente. Pertanto si può riassumere che le scale interne, nel caso in cui siano associate ad alta dissipatività, siano statisticamente isotrope nel senso che passano attraverso un volume fissato con orientamento completamente casuale.

In base a questa considerazione l'eq. 1.8 diventa

$$\varepsilon = \nu \frac{u_k^2}{l_k^2} = \frac{u_k^3}{l_k} = \frac{\nu^3}{l_k^4} = \frac{u_k^4}{\nu} \quad (1.9)$$

a) b) c) d)

infatti l'espressione a) origina direttamente dalla valutazione dell'ordine di grandezza di $\varepsilon = \nu \overline{\nabla \mathbf{v}} : \overline{\nabla \mathbf{v}}$, mentre b), c), d), derivano da a) e dalla relazione $u_k l_k = \nu$.

Una seconda scala che ha una grande rilevanza storica e pratica, si basa sull'ipotesi che tutta la dissipazione dell'energia avvenga su una sola scala e che questa sia legata alla dissipazione dell'energia cinetica tramite la velocità turbolenta.

Per ottenere tale relazione Taylor (1931) ha dimostrato che tutte le componenti del gradiente di velocità contribuiscono alla dissipazione. Pertanto questa può essere scritta come

$$\varepsilon = \nu \overline{\nabla \mathbf{v}} : \overline{\nabla \mathbf{v}} = \nu \left[3 \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} + 6 \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2} \right] = 15 \nu \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2} \quad 1.10)$$

Dove si è sfruttata la relazione, ricavata sempre da Taylor, che la media quadratica delle componenti longitudinali del gradiente sono la metà di quelle trasversali. Da cui discende che

$$\varepsilon = 15 \nu \frac{v_T^2}{\lambda^2} \quad 1.11)$$

Nell'interpretazione di Taylor (1931) questa scala rappresenta "la dimensione caratteristica del più piccoli vortici che sono responsabili della dissipazione ". E' interessante notare che Taylor immaginava questi vortici con la stessa intensità di quelli delle scale esterne.

Di fatto nell'ipotesi di una singola scala di dissipazione, questa di Taylor rappresenta la più grande delle scale possibili, proprio perché la velocità di questo vortice è presa con la massima velocità possibile. Al contrario sotto questa ipotesi la scala di Kolmogorov è la più piccola scala dissipativa realizzabile, nel caso almeno in cui la dissipazione si realizzi omogeneamente all'interno del campo.

Modelli di turbolenza basati sulla distribuzione di scale

Gran parte dei modelli di turbolenza basati su assunzioni vincolanti la distribuzione di scale si basano a loro volta su semplificazioni, come la stazionarietà, l'omogeneità e l'isotropia, che possono essere facilmente illustrati con l'aiuto dell'equazioni di bilancio dell'energia cinetica turbolenta, k , definita in precedenza.

Questa può essere scritta (Townsend A.A., 1976) come

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla k + \nabla \cdot \bar{\mathbf{j}}_k = P - \varepsilon \quad 1.12)$$

dove il flusso diffusivo, $\bar{\mathbf{j}}_k$, la produzione, P , e la distruzione dell'energia cinetica turbolenta, ε , sono dati dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{j}}_k &= \nu \nabla k + \bar{\mathbf{v}} \frac{\bar{p}}{\rho} + \bar{\mathbf{v}}' \bar{k} \\ P &= -\bar{\mathbf{v}}' \bar{\mathbf{v}}' : \nabla \bar{\mathbf{v}} \\ \varepsilon &= \nu \overline{\nabla \mathbf{v}} : \nabla \bar{\mathbf{v}} \end{aligned} \quad 1.13)$$

Un campo di moto turbolento si dice omogeneo se la media del prodotto di qualsiasi coppia o tripla di componenti della velocità fluttuante è indipendente dalla posizione dello spazio. Pertanto in questo caso anche l'energia cinetica turbolenta sarà omogenea e di conseguenza il termine convettivo del suo bilancio sarà nullo perché è nullo il suo gradiente. Inoltre sotto l'ipotesi di trascurabilità delle fluttuazioni di pressione anche il termine che rappresenta il flusso diffusivo sarà nullo. Ciò ci porta a concludere che nel caso di turbolenza omogenea l'equazione di bilancio dell'energia cinetica turbolenta si riduce alla seguente espressione

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} = P - \varepsilon \quad 1.14)$$

Infine nel caso di campo di moto turbolento stazionario si ottiene che la produzione e la distruzione di energia cinetica turbolenta sono uguali e cioè

$$P = \varepsilon \quad 1.15)$$

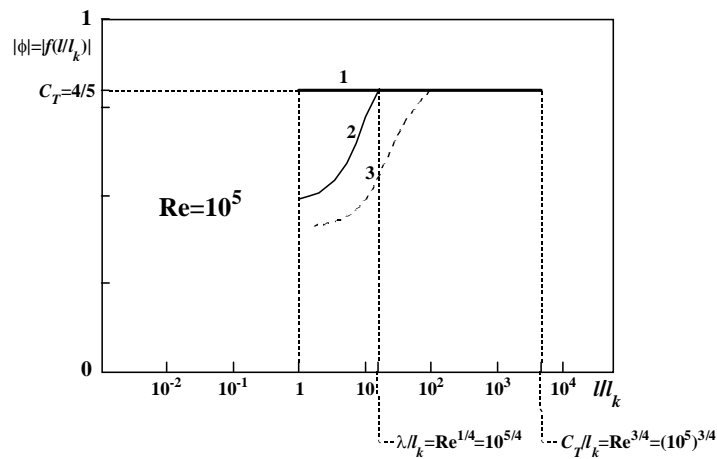


Fig.1.4

Andamento della funzione $f(l/l_k)$:

- 1) modello alla Kolmogorov,
- 2) Distribuzione di strutture tra le scale di Kolmogorov e Taylor,
- 3) Distribuzione con scale più grandi di Kolmogorov e Taylor.

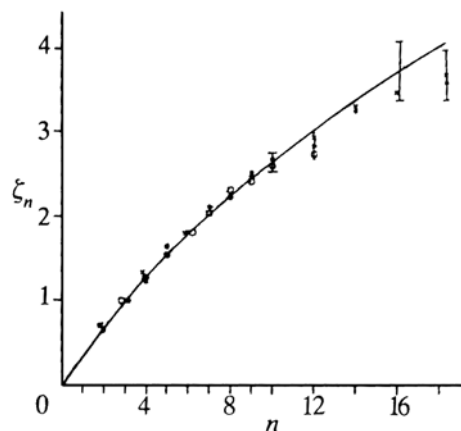


Fig.1.5

Esponente della legge di potenza, con cui la velocità di struttura dipende dall'ordine, contro l'ordine stesso. I simboli sono per flussi in condotti ed in getti da Anselmet et

al.(1984). La linea continua è da Chhabra e Sreenivasan (1991) per turbolenza atmosferica. (Il diagramma è ripreso da Sreenivasan (1991)).

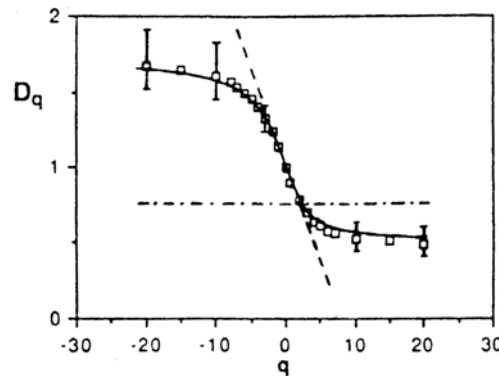


Fig.1.6 –Linea continua Dimensione generalizzata della velocità di struttura contro l'ordine
 -Linea tratteggiata modello log-normale
 -Linea tratto punto modello con distribuzione beta.
 Diagramma riprodotto da Meneveau(1987)

Questa condizione è anche la definizione della cosiddetta "turbolenza in equilibrio", pertanto rimane anche dimostrato che l'omogeneità e stazionarietà della turbolenza è condizione sufficiente per il suo essere in equilibrio.

Nel caso in cui la turbolenza sia anche isotropa, le uniche componenti del gradiente della velocità media che contribuiranno alla produzione sono quelle fuori della traccia del tensore. In particolare un flusso di puro taglio in cui solo una di queste componenti sia diversa da zero comporta che

$$k \frac{d\bar{u}}{dy} = \varepsilon = \nu \overline{\nabla \mathbf{u}'} : \nabla \mathbf{u}' \quad 1.16$$

cioè la produzione di energia cinetica turbolenta è proporzionale all'energia cinetica stessa per il gradiente della velocità media. Per una valutazione dell'ordine di grandezza di questo termine, in questi flussi di taglio si è verificato (Prandtl, Taylor) che il gradiente può essere approssimato dal rapporto v_T / l_T e pertanto è valida la seguente relazione

$$\frac{v_T^3}{l_T} = \varepsilon = 15\nu \frac{v_T^2}{l_T^2} = \frac{\nu^3}{l_k^4} \quad 1.17$$

da cui si può ricavare che i rapporti tra la scala della turbolenza, da una parte, e le scale di Taylor e di Kolmogorov, dall'altra, sono proporzionali rispettivamente al numero di Reynolds "turbolento" ($Re_T = v_T l_T / \nu$) elevato ad $1/2$ e a $3/4$, mentre questo, elevato ad $1/4$, da una misura del rapporto tra le due scale. Pur nelle approssimazioni prima citate queste relazioni danno una prima valutazione per ciò che si può intendere per scale piccole o grandi.

Il modello di turbolenza più noto (e maggiormente utilizzato), proposto da Kolmogorov nel 1941, si basa su due ipotesi ognuna di loro valida appunto in uno dei due campi di scale ("piccole" e "grandi").

Le due ipotesi di similarità sono qui riportate con traduzione quasi letteraria

1) Per turbolenza localmente isotropa le velocità di struttura sono unicamente determinate dalla viscosità cinematica e dalla dissipazione media.

2) Se le scale spaziali su cui sono calcolate le velocità di struttura sono grandi rispetto alla scala l_k , allora le velocità di struttura sono unicamente determinate dalla dissipazione media dell'energia cinetica turbolenta, ε , e non dalla viscosità cinematica, ν .

Kolmogorov definisce isotropa la condizione in cui è implicita anche l'omogeneità e discute come ciò possa avvenire solo su scale piccole.

Le due ipotesi possono essere formulate più sinteticamente in termini della seguente relazione (Sreenivasan, 1991)

$$v_l^{(n)} = (\varepsilon \cdot l)^{n/3} f\left(\frac{l}{l_k}\right) \quad 1.18$$

ovverosia la velocità di struttura, di qualsiasi ordine n , dipende, in entrambi i campi di scale, dalla radice cubica del prodotto $\varepsilon \cdot l$ elevato ad una potenza di esponente pari all'ordine del momento cui la funzione di densità di probabilità si riferisce. Infatti, dall'eq 1.17 è immediato vedere che le dimensioni dei due termini a sinistra e destra dell'uguaglianza sono uguali. La differenza tra i due campi consiste nel diverso comportamento della funzione $\varphi = f(l/l_k)$.

Allorquando fosse valida la seconda ipotesi, la funzione degenererebbe in una costante, mentre nel caso valesse la prima ipotesi questa stessa esprimerebbe implicitamente la dipendenza dalla viscosità cinematica attraverso una funzione che, dovendo essere necessariamente adimensionale, deve essere rapportata ad ε o a l . La seconda scelta è più conveniente perché φ è a sua volta ancora dipendente dalle scale di Kolmogorov ed inoltre permette di comparare il comportamento dei due campi con una trattazione unica. Infatti, nella fig. 1.4 è stato possibile riportare nello stesso diagramma un andamento esemplificativo della funzione φ in tutto il campo di scale spaziali, anche qui presentate sotto forma adimensionalizzata attraverso la scala di Kolmogorov. Il valore di φ , riportato con linea continua, è posto costante per scale più grandi della scala di Taylor. In conformità alla seconda ipotesi. Inoltre ad esso è assegnato un valore pari a $4/5$, in quanto è stato dimostrato rigorosamente da von Karman e Howart (Vassilicos 1991, pag186), che nel caso di turbolenza omogenea ed isotropa, esiste una ben precisa relazione tra le velocità di struttura del secondo e del terzo ordine, e, che, nell'ipotesi in cui i contributi di dissipazione possano realmente essere trascurabili, questa relazione si riduce alla seguente

$$v_l^{(3)} = C_T (\varepsilon \cdot l)^{3/3} = -\frac{4}{5} (\varepsilon \cdot l) \quad 1.19$$

Sul carattere di universalità di C_T , ovverosia sul fatto che essa non dipenda dal tipo di flusso considerato, si è a lungo dibattuto. E' verosimile che quanto più si sia in un campo omogeneo ed isotropo e quanto più ci si allontani dalla scala di Kolmogorov, tanto più questa costanza si verifichi. Sono significative anche le verifiche sperimentali, ottenute per altissimi numeri di Reynolds, ma non sempre è possibile riproporre la stessa verifica perché la misura del terzo momento di una qualsiasi funzione risente più fortemente dell'errore sperimentale.

E' interessante notare che, nell'esempio riportato in figura per un numero di Reynolds di 10^4 , la scala di Taylor è all'incirca solo un ordine di grandezza più grande della scala di Kolmogorov. Ciò è significativo in quanto suggerisce che le due scale cadono relativamente vicino, perciò è di grande importanza determinare almeno una di esse e comprendere la loro relazione con la scala più piccola e più grande su cui avviene la dissipazione. Si

ricordi, invece, che esse rappresentano la più grande e la più piccola tra le scale possibili quando la dissipazione è associata ad un'unica scala. E' plausibile che, quando la dissipazione sia distribuita su un campo di scale, queste due scale particolari risultino sottostimate. Ad esempio la linea tratteggiata riportata in figura rappresenta un'altra possibile scelta della distribuzione di scale tenendo conto di questa considerazione. E' sorprendente che la scala di Taylor si troverebbe, in questo caso, ad essere la più rappresentativa del campo dissipativo, perché questo corrisponderebbe all'idea originaria dello stesso Taylor.

I due andamenti della funzione ϵ nel campo dissipativo, a differenza di quello costante nel campo cosiddetto inerziale, non si basano su comportamenti asintotici ben individuati. Si è rilevato empiricamente per flussi ad altissimo numero di Reynolds, che gli andamenti tendono ad una pendenza comune e che questa è "relativamente forte", in quanto deve tenere in conto che i momenti superiori della velocità di struttura devono tendere a zero per scale infinitamente piccole. Ovviamente qualsiasi scala fluidodinamica deve essere più grande del cammino libero medio del mezzo.

