# Complessità computazionale

# La classe coNP

Piero A. Bonatti

Università di Napoli Federico II

Laurea Magistrale in Informatica

# Tema della lezione I

- Struttura dei problemi in **coNP**
- Relazioni tra **NP** e **coNP** e tra i loro problemi completi

# Ricordiamo le definizioni

- Sia $\mathcal{I}$ un insieme di istanze "ben formate"
  - dipende dal problema
  - ad es. rappresentazione di tutti i grafi,
  - oppure rappresentazione di tutte le formule booleane, ...
- Dato $L \subseteq \mathcal{I}$,

$$\overline{L} = \mathcal{I} \setminus L$$

- Data una classe di complessità $\mathcal{C}$,

$$L \in \mathbf{co}\mathcal{C} \text{ se e solo se } \overline{L} \in \mathcal{C}$$

- Quindi **coNP** è la classe di problemi $\overline{L}$ tali che $L \in \mathbf{NP}$

# Ricordiamo le definizioni

- Sia $\mathcal{I}$ un insieme di istanze "ben formate"
  - dipende dal problema
  - ad es. rappresentazione di tutti i grafi,
  - oppure rappresentazione di tutte le formule booleane, ...
- Dato $L \subseteq \mathcal{I}$,

$$\bar{L} = \mathcal{I} \setminus L$$

- Data una classe di complessità $\mathcal{C}$,

$$L \in \mathbf{co}\mathcal{C} \text{ se e solo se } \bar{L} \in \mathcal{C}$$

- Quindi **coNP** è la classe di problemi $\bar{L}$ tali che $L \in \mathbf{NP}$

# Struttura dei problemi in **coNP**

- Ricordare che $L \in$ **NP** sse $L$ ha *certificati succinti*
- Quindi $L \in$ **coNP** sse le risposte "no" hanno certificati succinti
  - Papadimitriou le chiama *succinct disqualifications*

**Esempio: VALIDITY**

Data una formula booleana $\phi$ dire se è valida (cioè non può essere falsificata).

- per certificare succintamente che non è valida esibire un truth assignment che la rende falsa
- facile vedere che la verifica è polinomiale anche se $\phi$ non è in CNF

# Struttura dei problemi in **coNP**

- Ricordare che $L \in$ **NP** sse $L$ ha *certificati succinti*
- Quindi $L \in$ **coNP** sse le risposte <u>"no"</u> hanno certificati succinti
  - Papadimitriou le chiama *succinct disqualifications*

**Esempio: VALIDITY**

Data una formula booleana $\phi$ dire se è valida (cioè non può essere falsificata).

- per certificare succintamente che <u>non</u> è valida esibire un truth assignment che la rende falsa
- facile vedere che la verifica è polinomiale anche se $\phi$ non è in CNF

# VALIDITY è **coNP** completo

- prendete qualunque $L \in$ **coNP**; $\overline{L}$ è in **NP** per def. di **coNP**
- quindi $\overline{L}$ is può ridurre a SAT con qualche riduzione $R$
  - perchè ?
- $R$ preserva le risposte, quindi $x \notin \overline{L}$ sse $R(x) \notin \mathrm{SAT}$
- da cui $x \in L$ sse $\neg R(x) \in$ VALIDITY, perchè
  - $x \in L$ sse $x \notin \overline{L}$
  - $R(x) \notin \mathrm{SAT} \Leftrightarrow R(x)$ è insoddisfacibile $\Leftrightarrow \neg R(x)$ è valida
- chiaramente se $R(x)$ può essere calcolata in spazio logaritmico, anche $\neg R(x)$ può

QED

# VALIDITY è **coNP** completo

- prendete qualunque $L \in$ **coNP**; $\bar{L}$ è in **NP** per def. di **coNP**
- quindi $\bar{L}$ is può ridurre a SAT con qualche riduzione $R$
  - perchè SAT è **NP**-completo
- $R$ preserva le risposte, quindi $x \notin \bar{L}$ sse $R(x) \notin$ SAT
- da cui $x \in L$ sse $\neg R(x) \in$ VALIDITY, perchè
  - $x \in L$ sse $x \notin \bar{L}$
  - $R(x) \notin \mathrm{SAT} \Leftrightarrow R(x)$ è insoddisfacibile $\Leftrightarrow \neg R(x)$ è valida
- chiaramente se $R(x)$ può essere calcolata in spazio logaritmico, anche $\neg R(x)$ può