Questo quadro d'insieme definisce un modello specifico di turbolenza, che potremmo definire alla Kolmogorov. Le critiche più significative, rivolte a questo modello, sono qui di seguito riportate

i) anisotropia statistica

L'isotropia del campo è parzialmente verificabile ed è, in una certa misura, valutabile sotto il punto di vista del tipo di correzione da apportare.

ii) disomogeneità istantanea

Le ipotesi di Kolmogorov implicano che le scale associate al campo dissipativo siano riferite ad una distribuzione uniforme delle strutture dissipative. Al contrario, alcune misure sperimentali e soprattutto alcune simulazioni dirette di campi di moto turbolento hanno mostrato che le strutture dissipative sono concentrate in strutture in cui almeno una dimensione (superfici), ma a volte anche due dimensioni (filamenti), sono molte più piccole rispetto a quella (o quelle) lungo cui la dissipazione realmente si dispone. Questa caratteristica conosciuta sotto il nome di intermittenza della turbolenza è stata riconosciuta, anche dallo stesso Kolmogorov.

Un'esempio di intermittenza, verificato sperimentalmente è lo stiramento di strutture vorticosi lungo l'asse del vortice. Questo è un caso rilevante perché, in una certa misura, contraddice il modello di turbolenza come processo a cascata che evolve dai vortici più grandi verso i più piccoli, trasferendo l'energia cinetica solo alle scale contigue, secondo un principio di "località". Infatti in questo caso il trasferimento può avvenire anche su scale distanti ed inoltre la struttura più grande, è quella dissipativa, cioè quella che induce lo stiramento, mentre la struttura più piccola è non dissipativa. In altre parole il ruolo delle due categorie di scale è invertito rispetto a quello previsto da un modello alla Kolmogorov. Un secondo esempio è la formazione di vortici in campi di moto di puro taglio. Una fila di vortici è, infatti, caratterizzata da zone di dissipazione intra-vortice che sono appunto associate alla scala che le genera.

L'intermittenza implica anche un'altra critica alla prima ipotesi di Kolmogorov. Questa consiste nel fatto che non esiste omogeneità delle scale dissipative, cioè le strutture

dissipative possono non essere contigue spazialmente. Pertanto l'evento che si realizzi dissipazione dell'energia cinetica è altamente probabile e la funzione di distribuzione può essere bimodale, in modo che la media non è più caratteristica delle strutture stesse. In questo caso momenti più alti di quelli relativi alla legge di eq1.19 sono necessari per poter descrivere la relazione che intercorre tra la velocità di struttura e la scala su cui è misurata.

iii) Non unicità della interpretazione della relazione velocità di struttura-dissipazione.

E' stato dimostrato da Vassilicos (1991) che l'eq. può essere giustificata non solo sulla base di un modello di vortici a cascata, ma anche da punti di accumulazione di singolarità del gradiente di velocità. Tali configurazioni si sono (Gilbert A.D,1988). Esse consistono di regioni ad alto livello di dissipazione localizzate in lamine molto sottili che convolvono seguendo strutture vorticosi di grande scala (Confrontare fig 3 e 4 di pagg 194-195 in Vassilicos). In questo caso non è sottoposto a critica la validità dell'eq1.19 ma solo la sua interpretazione.

iv)validità della relazione velocità di struttura- dissipazione solo su ordini "bassi".

L'eq,1.19 può essere scritta anche nella seguente forma

$$v_l^{(n)} = f(l_k)(\varepsilon l)^{n/3} l^{\zeta-n/3} = f(l_k)\varepsilon^{n/3} l^\zeta \quad 1.20)$$

dove l'esponente della legge di potenza tiene in conto anche della funzione $f(l/l_k)$. Tale esponente è stato misurato in campi di moto all'interno di condotti e di getti da Anselmet al (1984) per diversi momenti della funzione di struttura ed è riportato in fig. 1.5 così come è stato adattato da Sreenivasan(1991).

E' immediato notare che per momenti fino al terzo la relazione classica riportata nell'eq. rimane confermata. Solo per momenti superiore al quarto lo scarto diventa apprezzabile ed è sempre più grande al crescere del momento considerato. L'interpretazione di questo fatto si basa sul fatto che i momenti superiori sono pesati maggiormente sulla coda della funzione di distribuzione relativa ai "vortici ad alta intensità" (alta differenza di velocità). Pertanto è su queste strutture che si accusa uno scostamento della differenza di velocità rispetto al caso previsto quando si ipotizza la costanza di $f(l/l_k)$. In altre parole all'interno delle strutture a più alta intensità una parte dell'energia cinetica può essere stata trasferita direttamente verso/da altre scale. Kolmogorov (1961), per tenere in conto questa osservazione, ha ipotizzato che la dissipazione di energia cinetica sia distribuita secondo una statistica di tipo log-normale la cui varianza sia associato ad un unico altro parametro, μ . In questo caso la funzione $f(l/l_k)$ è solo funzione di l , secondo la seguente legge (Gibson,1991)

$$v_l^{(n)} = (\varepsilon l)^{n/3} l^{\zeta-n/3} = (\varepsilon l)^{n/3} l^{\zeta-\mu(n-3)/18} \quad 1.21)$$

La correzione apportata riesce a correggere parzialmente lo scostamento rilevato nel diagramma di fig1.5 ed inoltre non tiene in conto delle cause che generano questo scostamento.

In sintesi ciò che viene messo in discussione del modello di Kolmogorov non è la sua applicabilità per relazioni che coinvolgono momenti di ordine intorno al terzo (come è il caso della conservazione dell'energia cinetica), ma la sua interpretazione in termini di cascata di energia cinetica. Questa prevede che le scale più grandi e quelle più piccole siano

completamente separate, mentre la disomogeneità della dissipazione, la non unicità dell'interpretazione dell' eq.1.19 e la sua non validità per momenti più alti, concorrono tutte nel delineare un quadro in cui i due campi sono interconnessi. Al modello di turbolenza in cascata di vortici si contrapporrebbe un modello ad interazione di vortici. Tuttavia il fatto che il modello di Kolmogorov abbia trovato conferma in quasi tutti i flussi turbolenti, può suggerire che la base di generazione inerziale (il modello a cascata) sia la struttura portante di tutto il campo turbolento e che le interazioni di vortici siano una modulazione del modello di base, che influenza preferenzialmente la tipologia delle singole strutture vorticosi e della loro distribuzione spaziale. Ciò sembrerebbe non avere rilevanza pratica quando si è interessati solo al campo delle velocità e delle pressioni medie, mentre è rilevante nel caso, in cui le strutture fluidodinamiche giochino un ruolo importante nell'evoluzione di un processo. Questo accade, ad esempio, nella generazione dei campi sonori o nell'evoluzione di mezzi reagenti, in cui i tempi di reazione siano comparabile alle scale temporali fluidodinamiche. Un modello di turbolenza, che tenga conto di questa duplicità di comportamento è stato proposto da Orszag et al (1991). La turbolenza omogenea è studiata per mezzo di simulazione numeriche dirette del campo di moto (vedi fig. I pag 108 di Orszag/1991), da cui si evince il carattere intermittente e fortemente disomogeneo del campo di moto. Per mezzo di queste simulazioni sono costruite statistiche che tengano conto delle correlazioni "deboli" e "forti". Le prime sarebbero responsabili della dinamica secondo Kolmogorov, mentre le seconde terrebbero in conto della dinamica dei vortici con alta velocità di struttura, che tenderebbero ad aver un grado di organizzazione più alto. Questo approccio è simile a quello che sfrutta una caratterizzazione dei momenti che tenga conto della scala di misura del momento. E' il cosiddetto approccio multifrattale, che si basa a sua volta sull'impiego della funzione di partizione (Mandelbrot 1991), χ , ovvero sia della seguente grandezza

$$v_l^{(n)} = \sum |v(r+l) - v(r)|^n = \chi(\varepsilon, l, n, D_n) \quad 1.22)$$

La differenza principale rispetto alla legge di scala proposta da Kolmogorov, nella sua versione originaria (eq.1.19) o in quella modificata (eq.1.20), consiste nel fatto che l'esponente della potenza è una funzione non solo di uno (1/3) o due parametri (1/3 e μ) ma di un insieme di esponenti compresi con continuità tra due valori definiti (Frisch, 1991). Il valore di ζ_n può essere ottenuto come la media della distribuzione degli esponenti.

La funzione di partizione applicata a strutture della stessa scala, genera un insieme di momenti che diagrammati contro la dimensione caratteristica possono dar luogo ad una legge di potenza che a sua volta dipenda da una grandezza (denominata dimensione generalizzata, D_n) che varia col momento della funzione di partizione. Ciò è quanto è stato verificato da Sreenivasan (1987), che ha determinato sperimentalmente una potenza con esponente del tipo $(q-1) D_q$ e che ha supposto che la misura del momento della dissipazione (la funzione di partizione) sia proprio il momento della velocità di struttura. Pertanto si può porre la seguente uguaglianza

$$v_l^{(n)} = \varepsilon \left(\frac{r}{l} \right)^{(n-1)D_n} \quad 1.23)$$

D_n è stato diagrammato contro il momento su scala semi-logaritmica dagli stessi autori ed è riportato in fig.1.16. Le misure si riferiscono a flussi turbolenti di origine diversa (come scie, strati limite, atmosfera, griglie)

È interessante notare che il terzo momento è associato ad una dimensione generalizzata un poco più grande di $1/2$. Pertanto la relazione classica di Kolmogorov rimane approssimativamente verificata. La linea a tratti, che bene approssima la parte centrale del diagramma e che coincide con la derivata della dimensione generalizzata in corrispondenza del terzo momento, è la dipendenza prevista dall'espressione di Kolmogorov corretta per la distribuzione log-normale. La linea a tratto punto è associata ad un'altra distribuzione a singolo parametro, β , (Frisch U. et al 1978) che approssima meglio i valori asintotici corrispondenti agli alti momenti.

Il parametro che maggiormente controlla la distribuzione delle dimensioni generalizzate è la derivata nel punto corrispondente al momento di ordine zero. È il fattore di intermittenza, così denominato perché determina con che velocità i momenti superiori della misura della dissipazione diventano importanti. In altre parole in che misura la dissipazione è distribuita disuniformemente o con intermittenza. Le dimensioni generalizzate per valori altissimi dei momenti determinano i valori di peso che bisogna assegnare alla cascata di vortici. Nel caso specifico è stato determinato che ogni struttura si può pensare scomposta in due sottostrutture che ricevono il 70% o il 30% dell'energia cinetica. Tali valori corrispondono all'insieme di Cantor pesato su due valori che si possono ottenere dalla seguente formula

$$D_\infty = \log_2 p_2^{-1} \quad 1.24)$$

$$D_{-\infty} = \log_2 p_2^{-1} \quad 1.25)$$

Infine è istruttivo il confronto, proposto da Sreenivasan (1987), tra la dissipazione di energia cinetica misurata e quella generata con questo processo di cascata pesata. È possibile apprezzare che dodici stadi di cascata generano una distribuzione che riproduce in modo soddisfacente quella registrata sperimentalmente.

Per sintetizzare quello fin qui detto, supponiamo che le $v_l^{(n)}$ ed l rappresentino rispettivamente le velocità e dimensioni caratteristiche v_i, l_i di "vortici" in cui può essere scomposto il campo fluidodinamico. La rappresentazione è piuttosto semplicistica in quanto, come già a lungo evidenziato, le fluttuazioni del campo possono essere associate a zone spaziali esterne a zone veramente vorticose, ma l'uso di virgolette ricorderà che il significato di "vortice" in questo contesto è puramente convenzionale. Qualora si volesse essere più rigorosi, si adotti in sostituzione di "vortice" e dimensione del "vortice" la dicitura di velocità di struttura per il primo termine e di scala spaziale della struttura per il secondo termine.

Le relazioni, fin qui presentate, possono essere sintetizzate con l'aiuto del diagramma riportato in fig. 1.7. Le ascisse e le ordinate rappresentano rispettivamente le scale spaziali e le velocità caratteristiche dei "vortici" in cui può essere pensato scomposto il campo turbolento nell'intorno di un punto fissato nello spazio.

La retta tracciata con linea continua spessa in corrispondenza di Reynolds uguale ad uno rappresenta il luogo delle coppie v_i, l_i per cui il prodotto è uguale alla viscosità cinematica dell'aria, posta a sua volta uguale a $10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$.

Pertanto le coppie di valori sono quelle associate alle scale di Kolmogorov v_k, l_k e definiscono un limite inferiore delle possibili scale rilevabili in un campo turbolento.

Per ogni punto dello spazio è inoltre possibile misurare una coppia di scale esterne v_T, l_T , che a loro volta delimitano superiormente le possibili scale rilevabili. In figura è riportata esemplificativamente la coppia $v_T = 1 \text{ ms}^{-1}$ e $l_T = 10^{-1} \text{ m}$, per cui il numero di Reynolds turbolento è $Re_T = 10^4$.

E' immediato notare che il numero di Reynolds definisce la massima variazione delle scale v_i ed l_i . Per esempio in figura si può verificare che i due segmenti riportati con tratteggio, delimitanti superiormente tutte le scale plausibili, corrono per quattro ordini di grandezza (come il numero di Reynolds) prima di incontrare il segmento relativo alla scala di Kolmogorov.

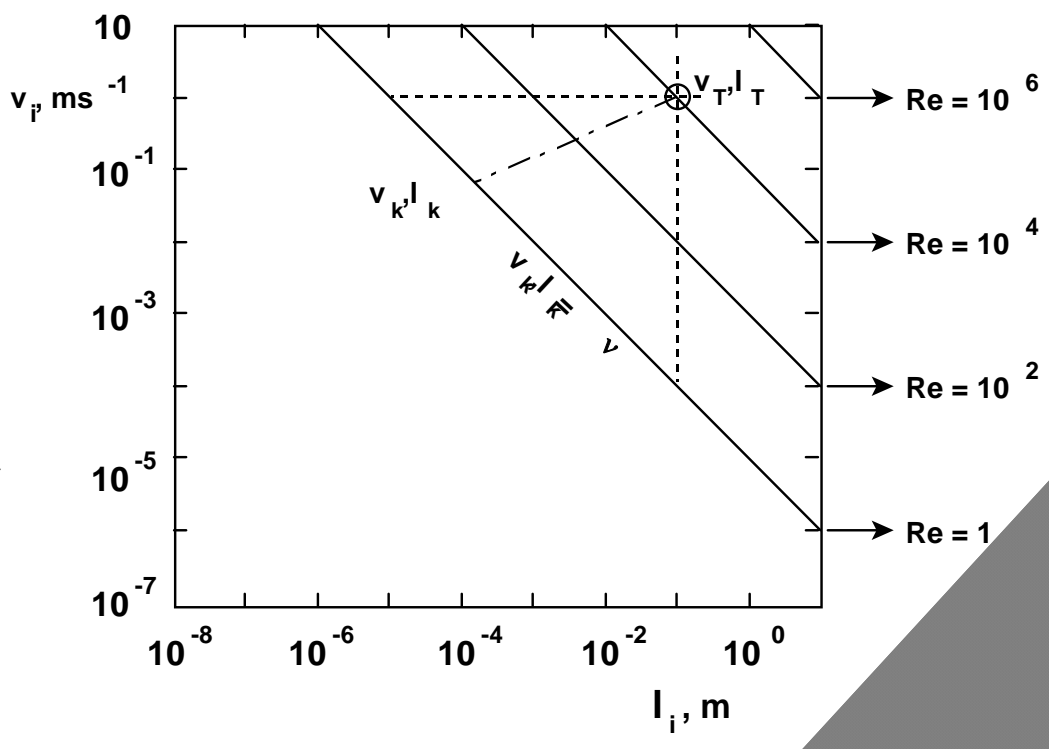


Figura 1.7 Diagramma spettrale della turbolenza.

In realtà gli spettri di scale sia della velocità che delle dimensioni sono più limitati e variano da un campo turbolento all'altro e da un punto ad un altro in un fissato campo. In questo paragrafo sono anche stati presentati modelli di turbolenza che legano le scale di velocità a quelle spaziali; si è sottolineato inoltre che questi non possono essere considerati universali e rappresentano casi limite (isotropia, omogeneità) che guidano l'analisi dei campi di moto

turbolenti e vengono a volte utilizzati come sottomodelli empirici per la chiusura di modelli nella simulazione dei campi di moto complessi.

Il modello maggiormente utilizzato sia per la sua semplicità, sia per l'aderenza alla realtà fisica nel campo delle scale prossime a quelle di Kolmogorov si basa proprio sull'assunzione prima citata di equilibrio ed isotropia locale dell'energia cinetica. In questo caso non solo le scale associate alla produzione (v_T, l_T) e alla dissipazione (v_k, l_k) dell'energia cinetica, ma anche quelle intermedie (v_i, l_i) sono legate dalla relazione

$$\frac{v_T^3}{l_T^3} = \frac{v_i^3}{l_i^3} = \frac{v_k^3}{l_k^3} \quad 1.26)$$

Una dipendenza di v_i da l_i di questo tipo è riportata sul diagramma di fig. 1.6 con la linea tratto punto a partire dalla coppia di valori v_T ed l_T scelta prima a scopo esemplificativo. Nell'esempio è evidente che le possibili scale di velocità coprono un solo ordine di grandezza a partire da 1 ms^{-1} fino a 10^{-1} ms^{-1} , mentre, i tre ordini di grandezze coperte dalle scale spaziali permettono di raggiungere scale di Kolmogorov dell'ordine di decimi di millimetro. Questo modello di turbolenza è inadeguato a descrivere le scale più vicine a quelle integrali, perchè su queste grandi scale la generazione di "vortici" è orientata dal campo di moto medio per cui le ipotesi di isotropia e di equilibrio non sono soddisfatte. In compenso è più facile seguirne l'evoluzione fluidodinamica in virtù del fatto che le scale possono essere appena un ordine di grandezza più piccole della scala complessiva del sistema reagente e quindi potrebbero direttamente essere modellate o osservate sperimentalmente. E' questo infatti l'approccio utilizzato in alcuni tipi di simulazione numerica (Large Eddy Simulation) e di diagnostica ottica (visualizzazione quantitativa bidimensionale) nello studio dei sistemi turbolenti.

Il modello di turbolenza isotropa con equilibrio locale rimane comunque un valido mezzo didattico per descrivere gli effetti che un insieme di scale fluidodinamiche generano su processi caratterizzati a loro volta da una o più scale.

Infine, come già detto più volte, esso rappresenta un modello asintotico che ha anche una sua validità predittiva, per il fatto che si riferisce ai momenti più bassi delle funzioni statistiche.

Turbolenza lagrangiana

Interfaccia. Superficie materiale . Rapporto e Velocità di stiramento

Tracciante

Definiamo tracciante di un flusso gassoso una sostanza inerte, dispersa uniformemente in una parte del flusso, con concentrazione talmente bassa da non alterare l'evoluzione termica, dinamica e fluidodinamica del flusso stesso.

In accordo con Ottino(2) il tracciante dovrà avere anche la proprietà di non diffondere ma di essere trasportato alla velocità media del campo. In tal modo la sua frazione di massa Y_t sarà costante nel tempo ovvero la derivata materiale di Y_t sarà identicamente nulla e cioè $DY_t/Dt = 0$.

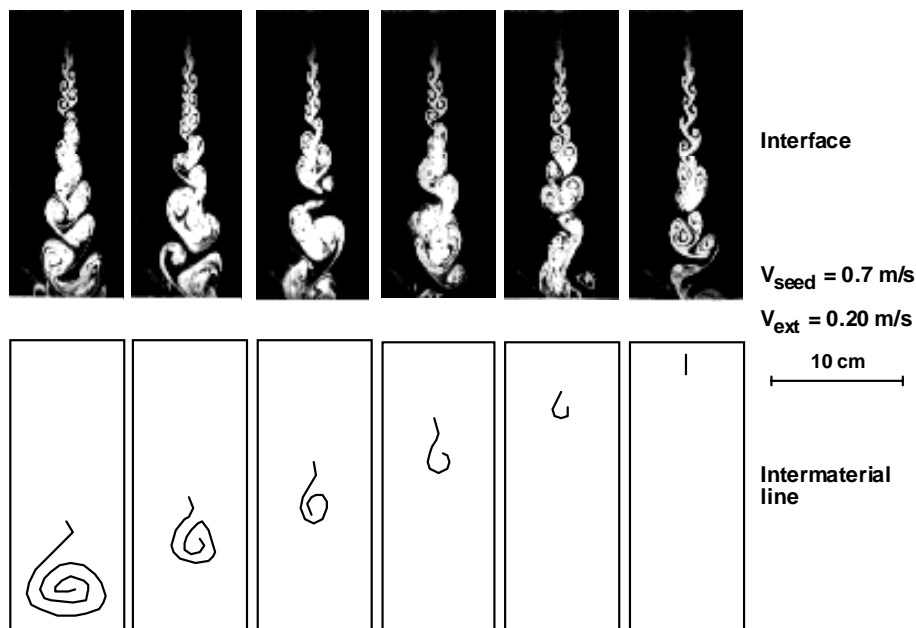


Fig2.1

E' difficile realizzare sperimentalmente un tale tracciante in un flusso gassoso perché esso non può essere un gas, in quanto quest'ultimo per definizione diffonde. Il tracciante non può essere una particella solida di dimensioni eccessivamente grandi e tali da non rispondere istantaneamente alle accelerazioni del flusso medio. In pratica l'unico tracciante, con proprietà sufficientemente simili a quelle date nella definizione, è una particella per cui il numero di Stokes sia inferiore all'unità e per cui il numero di Schmidt sia superiore a 1000. Per esempio una particella tra 0.1 e 1 μm ha dimensioni sufficientemente grandi, tali che la diffusione Browniana è ancora molto bassa, ma dimensioni sufficientemente piccole perché segua istantaneamente un flusso. A volte il termine tracciante è riferito a sostanze che diffondono (generalmente con coefficiente di diffusione molecolare pari a quello medio della

miscela in cui deve diffondere). In questo caso è bene sempre specificare “tracciante diffusivo” per non creare ambiguità con la definizione prima data. E’ infine necessario specificare che l’iniezione di un tracciante in un campo di moto noto è concettualmente molto semplice perché ogni particella del tracciante segue la traiettoria di un punto senza massa . Ovviamente l’integrazione della DY_t/Dt nel tempo può presentare problemi di integrabilità associati al possibile andamento caotico delle traiettorie. Ciò è vero anche quando il campo di moto è ben definito come nei campi laminari. Si è in presenza in questo caso della cosiddetta turbolenza lagrangiana.

Interfaccia

Quando in una porzione di un flusso è immesso un tracciante, questo si disperderà e definirà per un fissato tempo un’interfaccia. Questa è la superficie del campo di moto su cui la concentrazione del tracciante è discontinua, passando da zero ad un valore finito su una superficie infinitesima. In altre parole un’interfaccia è il luogo dei punti dello spazio in cui il ∇Y_t è infinito.

Un esempio di interfaccia , ottenuta inseminando la parte centrale di un getto piano (Cavaliere et al, 1993), è mostrato in Fig2.1. In questo caso il tracciante era costituito da particelle di TiO_2 submicroniche disperse per mezzo di un passaggio attraverso un nebulizzatore. La concentrazione delle particelle è misurata per mezzo di una tecnica di diffusione elastica della luce. Al nero corrisponde una zona in cui la concentrazione del tracciante è zero. Al bianco corrisponde una zona in cui la concentrazione del tracciante è uguale a quella dello stesso durante l’immissione. E’ interessante notare che la concentrazione del tracciante non può variare nel tempo per definizione. Ovviamente, se la risoluzione con cui la dispersione spaziale del tracciante è limitata, può essere dato il caso in cui in un volume di controllo, vi possono essere più interfacce non risolvibili. In questo caso la concentrazione appare cambiare anche all’interno dell’interfaccia apparente.

Infine può anche succedere che, nella pratica, la concentrazione del tracciante è talmente bassa da creare delle difficoltà per il suo rilevamento. Ciò avviene quando esso è trasportato in strutture filamentose così sottili che la distribuzione continua dello stesso viene a mancare. Malgrado questi inconvenienti di tipo sperimentale, l’interfaccia è una caratteristica della dispersione di un gas in un altro facilmente misurabile, perché ha un chiaro carattere euleriano. Infatti ad ogni istante si può ottenere una misura senza curarsi della intricata evoluzione lagrangiana delle particelle.

In genere al processo che porta alla estensione e dispersione dell’interfaccia viene dato il nome di mescolamento, in quanto non vengono coinvolti processi di diffusione essendo esso puramente convettivo.

Superfici materiale

Una superficie viene detta materiale quando é costituita da punti identificati con un tracciante. In altre parole una superficie é materiale quando evolve materialmente ovverosia quando segue l’evoluzione materiale (o sostanziale) dei punti che la compongono. Per esemplificare, si consideri una superficie al tempo t_0 come quella ottenuta dalla sua traccia

nella prima immagine a destra della seconda fila in Fig.2.1. Ogni punto della superficie segue una definita traiettoria. Al generico tempo t l'insieme dei punti comporrà una nuova superficie che oltre a traslare e ruotare si estenderà o si contrarrà. Nella suddetta Fig.2.1 vengono schizzate superfici materiali a partire da una superficie fissata arbitrariamente al punto t_0 .

In teoria una superficie materiale non può presentare soluzioni di continuità anche se in pratica può essere soggetta ai limiti di rilevabilità prima discussi in relazione all'interfaccia.

Una superficie materiale può, oltre che traslare e ruotare anche piegarsi, arrotolarsi nonché come detto prima stirarsi. Lo stiramento di una superficie è definito come l'andamento temporale dell'area di una superficie. Il rapporto di stiramento SR (tale sigla sta per stretch ratio) è il rapporto dell'area della superficie materiale al tempo t rispetto all'area al tempo t_0 , pertanto

$SR = A(t) / A(t_0)$. La velocità di stiramento K è la derivata logaritmica di SR ,

$$K = \frac{D}{Dt} \ln SR = \frac{1}{A} \frac{DA}{Dt} \quad (2.1)$$

e viceversa

$$SR = \exp \int_{t_0}^t K(t) dt \quad (2.2)$$

Superfici intermateriali

Una superficie intermateriale è una superficie materiale definita al tempo t_0 su un'interfaccia. Generalmente le superfici intermateriali di interesse pratico sono quelle che sono limitate in parte dal punto (o linea) di primo contatto. Per punto (o linea) di primo contatto si intende il punto (o linea) della interfaccia attraverso cui passa il tracciante con il più piccolo tempo di residenza. Ad esempio in un getto, la linea di primo contatto è il bordo dell'orifizio di uscita del getto. Infatti tutte le possibili interfacce, ottenute tracciando il getto, passano attraverso il bordo con tempo di permanenza praticamente zero. Nei getti contrapposti il punto di primo contatto è il punto di ristagno.

-Definizione di turbolenza lagrangiana

Un campo di moto si definisce in regime di turbolenza lagrangiana allorché il rapporto di stiramento di una superficie materiale, comunque scelta e comunque orientata, cresce in modo esponenziale. La definizione è relativamente recente ed è dovuta a Chaiken et al.(1987). Essa coincide con una delle definizioni di caos, quando il sistema dinamico, a cui si riferisce è appunto, un campo di moto e quando i cosiddetti coefficienti di Liapunov, che sono gli esponenti che caratterizzano l'evoluzione del sistema, coincidono con la velocità di stiramento. Pertanto un'altra definizione equivalente può essere formulata in termini di velocità di stiramento. In questo caso la media temporale di questa grandezza deve essere positiva per intervalli statisticamente significativi, nel senso che la superficie materiale può

essere soggetta per un breve periodo anche ad un restringimento, ma nel lungo periodo deve sempre stirarsi. La definizione si applica ad una superficie infinitesimale o finita. Nel secondo caso è statisticamente più improbabile che la velocità di stiramento complessiva, essendo riferita ad una media superficiale, possa diventare negativa in un campo di turbolenza lagrangiana.