QED

# VALIDITY è **coNP** completo

- prendete qualunque $L \in$ **coNP**; $\overline{L}$ è in **NP** per def. di **coNP**
- quindi $\overline{L}$ is può ridurre a $\mathrm{SAT}$ con qualche riduzione $R$
  - perchè
- $R$ preserva le risposte, quindi $x \notin \overline{L}$ sse $R(x) \notin \mathrm{SAT}$
- da cui $x \in L$ sse $\neg R(x) \in$ VALIDITY, perchè
  - $x \in L$ sse $x \notin \overline{L}$
  - $R(x) \notin \mathrm{SAT} \Leftrightarrow R(x)$ è insoddisfacibile $\Leftrightarrow \neg R(x)$ è valida
- chiaramente se $R(x)$ può essere calcolata in spazio logaritmico, anche $\neg R(x)$ può

QED

# VALIDITY è **coNP** completo

- prendete qualunque $L \in$ **coNP**; $\overline{L}$ è in **NP** per def. di **coNP**
- quindi $\overline{L}$ is può ridurre a SAT con qualche riduzione $R$
  - perchè
- $R$ preserva le risposte, quindi $x \notin \overline{L}$ sse $R(x) \notin \mathrm{SAT}$
- da cui $x \in L$ sse $\neg R(x) \in$ VALIDITY, perchè
  - $x \in L$ sse $x \notin \overline{L}$
  - $R(x) \notin \mathrm{SAT} \Leftrightarrow R(x)$ è insoddisfacibile $\Leftrightarrow \neg R(x)$ è valida
- chiaramente se $R(x)$ può essere calcolata in spazio logaritmico, anche $\neg R(x)$ può

QED

# PRIMES appartiene a **coNP**

**Definizione di PRIMES**

Dato un intero $N$ (in binario) dire se è primo

- Prova di appartenenza: il *disqualifier* è un divisore di $N$ diverso da 1 e da $N$
  - dimensione $O(|\underline{N}|)$; tempo per la divisione: polinomiale
- Provare tutti gli interi tra 2 e $\sqrt{N}$ fornisce un algoritmo pseudopolinomiale
  - tempo $O(\sqrt{N})$
  - $\sqrt{N} = 2^{(\log N)/2} = O(2^{|\underline{N}|/2}) = O(2^{n/2})$

# PRIMES appartiene a **coNP**

**Definizione di PRIMES**

Dato un intero $N$ (in binario) dire se è primo

- Prova di appartenenza: il *disqualifier* è un divisore di $N$ diverso da 1 e da $N$
  - dimensione $O(|\underline{N}|)$; tempo per la divisione: polinomiale
- Provare tutti gli interi tra 2 e $\sqrt{N}$ fornisce un algoritmo pseudopolinomiale
  - tempo $O(\sqrt{N})$
  - $\sqrt{N} = 2^{(\log N)/2} = O(2^{|\underline{N}|/2}) = O(2^{n/2})$

# Relazioni tra classi complementari

**Proposizione A (riduzioni di problemi complementari)**

Se $R$ è una riduzione da $L_1$ a $L_2$ allora $R$ è una riduzione da $\overline{L}_1$ a $\overline{L}_2$ (e viceversa)

- **Prova**: Basta mostrarne la correttezza per $\overline{L}_1$ e $\overline{L}_2$:
  - per ipotesi $x \in L_1 \Leftrightarrow R(x) \in L_2$
  - $x \in \overline{L}_1 \Leftrightarrow x \notin L_1 \Leftrightarrow R(x) \notin L_2 \Leftrightarrow R(x) \in \overline{L}_2$
- Viceversa: simmetrica.

QED

# Relazioni tra classi complementari

**Proposizione A (riduzioni di problemi complementari)**

Se $R$ è una riduzione da $L_1$ a $L_2$ allora $R$ è una riduzione da $\overline{L}_1$ a $\overline{L}_2$ (e viceversa)

- **Prova**: Basta mostrarne la correttezza per $\overline{L}_1$ e $\overline{L}_2$:
  - per ipotesi $x \in L_1 \Leftrightarrow R(x) \in L_2$
  - $x \in \overline{L}_1 \Leftrightarrow x \notin L_1 \Leftrightarrow R(x) \notin L_2 \Leftrightarrow R(x) \in \overline{L}_2$
- Viceversa: simmetrica.