Questa definizione è in un certo senso meno operativa di quella euleriana, perché è quasi impossibile misurare sperimentalmente una velocità di stiramento in campo di turbolenza euleriana. Infatti bisogna affrontare molte difficoltà di cui elenchiamo solo alcune:

i) identificazione di una superficie materiale in un mezzo omogeneo ad un tempo fissato. Infatti non è facile etichettare solo una parte di un interfaccia, che a sua volta presenta una certa difficoltà per essere rilevata.

ii) è difficile seguire l'evoluzione di una superficie materiale in un campo turbolento, perché questa, per definizione, evolve in un campo tridimensionale. La misura di una grandezza su una superficie deve realizzarsi per mezzo di un campionamento su un numero di punti che tenga conto sia della necessaria risoluzione sulla superficie, sia dell'estensione del dominio su cui la misura si svolge. In altre parole se fossimo in un campo turbolento euleriano il campo di scale, che dovrebbe essere coperto, andrebbe da quella esterna a quella di Kolmogorov. Il rapporto di queste scale è dell'ordine di $Re^{3/4}$. Ad esempio per $Re=10^4$, il rapporto è 10^3 .

Occorrerebbero, quindi, 10^3 punti di misura su un dominio monodimensionale, 10^6 punti in campo bidimensionale e ben 10^9 in un campo tridimensionale. E' difficile trovare detector e registratori digitali che possano rilevare un Giga-bite con una frequenza che permetta di risolvere una scala di turbolenza. Analoghi problemi si incontrano quando si voglia seguire una superficie materiale in un campo simulato numericamente, anche se almeno la caratterizzazione di una superficie materiale in un breve intervallo di tempo non presenta problemi concettuali. La difficoltà è insita piuttosto nella simulazione del campo turbolento in se.

La misura dello stiramento in campo bidimensionale è fattibile con gli attuali strumenti di misura e di calcolo. Infatti è possibile rintracciare diversi lavori in letteratura che riportano tali misure (p.e. Cavaliere et al., 1992).

Il fatto che, in questi lavori, il campo di moto e le misure di stiramento siano riferite a casi bidimensionali, sottende il fatto che il campo non sia turbolento, bensì laminare o transizionale. Ciò è, comunque, plausibile perché la turbolenza lagrangiana si può sviluppare anche in campi di moto euleriani. Anzi è proprio questa caratteristica che ha reso particolarmente interessanti questi campi. Infatti è possibile ottenere degli stiramenti notevoli anche in assenza di campi di moto turbolenti. Ciò ha messo in luce la dinamica intima dell'interazione tra campo di moto e scambio di materia in diverse configurazioni. Alcuni esempi di turbolenza lagrangiana in campi euleriani sono riportati in Ottino (1982).

E' interessante rilevare che l'analisi dei sistemi caotici ha messo in luce anche il campo di moto elementare che permette di ottenere uno stiramento. Questo consiste nel campo di moto che si crea nell'intorno di un punto di ristagno, che, nella teoria dei sistemi dinamici, prende il nome di punto ellittico. Una superficie materiale che si avvicina a tale punto è soggetta ad una deformazione di stiramento positivo. la presenza di più punti critici di tale natura e la

possibilità di passare da un all'altro di questi genera un campo di moto caotico. Una definizione di caos, equivalente a quella fornita prima, si basa proprio sull'intreccio delle traiettorie che passano da un bacino "ellittico" ad un'altro

Infine é necessario evidenziare che lo stiramento a cui si riferisce la definizione di turbolenza lagrangiana é sempre applicato ad una superficie materiale e non va confuso con l'evoluzione della distanza tra due punti materiali, che é stato utilizzato sin dai lavori di Taylor (1935) per la caratterizzazione lagrangiana della turbolenza euleriana. In quest'ultimo caso infatti l'evoluzione é di tipo diffusivo . Cioè la derivata materiale del quadrato della distanza tra i due punti é linearmente proporzionale al tempo. Questa differenza riflette a sua volta la complessa dinamica a cui é sottoposta la superficie materiale. Infatti perché gli estremi di una superficie o linea materiale si allontanino con legge diffusiva, occorre che sia attiva anche un notevole livello di convoluzione delle stesse. In altre parole le linee materiali sono soggette ad una sequenza di stiramenti e ripiegamenti, che si distribuiscono in zone diverse della stessa superficie, ma che sono manifestazione dello stesso processo legato all'azione di deformazione e di rotazione rigida dei gradienti di velocità.

-Relazioni cinematiche tra linee, superfici e volumi materiali con il campo di moto

La velocità di stiramento di una superficie é legata alla velocità del campo di moto in cui evolve dalla seguente relazione cinematica, ricavata rigorosamente in appendice A

$$K = \underline{\nabla} \cdot \underline{v} - \underline{\nabla} \cdot \underline{v} : \underline{nn} \quad (2.3)$$

dove \underline{n} é il versore unitario normale alla superficie δA . Questa espressione può essere letta in modo euristico come la differenza tra uno stiramento volumetrico ed uno lineare, tenendo conto che le velocità di stiramento sono "moltiplicative" in virtù della loro natura logaritmica. Per completezza sono riportate la definizione della velocità di stiramento lineare ($K_{\delta l}$), superficiale ($K_{\delta A}$) e volumetrica ($K_{\delta V}$) con le loro corrispondenti espressioni cinematiche

$$K_{\delta l} = \frac{1}{\delta l} \frac{D\delta l}{Dt} = \underline{\nabla} \cdot \underline{v} : \underline{nn} \quad (2.4)$$

$$K_{\delta A} = \frac{1}{\delta A} \frac{D\delta A}{Dt} = \underline{\nabla} \cdot \underline{v} - \underline{\nabla} \underline{v} : \underline{nn} \quad (2.5)$$

$$K_{\delta V} = \frac{1}{\delta V} \frac{D\delta V}{Dt} = \underline{\nabla} \cdot \underline{v} \quad (2.6)$$

Si può infine dimostrare (vedi appendice B), che:

$$K_{\delta A} = \underline{\nabla} \cdot \underline{v} - \underline{\nabla} \underline{v} : \underline{nn} = \underline{\nabla} \cdot \underline{v}_t - u_n C \quad (2.7)$$

-Isosuperfici: Relazione tra velocità di propagazione e campo scalare

Isosuperfici o superfici di isolivello sono le superfici su cui uno scalare è costante. A volte queste vengono definite come isobare, isoterme se si riferiscono specificamente alla pressione od alla temperatura. Mentre non trovano impiego i termini isoconcentrazione o isofrazione di massa. Per amore di concisione in questo testo per isosuperficie ci si riferirà allo scalare frazione di miscelamento Z . Le isosuperfici si spostano rispetto al fluido che le trasporta con una velocità di propagazione relativa ricavata da Pope(1988) o da Gibson (1968) essere uguale a:

$$w = \frac{Dx_n}{Dt} = \frac{Dx_n}{Dt} \frac{\nabla Z}{|\nabla Z|} = \frac{DZ}{Dt} \left(\frac{DZ}{Dx_n} \right)^{-1} \frac{\nabla Z}{|\nabla Z|} = D \frac{\nabla^2 Z}{|\nabla Z|} \quad (2.8)$$

La velocità di stiramento di una isosuperficie sarà

$$K_{\delta A} = (\underline{\nabla} \cdot \underline{v} - \underline{n} \underline{n} : \underline{\nabla} \underline{v}) + \underline{w} \underline{\nabla} \cdot \underline{n} \quad (2.9)$$

Una seconda espressione di w é la seguente (29)

$$\underline{w} = D \frac{\nabla^2 Z}{|\nabla Z|} = \frac{D}{|\nabla Z|} \underline{\nabla} \cdot (-\underline{n} |\nabla Z|) = -\frac{D}{|\nabla Z|} \underline{n} \cdot \underline{\nabla} (|\nabla Z|) \quad (2.10)$$

MESCOLAMENTO E MISCELAMENTO IN MEZZI OMOGENEI.

-Definizione di mescolamento e miscelamento

Un processo di mescolamento tra due specie è caratterizzato da un incremento delle superfici intermateriali. Come sottolineato in precedenza, la definizione risulta di facile interpretazione nel caso di specie immiscibili, come è il caso di alcune coppie di liquidi o di gran parte dei solidi. Nel caso di mezzi fluidi diffondenti la definizione va letta tenendo ben presente la definizione di superficie intermateriale, che è associata a superfici che sono unicamente trasportate convettivamente. In questo caso il mescolamento permette di dare una interpretazione a tutto il processo diffusivo caratterizzando, per così dire, la superficie attraverso cui avviene lo scambio.

Il livello di mescolamento è alto se lo stiramento delle superfici intermateriali è intenso. Pertanto il mescolamento, in regime di turbolenza lagrangiana, è, per definizione stessa, intenso.

Un processo di miscelamento tra due specie è caratterizzato dalla loro reciproca diffusione.

Il miscelamento è favorito da un intenso mescolamento, nel senso che questo permette di estendere sia le superfici intermateriali sia le stesse isosuperfici, attraverso cui le specie diffondono. Inoltre lo stiramento delle isosuperfici si riflette anche in una contrazione delle distanze che le separano per cui i gradienti degli scalari, a cui è associato il flusso diffusivo, sono intensificati. Ciò comporta un secondo effetto benefico per lo sviluppo del miscelamento.

Bisogna infine sottolineare che non sempre un alto livello di mescolamento favorisce un intenso miscelamento, perché allo stiramento è associata anche la convoluzione delle isosuperfici che possono a loro volta generare l'annichilimento delle stesse, come sarà descritto dettagliatamente in seguito.

-Strati di miscelamento unidimensionali isolati (rilassati e stirati)

Strato diffusivo instazionario

Uno strato diffusivo instazionario unidimensionale è descritto dalla seguente equazione

$$\frac{\partial Z}{\partial t} - D \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = 0 \quad 3.1)$$

Questa è l'equazione di conservazione della frazione di miscelamento Z in condizioni non reattive ed a densità costante. Nel caso in cui la condizione iniziale ($t=t_0$) sia una funzione a scalino, come quella tracciata con linea spessa nel diagramma di fig 3.1, l'evoluzione di Z si

può ottenere dall'integrazione di Z secondo la procedura classica riportata in appendice

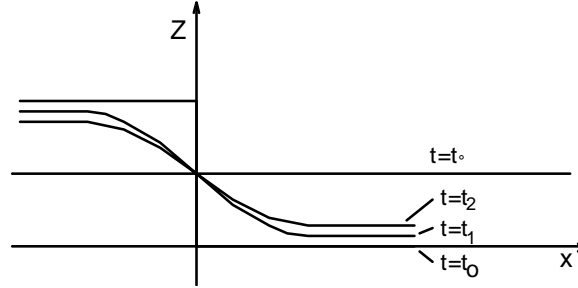


Fig.3.1

Questa consiste nell'impiego della cosiddetta variabile di Boltzmann $\xi = x / \sqrt{4Dt}$ combinazione di x e t. In tal modo con le condizioni ai limiti $Z(x=\xi=0)=Z_0$ e $Z(x \rightarrow \infty) = Z_\infty$ si ottiene una soluzione basata sulla funzione riportata nell'eqq3.2

$$a) \frac{Z - Z_0}{Z_\infty - Z_0} = \text{erf}\left(\xi = \frac{x}{\delta_m}\right)$$

$$b) \delta_m = \delta_{0.9} = \sqrt{4Dt} \quad 3.2)$$

$$c) \text{erf}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-x^2} dx$$

In fig 3.2 viene riportato anche l'andamento grafico della funzione errore (o error function) da cui si desume che la $\text{erf}(\xi)$ è zero per $\xi=0$, sale linearmente per valori inferiori a 0.6, per poi tendere asintoticamente ad 1. E' interessante notare come per valori inferiori a $\xi=0.6$ si possa approssimare $\text{erf}(\xi) = \xi$.

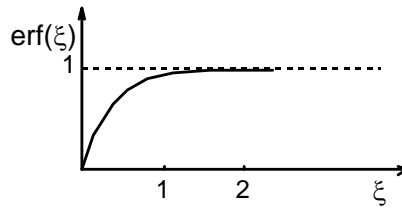


Fig.3.2

Un'espressione approssimata dello spessore dello strato diffusivo isoterma incompressibile $\delta_m = \delta_{0.05}$ è data dal valore di x per cui $Z = 0.05$ o $Z = 0.95$. Esso è dato da $\delta_{0.95} = \sqrt{4Dt}$, che è proprio la quantità con cui si adimensionalizza x nella combinazione di variabili alla Boltzmann. Pertanto $\xi = x / \sqrt{4Dt} = x / \delta_m$ vale 0 al centro dello strato diffusivo, vale 1 nella zona periferica dello stesso dove Z assume valori di $Z = 0.05$. δ_m viene definito come spessore dello strato diffusivo. Esso cresce nel tempo secondo una legge $\sqrt{4Dt}$ ovvero si sposta con velocità normale a $Z = 0.95$ pari a

$$v_\delta = \frac{\sqrt{4D}}{2} * \frac{1}{\sqrt{t}} = \sqrt{\frac{D}{t}} \quad (3.3)$$

In condizioni reattive è facile supporre che nel caso di velocità di reazione infinita tutta la reazione sia concentrata su una superficie, a $Z=Z_{st}$, infinitamente sottile e localizzata ad una distanza dalla stazione di riferimento pari a $\delta_{Z_{st}}$.

Nel caso in cui lo strato reattivo non sia infinitamente sottile ma abbia nello spazio della frazione di miscelamento uno "spessore" σ , è possibile ricavare uno spessore fisico dello strato diffusivo, ipotizzando che Z sia lineare nell'intorno di Z_{st} .

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{dZ}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{\delta_{0,9}^2}\right) \frac{1}{\delta_{0,9}} \quad (3.4)$$

$$\frac{dZ_{st}}{dx} \cong \frac{\sigma_{reac}}{\delta_r} \cong \frac{1}{e\sqrt{\pi}} \frac{1}{\delta_{0,9}} \quad Z=Z_{st} \Rightarrow x_n \cong \delta_{0,9} \quad (3.5)$$

Si procede ricavando la derivata di Z rispetto ad x così come riportato nell'eq 3.4 ricordando che la derivata della funzione errore è uguale all'integrando a meno di un fattore costante. Infine si uguaglia la derivata di Z con l'espressione σ / δ_r . Infatti nell'ipotesi di linearità di Z , la derivata è uguale al rapporto dei cateti σ e δ_r . Nel caso in cui lo strato reattivo è sulla periferia di quello diffusivo si può determinare la derivata di Z ad un valore di x uguale a $\delta_{0,95}$. Si ottiene infine che $\delta_r = 5 * \sigma * \delta_{0,95}$, ovvero sia lo strato reattivo è uguale allo spessore dello strato diffusivo per cinque volte lo spessore della zona di reazione nello spazio della frazione di miscelamento (σ). Ad esempio σ per l'ossidazione delle paraffine è circa 0.05, per cui δ_r è circa due decimi di δ_m . Una valutazione numerica può fornire un'idea di quanto possa essere grande δ_r . Consideriamo il caso in cui lo strato diffusivo evolva per un tempo di un secondo e che il coefficiente di diffusione sia $D=2.5*10^{-5} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, δ_m si estenderà per 10^{-2}m , mentre lo strato reattivo (per una paraffina) sarebbe $2*10^{-3} \text{ m}$.

Strato diffusivo convettivo stazionario

La realizzazione di uno strato diffusivo stazionario può essere realizzato solo se vi è un trasporto convettivo che impedisce la naturale crescita dello spessore dello strato. E' difficile pensare ad una condizione fluidodinamica che sia descritta dall'equazione 1-D convettiva diffusiva stazionaria, così come riportata nell'eq.3.6 in alto. Questa condizione è parzialmente soddisfatta sull'asse (o piano) di simmetria di due getti contrapposti. Infatti il campo di moto è descritto dall'eq.3.6a) per cui per $y=0$ la componente della velocità v è praticamente nulla lungo l'asse (o piano) di simmetria. Un campo diffusivo unidimensionale e stazionario può essere ottenuto da una configurazione aerodinamica generata da due getti contrapposti.

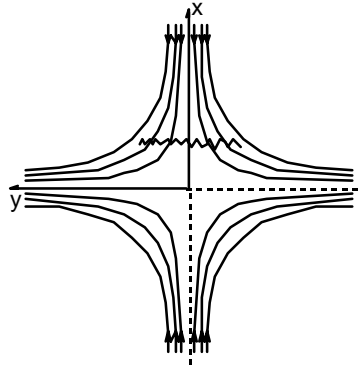


Fig. 3.3

Lungo l'asse geometrico dei getti si crea un campo convettivo-diffusivo unidimensionale. Nell'intorno del punto di ristagno, a cui è generalmente associato l'origine degli assi x ed y , il campo è descritto dalla seguente equazione

$$u \frac{dZ}{dx} - D \frac{d^2 Z}{dx^2} = 0 \quad (3.6)$$

inoltre è possibile trovare delle soluzioni analitiche di tutto il campo che possono essere così sintetizzate

$$a) \quad \begin{cases} u = -ax \\ v = ay \end{cases} \quad (3.6a)$$

per cui l'eq.3.6 può essere riscritta come

$$b) \quad -ax \frac{dZ}{dx} - D \frac{d^2 Z}{dx^2} = 0 \quad (3.6b)$$

oppure operando un cambio di variabili, come esemplificato successivamente per l'entalpia sensibile nel caso reattivo, si può ottenere la seguente

$$c) \quad \chi = 2\alpha \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)^2 = 0 \quad (3.6c)$$

Dove χ è definito come velocità di dissipazione dello scalare.

Nel caso di mezzo reattivo sull'asse x è possibile scrivere un'equazione del bilancio di entalpia sensibile così semplificata

$$\rho u \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \rho \alpha \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\sum (\dot{\rho} Y_i) h_i^0}{c_p} \quad (3.7)$$

facendo un cambio di variabile del tipo $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial Z}$ e differenziando come qui di seguito riportato:

$$\rho u \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial Z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \alpha \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial Z} \right) = \frac{\sum (\rho \dot{Y}_i) h_i^0}{c_p} \quad 3.8a)$$

$$\rho u \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial Z} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \alpha \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \frac{\partial T}{\partial Z} - \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial Z} \rho \alpha \frac{\partial Z}{\partial x} = - \frac{\sum (\rho \dot{Y}_i) h_i^0}{c_p} \quad 3.8b)$$

operando le opportune differenziazioni si ottiene ancora

$$\frac{\partial T}{\partial Z} \left[\rho u \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \alpha \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \right] - \rho \alpha \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial Z} \right) = - \frac{\sum (\rho \dot{Y}_i) h_i^0}{c_p} \quad 3.9)$$

L'espressione all'interno della parentesi quadra è uguale a zero per definizione di grandezza conservativa per cui l'eq.3.9 può essere posta (dopo aver operato la differenziazione del secondo termine al primo membro) uguale alla seguente equazione :

$$- \rho \alpha \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} - \rho \alpha \frac{\partial Z}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial Z} = - \frac{\sum (\rho \dot{Y}_i) h_i^0}{c_p} \quad 3.10)$$

infine, tenendo conto che la derivata seconda della frazione di miscelamento rispetto a se stessa ed allo spazio è uguale a zero si ottiene:

$$\rho \alpha \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} = \frac{\sum (\rho \dot{Y}_i) h_i^0}{c_p} \quad 3.11)$$

oppure in forma equivalente :

$$\chi \frac{\rho}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} = \frac{\sum (\rho \dot{Y}_i) h_i^0}{c_p} \quad 3.12)$$

dove:

$$\chi = 2 \alpha \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)^2 \quad 3.13)$$

χ prende il nome di velocità di dissipazione dello scalare Z ed ha le dimensioni dell'inverso del tempo. Quindi non si ha una produzione di entalpia o di specie chimiche indipendente dal campo fluidodinamico; la χ determina questa velocità di reazione e controlla il flusso delle specie chimiche e dell'entalpia sensibile che "alimenta" la zona di reazione. Una notevole semplificazione deriva, dalla eventuale possibilità di conoscere $Y_i = Y_i(Z)$ o $T = T(Z)$ indipendentemente da χ o come funzione nota di χ , perché in questo caso basta conoscere Z e

χ per poter conoscere tutte le velocità ($(\rho \dot{Y}_i)$). In letteratura sono noti cinque tipi di approcci per determinare $Y = Y(Z, \chi)$ o $T = T(Z, \chi)$.

Schematicamente questi approcci possono essere indicati, in accordo con il tipo di metodologia seguita o con l'ipotesi più significativa a cui sono legati, come:

- a) Zona di reazione infinitamente sottile in $Z=Z_{st}$
 - b) Ipotesi di equilibrio chimico
 - c) Ipotesi di singola reazione con velocità di reazione finita con alta energia di attivazione. Teoria asintotica
 - d) Ipotesi di reazioni multiple con velocità finite. Modellazione numerica
 - e) Approccio sperimentale.
- Le ipotesi a) e b) sono state descritte da modelli in cui Y e T sono solo funzioni di Z e non di χ .

Strato diffusivo convettivo instazionario

Consideriamo un elemento di superficie δA scelto su un'interfaccia al tempo t_0 . In Fig3.4 questo elemento è identificato con elemento di linea $\delta L(t_0)$ rappresentativo della sezione δA . L'evoluzione nel tempo di δL , in assenza di diffusione della frazione di massa del tracciante che segna δL , sarà descritta dall'insieme delle derivate materiali DY_t/Dt passanti per i punti di $\delta L(t_0)$. Tale linea (o superficie), come detto, prende il nome di linea intermateriale. In Fig.3.4 è riportata solo la traiettoria del punto mediano (P) di $\delta L(t_0)$ che passa per tre elementi δL , scelti esemplificativamente ai tempi t_1 , t_2 e t_3 .

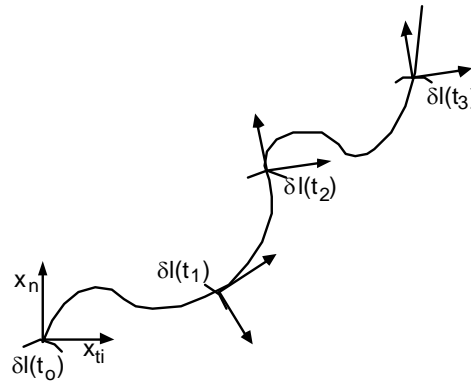


fig3.4

Consideriamo una terna di assi ortogonali x_n, x_{t1}, x_{t2} con l'origine sul punto materiale P e che orienti l'asse x_n ortogonalmente alla linea materiale. Ipotizziamo che le linee (o isosuperfici) a $Z=\text{cost}$ siano sempre parallele alla linea intermateriale e che la curvatura della linea (o superficie) intermateriale nell'intorno di P sia sempre sufficientemente piccola da poter considerare che le superfici di isolivello a frazione di massa costante siano "quasi piatte" cosicché siano valide le seguenti ipotesi:

$$\frac{\partial Z}{\partial x_n} \gg \frac{\partial Z}{\partial x_{ti}} \cong 0 \quad 3.14)$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x_n^2} \gg \frac{\partial^2 Z}{\partial x_{t1}^2} \quad (3.15)$$

Una rappresentazione di queste condizioni può essere sintetizzata con la figura seguente

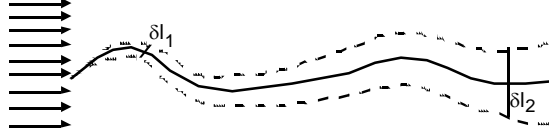


fig3.5

In questo caso l'equazione di conservazione della frazione di massa rispetto alla terna x_n, x_{t1}, x_{t2} può essere scritta, sotto l'ipotesi di ρ e D costanti, come :

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + u_n \frac{\partial Z}{\partial x_n} = D \frac{\partial^2 Z}{\partial x_n^2} \quad (3.16)$$

Sviluppando in serie di Taylor la u_n lungo la x_n e trascurando nell'espansione i termini di ordine superiori al primo, si ottiene, in accordo con Ottino(1982),

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \left(u_{n0} + \frac{\partial u_n}{\partial x_n} x_n \right) \frac{\partial Z}{\partial x_n} - D \frac{\partial^2 Z}{\partial x_n^2} = 0 \quad (3.17)$$

u_{n0} è, per scelta della terna di riferimento uguale a zero, mentre $\partial u_n / \partial x_n$ può essere approssimata alla velocità di stiramento della superficie, K , nell'ipotesi già fatta di superfici intermateriale praticamente piatta, per cui l'espressione dello stiramento $K = \nabla \cdot \underline{v} + u_n C$ diventa $K = \nabla \cdot \underline{v}$. In mezzi incompressibili e stazionari (ultima approssimazione) si può porre $\nabla \cdot \underline{v} = -\partial u_n / \partial x_n$, per cui l'equazione di conservazione diventa

$$\frac{\partial Z}{\partial t} - K \cdot x_n \frac{\partial Z}{\partial x_n} - D \frac{\partial^2 Z}{\partial x_n^2} = 0 \quad (3.18)$$

Questa equazione rappresenta lo strato diffusivo convettivo instazionario sotto l'ipotesi di linearizzabilità del campo di moto (ovverosia $u=Kx$). Essa rappresenta con più rigore uno strato diffusivo analogo a quello illustrato nel caso stazionario (immesso nel campo dei getti contrapposti), in cui le condizioni di immissione dei getti variano nel tempo. Questa configurazione è difficile da realizzare in pratica se non con variazioni periodiche, imposte, ad esempio, da forti campi sonori. Il modo in cui essa è stata qui presentata introduce uno strato diffusivo che evolve tra due flussi concorrenti e che in modo approssimato (isosuperfici piatte, campo "lineare") è descritto dall'eq3.18). Essendo questa situazione frequente ed essendo questo tipo di strato diffusivo più facilmente schematizzabile mentalmente, si è ritenuto opportuno presentare questo schema. La frazione di miscelamento Z si ottiene integrando l'equazione secondo la procedura riportata in appendice C. L'evoluzione di Z è ancora una volta descritta dalla funzione errore secondo la stessa relazione (riportata nell'eq3.19) ottenuta per il caso instazionario non stirato.

$$\frac{Z - Z_0}{Z_\infty - Z_0} = \operatorname{erf}\left(\xi = \frac{x}{\delta_m}\right) \quad 3.19)$$

dove

$$\delta_m = \delta_m^{ns} \cdot \gamma = \delta_m^{ns} \frac{\sqrt{SR^2}}{SR} \quad 3.20)$$

L'unica differenza è che lo spessore dello strato diffusivo δ_m differisce da quello non stirato per un fattore di stiramento $\gamma = \sqrt{SR^2}/SR$. E' interessante notare che per quanto detto fin qui SR e γ possono essere in linea di principio maggiori o minori di 1, ma in pratica SR é sempre maggiore di 1, mentre γ é sempre minore di 1. Su questa osservazione si basa del resto la possibilità di reale miscelazione dei fluidi. Lo stesso spessore dello strato diffusivo tende ad aumentare per effetto della sola diffusione, secondo la legge dello strato non stirato ($\delta_m^{ns} = \sqrt{4Dt}$), mentre a questo ispessimento si oppone lo stiramento della isosuperficie intorno alla superficie intermateriale che induce uno schiacciamento dello spessore di strato diffusivo. Ovviamente qualsiasi struttura interna allo spessore subisce la stessa evoluzione dello spessore stesso. Ad esempio una fiamma a diffusione con uno spessore finito in cui evolve la reazione di ossidazione (come descritto nel caso non stirato) si stirerà con la stessa legge con cui si stira la superficie intermateriale.

-Strati di miscelamento unidimensionali multipli (saturazione ed annichilimento)

La configurazione unidimensionale che permette di tenere in conto della presenza di due strati di miscelamento è data da una condizione iniziale a doppio scalino come quella riportata in fig3.6. La frazione di miscelamento assumerà, in questo caso, valore unitario in un intervallo spaziale Δ_n , mentre sarà zero all'esterno di esso.