QED

# Relazioni tra classi complementari – II

**Proposizione B [confrontare con Prop. 10.1 del Papadimitriou]**

$L$ è $\mathcal{C}$-completo $\Leftrightarrow$ $\overline{L}$ è **co**$\mathcal{C}$-completo

- **Prova (solo se)**: Supponiamo che $L$ sia $\mathcal{C}$-completo
- Appartenenza di $\overline{L}$ a **co**$\mathcal{C}$: banale
- Hardness di $\overline{L}$: sia dato un qualunque $L' \in$ **co**$\mathcal{C}$; $(\overline{L}' \in \mathcal{C})$
- per Hp. esiste una riduzione $R$ da $\overline{L}'$ a $L$
- per la Proposizione A, $R$ è anche una riduzione da $L'$ a $\overline{L}$.
- Poichè questo vale per ogni $L' \in$ **co**$\mathcal{C}$, $\overline{L}$ è **co**$\mathcal{C}$-completo.
- **(se)**: simmetrica. QED

# Relazioni tra classi complementari – II

**Proposizione B [confrontare con Prop. 10.1 del Papadimitriou]**

$L$ è $\mathcal{C}$-completo $\Leftrightarrow$ $\overline{L}$ è **co**$\mathcal{C}$-completo

- **Prova (solo se)**: Supponiamo che $L$ sia $\mathcal{C}$-completo
- Appartenenza di $\overline{L}$ a **co**$\mathcal{C}$: banale
- Hardness di $\overline{L}$: sia dato un qualunque $L' \in$ **co**$\mathcal{C}$; ($\overline{L}' \in \mathcal{C}$)
- per Hp. esiste una riduzione $R$ da $\overline{L}'$ a $L$
- per la Proposizione A, $R$ è anche una riduzione da $L'$ a $\overline{L}$.
- Poichè questo vale per ogni $L' \in$ **co**$\mathcal{C}$, $\overline{L}$ è **co**$\mathcal{C}$-completo.
- **(se)**: simmetrica. QED

# Relazioni tra classi complementari – II

**Proposizione B [confrontare con Prop. 10.1 del Papadimitriou]**

$L$ è $\mathcal{C}$-completo $\Leftrightarrow$ $\overline{L}$ è **co**$\mathcal{C}$-completo

- **Prova (solo se)**: Supponiamo che $L$ sia $\mathcal{C}$-completo
- Appartenenza di $\overline{L}$ a **co**$\mathcal{C}$: banale
- Hardness di $\overline{L}$: sia dato un qualunque $L' \in$ **co**$\mathcal{C}$; ($\overline{L}' \in \mathcal{C}$)
- per Hp. esiste una riduzione $R$ da $\overline{L}'$ a $L$
- per la Proposizione A, $R$ è anche una riduzione da $L'$ a $\overline{L}$.
- Poichè questo vale per ogni $L' \in$ **co**$\mathcal{C}$, $\overline{L}$ è **co**$\mathcal{C}$-completo.
- **(se)**: simmetrica. QED

# Relazioni tra classi complementari – II

**Proposizione B [confrontare con Prop. 10.1 del Papadimitriou]**

$L$ è $\mathcal{C}$-completo $\Leftrightarrow$ $\overline{L}$ è **co**$\mathcal{C}$-completo

- **Prova (solo se)**: Supponiamo che $L$ sia $\mathcal{C}$-completo
- Appartenenza di $\overline{L}$ a **co**$\mathcal{C}$: banale
- Hardness di $\overline{L}$: sia dato un qualunque $L' \in$ **co**$\mathcal{C}$; $(\overline{L}' \in \mathcal{C})$
- per Hp. esiste una riduzione $R$ da $\overline{L}'$ a $L$
- per la Proposizione A, $R$ è anche una riduzione da $L'$ a $\overline{L}$.
- Poichè questo vale per ogni $L' \in$ **co**$\mathcal{C}$, $\overline{L}$ è **co**$\mathcal{C}$-completo.
- **(se)**: simmetrica. QED