L'evoluzione spaziale temporale della frazione di miscelamento è data dalla seguente equazione, riportata dall'appendice D, dove è ricavata sotto poche ipotesi semplificative

$$Z = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\delta_m}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x - \Delta_n}{\delta_m}\right) \right] \quad 3.21)$$

L'andamento di Z è riportato nella fig3.6 per tre valori del tempo scelti arbitrariamente

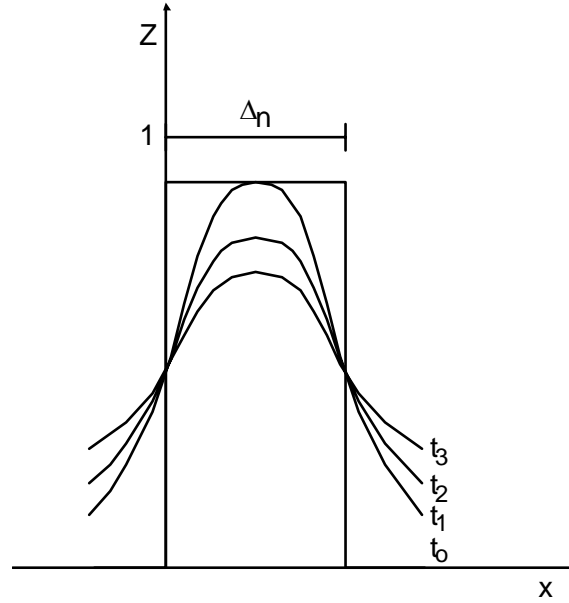


fig3.6

Il flusso diffusivo attraverso una superficie intermateriale unitaria al tempo t_0 sarà dato nel caso isolato dall'espressione riportata nella seguente equazione.

$$\phi_{\Delta\infty}(t, x_n) = \frac{\rho D S R}{\sqrt{\pi \delta_m}} \quad (3.22)$$

Nel caso del doppio strato, la presenza di uno strato diffusivo adiacente può essere tenuta in conto per mezzo di un fattore di saturazione che è anche ricavato in appendice D seguendo la falsariga del lavoro di Beige et al. (1991). Tale fattore C_{sat} vale $C_{sat} = \left(1 - \exp\left(-\left(\frac{\Delta_n}{\delta_m}\right)^2\right)\right)$, dove Δ_n è la distanza tra le due interfacce.

$$\frac{\phi_{\Delta n}}{\phi_{\Delta\infty}} = C_{sat} = 1 - \exp\left(-\left(\frac{\Delta_n}{\delta_m}\right)^2\right) \quad (3.23)$$

E' immediato vedere in fig 3.7, dove è riportato il fattore di saturazione, che per valori $\frac{\Delta_n}{\delta_m}$ uguali a 2, C_{sat} vale circa 1 (per l'esattezza 0.86) e per $\frac{\Delta_n}{\delta_m}$ circa 1, C_{sat} vale 0.63, per cui si può apprezzare che, fino a che Δ_n è maggiore o uguale a due volte δ_m , lo strato diffusivo si comporta come se fosse isolato. Già per valori di $\frac{\Delta_n}{\delta_m} = 0.1$ il fattore di saturazione vale 0.1. In sintesi per $\frac{\Delta_n}{\delta_m} > 2$ si può considerare lo strato diffusivo isolato, per $\frac{\Delta_n}{\delta_m} < 0.1$ lo strato diffusivo è

stato completamente saturato dal secondo, mentre per valori intermedi i due strati diffusivi interagiranno tra loro. E' interessante notare che $\frac{\Delta n}{\delta_m} = 2$ corrisponde alla distanza per cui le due isosuperfici periferiche si incontrano e quindi scompaiono, portando così all'annichilimento delle stesse.

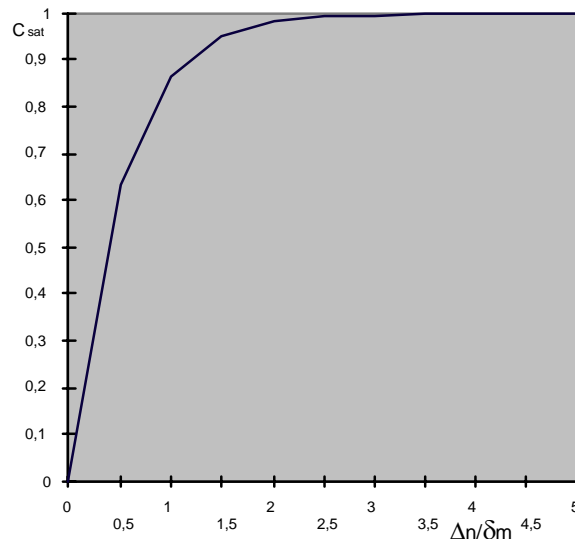


fig3.7

Purtroppo non esistono lavori sperimentali che descrivono tale annichilimento in condizioni unidimensionali, mentre alcune interessanti considerazioni possono essere tratte dal lavoro analitico-numerico di Triggvason et al. (1991).

-Effetti multidimensionali

Gli esempi di convoluzione bidimensionale, qui riportati, sono utilizzati per mettere in evidenza le interazioni tra starti diffusivi più complesse di quelle considerate nel caso dell'interazione unidimensionale. La configurazione che meglio si presta per realizzare questa analisi è un insieme di vortici come quelli schematicamente riportati in fig3.8.

Esistono due tipi di coppie di vortici bidimensionali. Quelli controrotanti rappresentati nei riquadri a) e b) e quelli co-rotanti dei riquadri c) e d). L'interesse nei primi risiede nella possibilità di realizzare sperimentalmente degli impulsi, che li generino ripetibilmente, in campi di moto laminare ben definiti. Infatti sono stati impiegati in alcuni lavori sperimentali ed hanno dato luogo a due tipi di studi legati a getti pulsati (riquadro a) o a vortici viaggianti all'interno di uno dei due mezzi (riquadro b).

Nel caso a) l'interfaccia (confine della zona tratteggiata) è a struttura spiraliforme e la linea tratteggiata in corrispondenza della isosuperficie stechiometrica segue la dinamica dell'interfaccia. I lavori di Karagozian e Marble (1986) descrivono qualitativamente

l'evoluzione di tale struttura spiraliforme. In entrambi i casi è apprezzabile come l'interno dei vortici è la zona in cui si esaurisce una delle due specie. Il caso descritto in b) differisce dal caso a) perché vi è un intervallo di tempo iniziale in cui la isosuperficie risente del vortice solo come ondulazione e stiramento. Takahashi e Katta V.R.(1996) hanno evidenziato, per mezzo di una simulazione numerica come questo stiramento porta un assottigliamento della struttura diffusiva con una conseguente perdita dei reagenti che attraversano l'isosuperficie

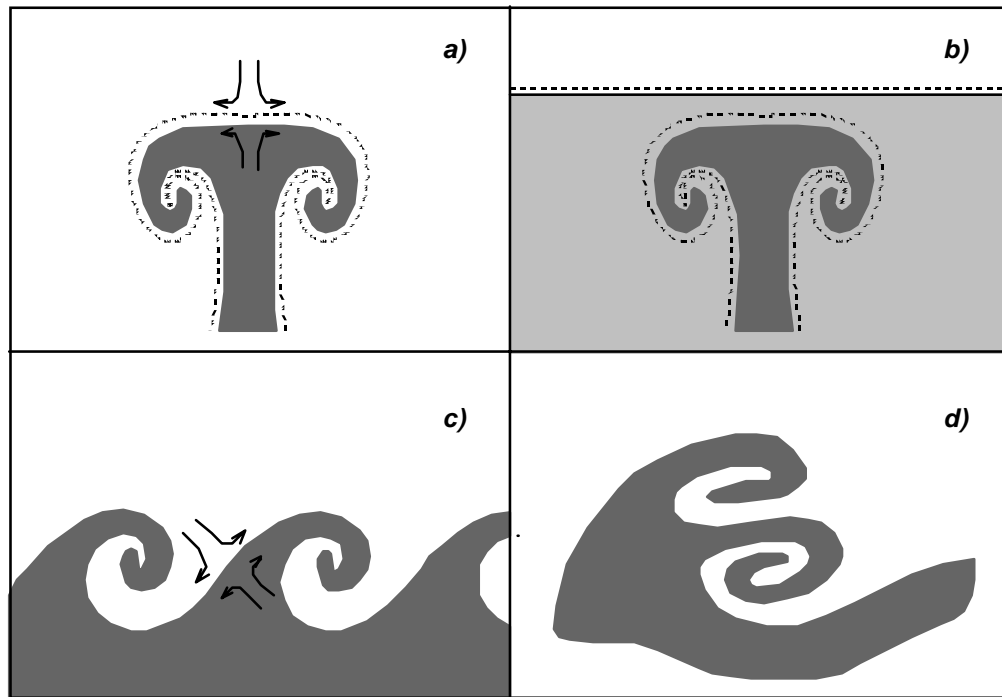


fig3.8

. Thevenin D., Rolon J.C ed altri(1996) e Rolon J.C. , Aguerre F. e Candel(1995) hanno condotto studi sperimentali in un mezzo reattivo (con confronto con simulazioni numeriche nel primo caso) in cui si osserva durante l'attraversamento di un intenso vortice in corrispondenza di una isosuperficie reattiva, che l'attività di reazioni fortemente isotermiche può estinguersi del tutto o solo per un tratto. E' interessante notare come la coppia di vortice, a differenza del singolo vortice, presenta una forte tendenza all'accoppiamento dei bilanci delle specie chimiche con quello di entalpia. Ciò è dovuto alla presenza all'apice della struttura, tra le due zone spiraliformi, di una regione in cui lo stiramento è più intenso. Infatti in questa zona, così come schizzato nel riquadro a), il campo di moto relativo ad una terna solidale con l'interfaccia è quello tipico dei punti di ristagno intorno al quale si aprono le linee di flusso. Questa caratteristica è in comune con il caso dei vortici co-rotanti del riquadro c). Infatti la zona di forte stiramento è localizzata anche in questo caso tra i due vortici, mentre le strutture spiraliformi tendono ad arrotolarsi con una rotazione quasi rigida. Il caso dei soli due vortici co-rotanti, schematizzato nel riquadro c) (a differenza del caso con vortici controrotanti) è di difficile realizzazione sperimentale ma vi sono diverse rilevazioni di questa struttura in getti "transizionali" nello strato di miscelamento dove sono forti i

gradienti di velocità. Generalmente l'evoluzione di vortici di questo tipo comporta una crescita con più spire oppure un accoppiamento con il vortice che lo precede o lo segue. La coppia dei vortici può essere a sua volta schiacciata o ripiegata come se si trattasse di un'unica struttura. E' chiaro che uno schiacciamento di uno (o più vortici) porta all'avvicinamento delle interfacce e di conseguenza accelera l'annichilimento delle isosuperfici. Anche in questo caso non è possibile isolare la coppia di vortici in un esperimento specifico, ma questo accoppiamento (come anche altri accoppiamenti) può essere rilevato in getti sommersi come ad esempio nel lavoro di Husein et al.(1998). E' verosimile supporre che anche in questo caso, come per il getto singolo, l'evoluzione dei vortici porta all'espulsione delle isosuperfici dalla zona centrale delle spirali.

-Evoluzione laminare e turbolenta di superfici progressive

Isosuperficie ed interfaccia progressiva

L'esempio qui riportato è relativo ad una semplice configurazione piana che è usata come confinamento del flusso sia in ingresso che durante tutta l'evoluzione del processo. I dettagli relativi alla motivazione della scelta della configurazione, agli aspetti costruttivi (degli esperimenti di validazione dei modelli di previsione), nonché agli aspetti modellistici e numerici sono riportati in letteratura (Cavaliere et al, 1993,1994a, 1994b ,1995, 1997). In breve sintesi la configurazione consiste in un canale principale con un rapporto altezza lunghezza di 1 :3, nel quale l'ingresso del flusso è suddiviso in 17 più piccoli canali tutti di 3 mm di altezza. Allo scopo di creare un flusso instabile relativamente vicino all'uscita dei canali, si immette in quello centrale un flusso con velocità 10 volte maggiore degli altri (circa 1.4 m/s), Il numero di Reynolds in questo canale è, comunque, tale da assicurare un moto iniziale laminare ($Re=288$).

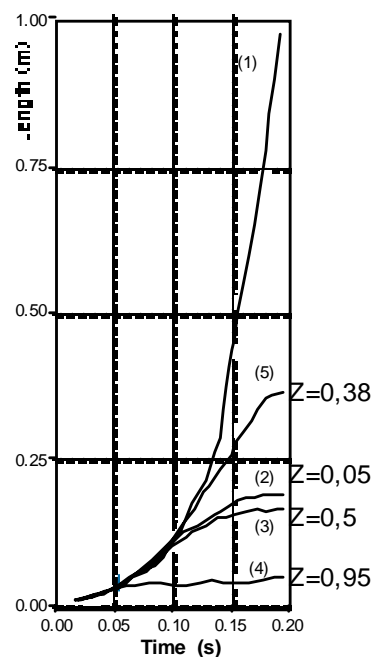
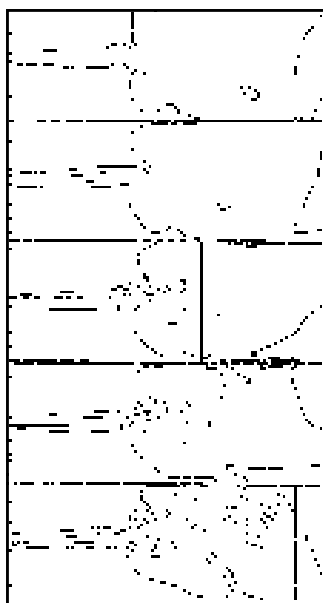


fig3.9

Quando il flusso sviluppa una piena condizione instazionaria, il canale centrale è inseminato per mezzo di un tracciante, che può esser diffusivo o non-diffusivo. La simulazione dell'equazione di trasporto del tracciante diffusivo è ottenuta usando un approccio di tipo euleriano. L'evoluzione di un tracciante passivo non diffusivo è simulata con l'aiuto di una integrazione di equazioni di evoluzione lagrangiana. Il flusso è inseminato con particelle senza massa nello stesso punto nel canale centrale sull'interfaccia tra due getti e più precisamente nel punto di primo contatto, a partire da un tempo fissato, che convenzionalmente è assunto al valore zero. Le interfacce che si generano a partire da questo tempo, vengono definite interfacce progressive. Esse sono in seguito mostrate nel loro percorso dall'integrazione del sistema di equazioni che descrive il moto delle particelle. L'interfaccia è definita come un insieme di particelle che hanno lo stesso punto di inseminazione.

Le isosuperfici sono invece relative alla soluzione dell'equazione di trasporto su un fissato volume di controllo. In questo caso, una frazione di massa di valore unitario è distribuita lungo i punti della sezione di ingresso del canale centrale. Le specie sono trasportate e diffuse (per un dato numero di Schmidt) lungo il canale principale. Allo scopo di dare un chiaro esempio di isosuperficie progressiva, si riporta in fig 3.9 (lato sinistro) una isosuperficie a frazioni di miscelamento. E' interessante analizzare, in detta figura, la sequenza delle isosuperficie (disegnate con linee solide) per $Z=0.05$, a tempi di residenza consecutivi. Esse sono praticamente simili per i cinque casi presentati e sono linee diritte e quasi parallele nella prima parte a sinistra della linea verticale. Poi esse si arrotondano nella parte centrale ed infine procedono parallele vicino al confinamento del flusso. La linea verticale nera che si muove con il tempo, verso il lato destro della sezione, è riportata in modo che intersechi il punto materiale più lontano (lungo la cordinata curvilinea dell'interfaccia) dall'uscita del getto tra tutti quelli immessi dopo il $t=0$. Le linee tratteggiate rappresentano le interfacce progressive e sono completamente dietro questo punto detto punto guida (praticamente dietro la linea verticale). Esse si estendono con continuità col passare del tempo.

L'isosuperficie progressiva è la parte di isosuperficie a $Z=0.05$ che sta sulla sinistra della linea verticale nera, cioè è la parte di isosuperficie che segue il "punto guida". Le isosuperfici progressive sono praticamente simili alle interfacce nei primi due riquadri e sono differenti (nella loro morfologia) negli ultimi tre.

La loro estensione non può essere valutata in questi modelli con una indagine visuale, ma solo grazie ad una valutazione quantitativa rappresentata nella seconda figura sulla destra. In questa sono riportate le aree della interfaccia progressiva e delle isosuperfici progressive a $Z=0.05, 0.38, 0.5$ e 0.95 . L'interfaccia progressiva ha un andamento sempre crescente con due diverse pendenze che diventano uguali approssimativamente a metà dell'intero tempo di residenza. Questo andamento è in accordo con l'interfaccia nella prima figura. Infatti questa è sempre regolare fino ad un terzo dell'intera sezione esaminata, poi è leggermente più convoluta fino a metà del canale principale ed eventualmente è molto più convoluta in corrispondenza dell'inizio dell'aumento dell'interfaccia progressiva. L'isosuperficie progressiva a $Z=0.05$ (curva 2) e $Z=0.5$ (curva 3) mostrano lo stesso andamento dell'interfaccia

progressiva fino a metà dell'intero tempo di residenza. Dopo questo tempo, che sarà chiamato "splitting time", mostrano un andamento completamente diverso, infatti sono più basse dell'interfaccia progressiva con una leggera tendenza a salire. L'unica differenza con la curva 4 è che lo "splitting time" è più piccolo di quello della isosuperficie progressiva a $Z=0.5$ e $Z=0.05$. Infine la curva 5 è relativa alla frazione di miscelamento pari a $Z=0.38$. Questo valore è quello corrispondente al rapporto di alimentazione basato sulla portata massica dei canali centrali e periferici. In altre parole è la frazione di miscelamento che si raggiungerebbe nel caso di perfetta miscelazione dei flussi nell'esempio qui riportato.

Classificazione di regimi di miscelamento

Una classificazione dei regimi di miscelamento può essere fatta qui con l'aiuto della fig.3.10. Questa può essere vista come un diagramma di flusso basato sull'analisi del diagramma di destra della fig.3.9.

Il primo test ($|s_{int} - s_{iso,Z_m}| \neq \varepsilon$) considera lo "splitting time" t_s relativo alla frazione di miscelamento di alimentazione. Prima di t_s l'interfaccia progressiva e l'isosuperficie sono coincidenti così che l'evoluzione del miscelamento molecolare può essere analizzata in relazione all'interfaccia. In questo caso lo stiramento e l'arrotolamento coinvolgono entrambe le superfici, esse sono praticamente uguali fintanto che $|s_{int} - s_{iso,Z_m}| < \varepsilon$. Definiamo un regime "di miscelamento-mescolamento accoppiato" quando il flusso soddisfa questa condizione. Invece, quando la differenza tra l'area dell'interfaccia progressiva e dell'isosuperficie progressiva è più grande di un fissato convenzionale valore ε ($|s_{int} - s_{iso,Z_m}| > \varepsilon$). Il flusso è classificato come "regime di miscelamento-mescolamento disaccoppiato". Una ulteriore divisione si può ottenere nella categoria del "regime di miscelamento-mescolamento accoppiato" con un criterio basato sulla stessa differenza, prima menzionata, nel quale l'isosuperficie progressiva è relativa al tipico valore della periferia dello strato di miscelamento. Il valore della frazione di miscelamento a $Z_{\delta+}=0.05$ e $Z_{\delta-}=0.95$, usati nella figura della pagina precedente, possono essere considerati una ragionevole approssimazione di questi valori periferici. Quando la differenza è più piccola di un prefissato arbitrario piccolo valore ε^* per entrambe le isosuperfici (relative a $Z_{\delta+}=0.05$ e $Z_{\delta-}=0.95$), l'intero strato di miscelamento si sviluppa nelle vicinanze dell'interfaccia ed ha un andamento riconoscibile. Dunque, i flussi o parte di essi, che soddisfano questa proprietà, possono essere considerati appartenere ad un "regime di miscelamento ben identificato".

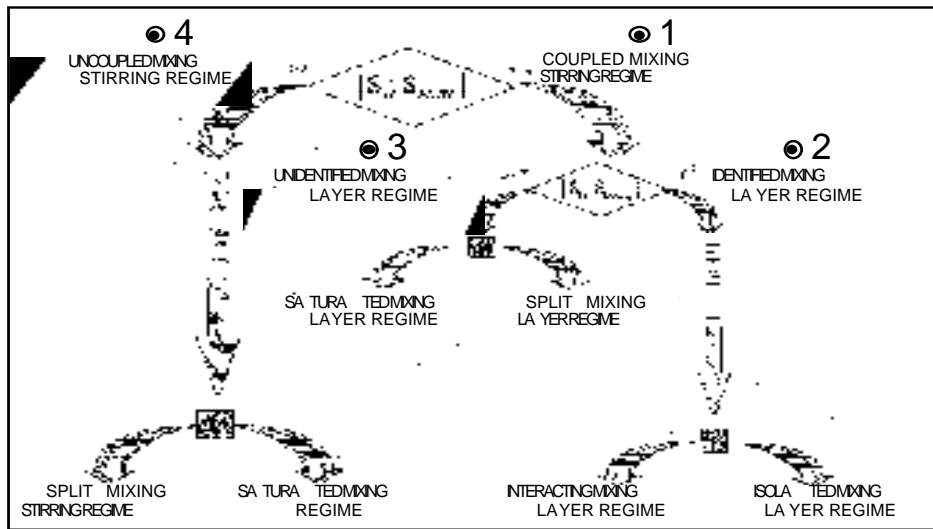


fig.3.10

. L'altro caso possibile è che $|s_{int} - s_{iso, Z_0}| > \varepsilon^*$. In questo caso il flusso può essere classificato nel "regime di miscelamento non ben identificato". Lo strato di miscelamento può scomparire sia a causa dell'annichilimento di superfici a proprietà costanti (che comportano sempre una diminuzione dell'estensione dell'isosuperficie o equivalentemente, un non incremento della isosuperficie progressiva) o a causa di uno stiramento positivo lungo la direzione del gradiente di frazione di miscelamento. In questo caso le superfici a Z costante si separano e non si ricongiungono per qualsiasi evoluzione cinematica. I flussi, che sono in queste condizioni, sono chiamati nella figura del riquadro, come flussi in "regime di strato di miscelamento separato". Gli stessi tipi di commenti sono possibili per significative differenze tra l'interfaccia progressiva e l'isosuperficie progressiva relativa al valore dell'intera frazione di miscelamento Z_m . In questo caso i flussi sono classificati come "regimi di miscelamento-mescolamento disaccoppiato", dunque i due processi sono totalmente non correlati e l'interfaccia non è più un riferimento per l'analisi di superfici con proprietà costanti. Anche in questo caso si può fare la divisione in due classi riferite all'annichilimento o alla separazione di isosuperfici. La prima classe è chiamata in analogia con la precedente "regime di miscelamento saturato", la seconda "regime di miscelamento- mescolamento separato".

MODELLI DI CAMPI SCALARI TURBOLENTI

-L'equazione di evoluzione turbolenta delle superfici

Una nuova categoria di modelli numerici, analitici, e concettuali sembra essere promettente per la descrizione di scalari in campi di moto turbolento. L'aspetto comune di questi modelli è la distinzione meccanicistica tra mescolamento e miscelamento nonché l'evoluzione lagrangiana di quantità concernenti la cinetica e la diffusione molecolare. Questi modelli sono stati classificati da Williams e Linan(1993) come "metodi di campo". Questi spaziano dal pionieristico ESCIMO (Spalding,1978) al più recente ed avanzato "Linear Eddy Model"(Kernstein A, 1988) passando attraverso la modellazione di statistiche associate al comportamento di insieme di strutture del tipo "a strato reagente isolato stirato".

I lavori sperimentali, attraverso i quali si verificano questo tipo di modelli numerici oppure si classificano flussi reagenti (come il caso del paragrafo precedente) oppure, ancora, si scoprono nuovi effetti puntuali o multidimensionali, sono limitati dal fatto che le misure sono generalmente di tipo euleriano. I risultati ottenuti in tal modo possono essere correlati ai risultati finali ottenuti con i metodi di campo, ma non permettono un paragone diretto e una interazione con alcune variabili di controllo lagrangiane incluse nei modelli. La ragione del numero esiguo di misure lagrangiane è che sono difficili da ottenere, particolarmente sono multidimensionali o multicomponenti in domini tridimensionali. Questo è il caso di molte quantità di interesse in quasi tutti i modelli ed in particolare in quelli associati ai cosiddetti metodi di campo. Pertanto si usano semplificazioni per ridurre la dimensionalità e la multiscalarità nelle simulazioni numeriche e negli esperimenti, considerando, ad esempio, una evoluzione temporale o spaziale di uno strato di miscelamento in un flusso bidimensionale isoterma transizionale. Questa premessa serve per sottolineare che il modello qui presentato non ha ancora ricevuto una vasta validazione sperimentale. Tuttavia la sua rilevanza consiste nel fatto che permette di sfruttare le relazioni cinematiche che sono state presentate e discusse in diverse sezioni di queste note. Inoltre questo tipo di approccio permette di inquadrare concettualmente l'insieme di eventi che intervengono in gran parte del processo di miscelazione di mezzi omogenei. Tuttavia è opportuno anticipare che la modellazione quantitativa dei termini che verranno presentati pone problemi dello stesso ordine di quelli sollevati da altri tipi di modellazione, mentre la loro interpretazione qualitativa dovrebbe risultare più semplice e più facilmente impiegabile in valutazioni riguardanti ordini di grandezza e identificazione di processi controllanti.

Innanzitutto è necessario definire la densità di superficie, Σ . In accordo con le trattazioni di diversi autori (Pope,1988; Candel et al., 1990b; Trounev et al. 1994; Vervish et al., 1996) questa è il rapporto tra i valori medi aspettati della superficie e del volume che li contiene in un fissato punto dello spazio:

$$\Sigma = \langle \Sigma' \rangle = \left\langle \frac{\delta A}{\delta V} \right\rangle = \frac{\langle \delta A \rangle}{\delta V} \quad 4.1)$$

Le superfici, a cui ci si riferisce, possono essere le interfacce, le isosuperfici o qualsiasi superficie rappresentante una proprietà che si propaga nello spazio. Qui di seguito la trattazione riguarderà, a meno di esplicita menzione, le isosuperfici ad un fissato valore della frazione di miscelamento Z_s . Inoltre una quantità generica si dirà mediata superficialmente e verrà indicata con $\langle Q \rangle_s$, se è ottenuta come il rapporto delle medie delle quantità pesate sulla superficie $\langle \delta A Q \rangle$ e del volume $\langle \delta V \rangle$. Pertanto sono valide le seguenti relazioni

$$\langle Q \rangle_s = \frac{\langle Q \delta A \rangle}{\langle \delta A \rangle} = \frac{\langle Q \Sigma \rangle}{\Sigma} = \frac{\langle Q \delta A \rangle}{\Sigma \delta V} \approx \frac{1}{S} \oint_S Q d(\delta A) \quad (4.2)$$

L'ultima equivalenza è soddisfatta solo nel caso in cui la superficie sia sufficientemente grande ed il sistema sia ergodico.

L'equazione di evoluzione della densità di isosuperficie è stata ricavata dagli autori prima citati e può essere scritta come qui di seguito riportato

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \nabla \cdot (\langle \mathbf{v}^{tot} \rangle_s \Sigma) = \langle K^{tot} \rangle_s \Sigma \quad (4.3)$$

Questa equazione è formalmente simile ad un bilancio con il termine di trasporto convettivo, in cui la velocità fluidodinamica è sostituita con la velocità media superficiale $\langle \mathbf{v}^{tot} \rangle_s$. Questa, a sua volta, è la somma della velocità fluidodinamica $\langle \mathbf{v} \rangle_s$ e la velocità di propagazione della isosuperficie, $\langle w \mathbf{n} \rangle_s$

$$\langle \mathbf{v}^{tot} \rangle_s = \langle \mathbf{v} \rangle_s + \langle w \mathbf{n} \rangle_s \quad (4.4)$$

dove i termini dell'identità sono dati dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v} \rangle_s &= \bar{\mathbf{v}} + \langle \mathbf{v}' \rangle \\ w &= D \frac{\nabla^2 Z}{|\nabla Z|} \\ u &= \frac{\nabla Z}{|\nabla Z|} \end{aligned} \quad (4.4b)$$

E' opportuno sottolineare che la velocità media superficiale è posta uguale alla somma della velocità mediata alla Reynolds (in virtù dell'ipotesi di ergodicità) e della media di insieme superficiale della velocità della fluttuazione

La produzione della densità di superficie al secondo membro dell'equazione di evoluzione 4.3 è uguale al prodotto della densità di superficie stessa, Σ , e della velocità media superficiale dello stiramento, $\langle K^{tot} \rangle_s$, che è, a sua volta, uguale alla somma dei due termini relativi allo stiramento fluidodinamico, $\langle K^V \rangle_s$ e alla propagazione della isosuperficie, $\langle K^W \rangle_s$. Pertanto è valida la seguente relazione

$$\langle K^{\text{tot}} \rangle_s = \langle K^V \rangle_s + \langle K^W \rangle_s \quad 4.5)$$

dove i due termini del secondo membro sono dati dalle seguenti identità

$$\begin{aligned} \langle K^V \rangle_s &= \langle \nabla \cdot \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v} : \mathbf{u} \mathbf{u} \rangle_s \\ \langle K^C \rangle_s &= \langle w \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle_s \end{aligned} \quad 4.5a)$$

Anche in questo caso, analogamente a quanto detto per l'eq4.4, la velocità fluidodinamica dovrà essere scomposta in una somma delle parti medie e fluttuanti.

E' importante evidenziare che l'equazione di evoluzione può essere ricavata solo sotto l'ipotesi di regolarità delle superfici, per cui essa é valida solo in assenza di singolarità, punti critici, bordi interni ed intersezioni. In particolare l'ultima proprietà (assenza di intersezioni) comporta che nell'equazione non é prevista a rigore la possibilità di annichilimento delle superfici e che, quindi, un termine "empirico" dovrebbe essere aggiunto nel caso in cui questo fenomeno dovesse essere tenuto in conto.

Dall'insieme delle relazioni discende che l'evoluzione di tutto il campo scalare può essere razionalmente analizzato. In particolare é necessario che l'insieme delle isosuperfici campionate contenga cinque isosuperfici:

- i) quella "bilanciata in massa" (cioé a $Z=0.5$)
- ii) quella di completa omogeneizzazione, in cui il rapporto tra le masse della miscela sia lo stesso di quello di alimentazione ($Z=Z_{al}$)
- iii) quella con presenza minima della specie A (p.e. $Z=0.05$)
- iv) quella con presenza minima della specie B (p.e. $Z=0.95$)
- v) quella/quelle corrispondente al rapporto stechiometrico di reazione/reazioni rilevanti.

A queste isosuperfici é necessario aggiungere la densità dell'interfaccia, in modo da valutare i regimi di miscelamento in cui il processo si viene a trovare.

Un'altra interessante caratteristica dell'approccio modellistico qui presentato, consiste nel fatto che questo si accoppia bene con altri modelli che sono già in fase avanzata di validazione che si basano su quantità di campo (field equation o F-equation Kernstein, 1988b) o su gradienti di varia natura (G-equation, Peters, 1992). Inoltre questo approccio é particolarmente utile nei mezzi reattivi, quando i tempi caratteristici della reazione/i sono più piccoli di quelli caratterizzanti il campo di moto turbolento. In questo caso l'equazione di evoluzione è generalmente accoppiata a quelle di bilancio delle altre grandezze attraverso i termini di produzione di quest'ultime. Ad esempio la media di insieme della produzione di una specie i-ma per unità di volume e di tempo, $\langle \dot{\rho}_i \rangle$ può essere valutato se è possibile determinare la media dell'integrale riportato nella seguente equazione

$$\langle \dot{\rho}_i \rangle = \left\langle \oint \dot{\rho}_i \, dn \right\rangle_s \Sigma \quad 4.6)$$

L'integrale si estende lungo la normale alla isosuperficie (Trouve et al 1994). Esso diventa tanto più rappresentativo di un intero processo reattivo quanto più la zona reattiva tende all'infinitamente sottile.

Sulle superfici, così come costruite fin qui, è possibile ancorare altre proprietà che di volta in volta accompagnano il processo di miscelamento oppure è possibile operare dei test di verifica sulle grandezze già definite. Ad esempio è noto che un alto valore dello stiramento può estinguere le fiamme premiscelate o a diffusione. Di conseguenza, per una sua descrizione dettagliata, potrebbe essere opportuna la determinazione di altri tipi di statistiche differenti dalle medie introdotte nell'eq.4.5.

Bisogna comunque sottolineare che nell'equazione della densità della superficie di fiamma non compare né un termine di annichilimento delle isosuperfici né un termine di saturazione per cui tale modello si può applicare con successo solo nel caso in cui tale fenomeno non occorra e cioè quando si sia nel regime con miscelamento mescolamento accoppiati con strato di miscelamento isolato.

-L'equazione di evoluzione turbolenta della funzione di densità di probabilità dello scalare e del gradiente dello scalare.

Alcuni termini dell'equazione di evoluzione della densità di superficie dipendono in modo più o meno complesso dal gradiente dello scalare. E' sia il caso dello stiramento associato alla curvatura della superficie e sia il caso della velocità di propagazione della superficie stessa. E' auspicabile che questi termini possano essere correlati a grandezze fluidodinamiche e morfologiche delle superfici in modo da "chiudere" il modello. Anticipando che ciò è quanto proposto nel paragrafo seguente, è utile sottolineare il nesso stretto dell'evoluzione della densità di isosuperficie con la distribuzione spaziale dello scalare.

Inoltre è la stessa grandezza (la densità di isosuperficie) che è proporzionale alla funzione densità di probabilità condizionata del gradiente dello scalare, dove per "condizionata" si intende che ci si riferisce alla densità di probabilità del gradiente dello scalare, quando questo è determinato sulla isosuperficie caratterizzata da un definito valore dello scalare. Più specificamente sono state dimostrate da alcuni autori (Pope, 1988; Candel et al 1990b; Trounev, 1994; Vervish et al., 1995), le seguenti identità:

$$\begin{aligned}\Sigma &\equiv \int_0^\infty |\nabla Z| pdf(|\nabla Z|, Z_s) d(|\nabla Z|) \\ \Sigma &\equiv \langle |\nabla Z| | Z = Z_s \rangle pdf(Z_s)\end{aligned}\tag{4.7}$$

La prima equazione rappresenta il momento primo del valore assoluto del gradiente dello scalare, Z , sulla probabilità congiunta dello scalare (fissato ad un preciso valore) e del suo gradiente. Essa è anche equivalente alla seconda espressione, che va letta come il prodotto della media aspetta del valore assoluto del gradiente dello scalare, Z , condizionato dall'essere sulla superficie a $Z=Z_s$, per la probabilità di esser sulla superficie. L'interpretazione di queste due identità non è immediata ed anche la dimostrazione si basa su una trattazione niente affatto euristica. Solo alcuni esempi particolari possono consolidare la convinzione della sua giustezza. Tra questi consideriamo il caso in cui le grandezze si riferiscano ad un regime di "strato di miscelamento isolato". Inoltre si tenga conto che la densità di superficie può anche essere associata all'inverso di una distanza di separazione media tra le isosuperfici (nel caso di interfaccia questa distanza prende il

nome di "spessore di striazione", così come riportato da Ottino, 1989). Pertanto un alto valore della densità di superficie comporta un basso valore della separazione tra le isosuperfici che, dovendo, nel caso specifico, contenere uno strato di miscelamento isolato, è più grande dello spessore dello strato. In conclusione siamo in presenza di strati tanto più piccoli, quanto più grande è la densità di superficie. Ciò ovviamente comporta un alto livello dei gradienti all'interno degli strati.

L'identità tra le grandezze nell'eq4.7 mette anche in evidenza che la predizione della densità di superficie garantisce anche un'adeguata descrizione del campo diffusivo, perché sono appunto i gradienti dello scalare che permettono la sua evoluzione spaziale-temporale. Inoltre esistono alcuni regimi di processi reattivi, come ad esempio la combustione delle fiamme a diffusione, dipendenti quasi esclusivamente dalla composizione locale dei reagenti e dal gradiente delle specie sulla superficie stessa. Si ricordi, ad esempio che, in un paragrafo precedente, si è ricavata l'equazione di evoluzione di un qualsiasi scalare in funzione di una grandezza, denominata velocità di dissipazione dello scalare, che dipendeva a sua volta solo dal gradiente.

Infine bisogna evidenziare che anche le trattazioni classiche della descrizione di scalari in campi di moto turbolenti si basano su equazioni di bilancio che possono essere convenientemente chiuse solo con descrizioni più o meno dettagliate della funzione densità di probabilità congiunta dello scalare e/o del gradiente dello scalare (Borghi R., 1978, Valino L. e Dopazo C, 1990, Janicka J e Kollmann, 1978). A sua volta l'equazione di evoluzione della funzione di probabilità necessita di alcune relazioni per la sua chiusura. Queste tengono implicitamente in conto del tipo di evoluzione che si sviluppa a livello molecolare, analogamente a quanto in modo più esplicito si fa con l'equazione di evoluzione della densità di isosuperficie.

L'espressione della probabilità condizionata del gradiente dello scalare è stata ricavata da Meyers e O'Brien (Brien, 1981), a partire dalla seguente espressione

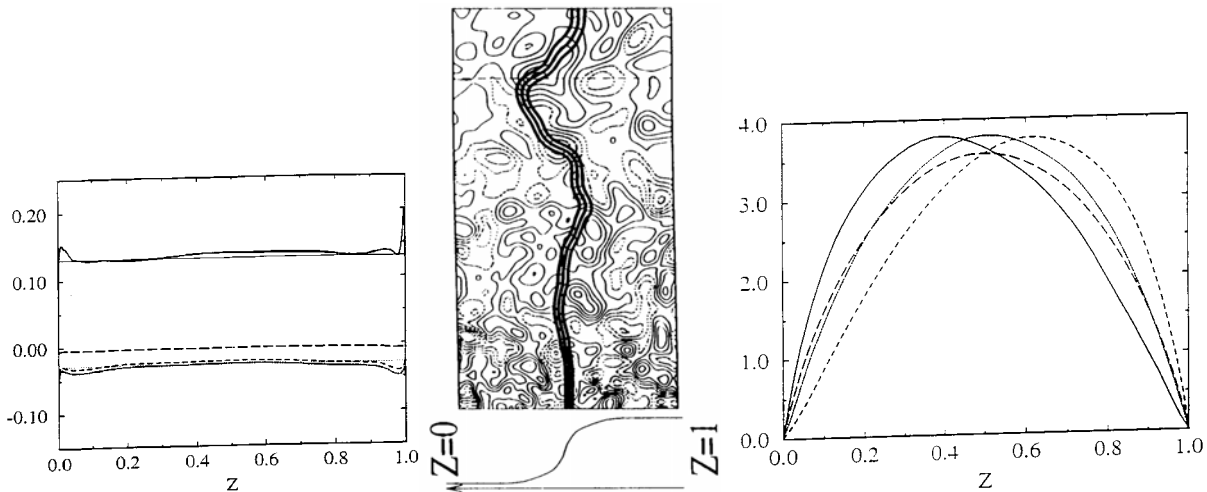
$$\frac{\partial P}{\partial t}(Z, \nabla Z) + \langle \underline{u} \rangle \cdot \nabla P \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x} \frac{\partial \psi_i P}{\partial \psi_j} - \beta \frac{\partial}{\partial Z} [(Z - \bar{Z})P] - \beta \frac{\partial}{\partial \psi} [(\psi - \bar{\psi})P] + \frac{\partial}{\partial Z} [\dot{w}(Z)P] + \frac{\partial}{\partial (\nabla Z)} [\dot{w}(\nabla Z)P] = \Pi$$

L'equazione esprime la relazione di evoluzione della funzione densità di probabilità congiunta dello scala dello scalare Z e del gradiente dello scalare $\psi = \nabla Z$. Tutti i termini sono facilmente identificabili fatta eccezione del termine di "produzione" Π , che può essere esplicitato in funzione di altri quattro termini che sono a loro volta funzioni integro differenziali delle variabili Z , ∇Z e \underline{u} . E' interessante ricordare che l'equazione di evoluzione della funzione densità di superficie è equivalente ad una equazione che approssimativamente deve tener in conto degli stessi termini che compaiono nell'espressione precedente. Pertanto è evidente il grande valore della trattazione euristica collegata alla funzione della densità di superficie

- *-Modellazione di terminini delle equazioni di evoluzione (verifica con DNS)*

Evoluzione e statistiche

La simulazione numerica diretta (direct numerical simulation DNS) è stata impiegata negli ultimi anni per ottenere indicazione sul comportamento d'insieme di alcuni parametri o grandezze che sono risultate essere di interesse nell'evoluzione delle strutture semplici. Ad esempio nella parte centrale del riquadro, è schematizzata una condizione fluidodinamica, sfruttata da Van Kalmthout E., Veynante D. e Candel S.(1996), per condurre tali tipi di studio. Essi hanno iniettato flussi gassosi A e B con frazione di miscelamento zero (a sinistra dello schema ossidante) e 1 (a destra combustibile), I due



flussi sono perturbati dall'addizione di fluttuazioni turbolente isotrope ed omogenee con un predeterminato spettro di potenza alla "Von Karman- Pao". L'evoluzione del flusso risultante è seguita, come detto, per mezzo di una simulazione diretta bidimensionale. Il pattern bidimensionale, qui riportato, rappresenta tre isosuperfici a $Z=0.25, 0.50$ e 0.75 con linea spessa e varie superfici di isovorticità con linea sottile. Sulla destra invece sono riportati:

a) la velocità di stiramento fluidodinamica contro la frazione di miscelamento Z

$$K_s^V = \langle \nabla \cdot \mathbf{u} - \mathbf{u} \mathbf{u} : \nabla \mathbf{u} \rangle_s \quad (4.9)$$

con linea continua spessa per i valori ottenuti dalla sperimentazione numerica o con linea continua sottile se modellati come una costante pari a $\kappa_{\delta A, Z_s}^V = 4\varepsilon/k$

b) lo stiramento dovuto alla curvatura $\langle w \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle_s$ con linea punteggiata spessa ottenuta come somma di due termini come qui di seguito riportato

$$\langle w \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle_s = -D \langle (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \rangle_s - D \langle \mathbf{u} \cdot \nabla (|\nabla Z|) \nabla \cdot \mathbf{u} (\nabla Z) \rangle_s, \quad (4.10)$$

rispettivamente con linea segmentata con tratto breve ($-D \langle (\nabla \cdot \mathbf{u})^2 \rangle_{\delta A, Z_s}$) e con tratto lungo ($-D \langle \mathbf{u} \cdot \nabla (|\nabla Z|) \nabla \cdot \mathbf{u} (\nabla Z) \rangle_s$). E' immediato notare che il termine dovuto alla fluidodinamica è prevalente su quello relativo alla propagazione della parte di isosuperficie curva e che nel caso considerato non dipende dallo scalare. Essendo entrambe le velocità di stiramento costanti è plausibile supporre che l'esempio riportato sia relativo al caso di strato di miscelamento isolato.

Infine sul lato destro della figura sono riportati tre andamenti della densità di superficie, Σ , ricavati dalla simulazione come la media in corrispondenza della frazione di miscelamento, Z , e contro questa diagrammati. La sola curva a tratti lunghi rappresenta una quantità avulsa e, più specificamente, $\langle \nabla Z \rangle_{s_{Z_3}}$.

Gli esempi qui riportati sono rappresentativi degli sforzi più aggiornati per fornire relazioni di chiusura del modello basato sull'equazione di evoluzione. E' implicita in questa affermazione la considerazione che il lavoro di ricerca in questo campo deve ancora continuare.