# Relazioni tra classi complementari – II

**Proposizione B [confrontare con Prop. 10.1 del Papadimitriou]**

$L$ è $\mathcal{C}$-completo $\Leftrightarrow$ $\overline{L}$ è **co**$\mathcal{C}$-completo

- **Prova (solo se)**: Supponiamo che $L$ sia $\mathcal{C}$-completo
- Appartenenza di $\overline{L}$ a **co**$\mathcal{C}$: banale
- Hardness di $\overline{L}$: sia dato un qualunque $L' \in$ **co**$\mathcal{C}$; $(\overline{L}' \in \mathcal{C})$
- per Hp. esiste una riduzione $R$ da $\overline{L}'$ a $L$
- per la Proposizione A, $R$ è anche una riduzione da $L'$ a $\overline{L}$.
- Poichè questo vale per ogni $L' \in$ **co**$\mathcal{C}$, $\overline{L}$ è **co**$\mathcal{C}$-completo.
- **(se)**: simmetrica. QED

# Relazioni tra classi complementari – III

**Proposizione C**

Se $\mathcal{C}$ è chiusa rispetto alle riduzioni, allora anche **co**$\mathcal{C}$ è chiusa rispetto alle riduzioni (e viceversa)

- **Prova**: Supponiamo che $\mathcal{C}$ sia chiusa rispetto alle riduzioni
- Prendiamo un qualunque $L \in$ **co**$\mathcal{C}$ e supponiamo che esista una riduzione $R$ da $L'$ a $L$
  - dobbiamo mostrare che $L' \in$ **co**$\mathcal{C}$
- Per la Prop. A, $R$ è anche una riduzione da $\overline{L}'$ a $\overline{L}$
- Chiaramente $\overline{L} \in \mathcal{C}$, e per l'ipotesi di chiusura anche $\overline{L}' \in \mathcal{C}$
- Quindi $L' \in$ **co**$\mathcal{C}$

QED

# Relazioni tra classi complementari – III

**Proposizione C**

Se $\mathcal{C}$ è chiusa rispetto alle riduzioni, allora anche **co**$\mathcal{C}$ è chiusa rispetto alle riduzioni (e viceversa)

- **Prova**: Supponiamo che $\mathcal{C}$ sia chiusa rispetto alle riduzioni
- Prendiamo un qualunque $L \in \mathbf{co}\mathcal{C}$ e supponiamo che esista una riduzione $R$ da $L'$ a $L$
  - dobbiamo mostrare che $L' \in \mathbf{co}\mathcal{C}$
- Per la Prop. A, $R$ è anche una riduzione da $\overline{L}'$ a $\overline{L}$
- Chiaramente $\overline{L} \in \mathcal{C}$, e per l'ipotesi di chiusura anche $\overline{L}' \in \mathcal{C}$
- Quindi $L' \in \mathbf{co}\mathcal{C}$

QED

# Relazioni tra classi complementari – III

## Proposizione C

Se $\mathcal{C}$ è chiusa rispetto alle riduzioni, allora anche **co**$\mathcal{C}$ è chiusa rispetto alle riduzioni (e viceversa)

- **Prova**: Supponiamo che $\mathcal{C}$ sia chiusa rispetto alle riduzioni
- Prendiamo un qualunque $L \in$ **co**$\mathcal{C}$ e supponiamo che esista una riduzione $R$ da $L'$ a $L$
  - dobbiamo mostrare che $L' \in$ **co**$\mathcal{C}$
- Per la Prop. A, $R$ è anche una riduzione da $\overline{L}'$ a $\overline{L}$
- Chiaramente $\overline{L} \in \mathcal{C}$, e per l'ipotesi di chiusura anche $\overline{L}' \in \mathcal{C}$
- Quindi $L' \in$ **co**$\mathcal{C}$

QED

# Relazioni tra classi complementari – III

## Proposizione C

Se $\mathcal{C}$ è chiusa rispetto alle riduzioni, allora anche **co**$\mathcal{C}$ è chiusa rispetto alle riduzioni (e viceversa)

- **Prova**: Supponiamo che $\mathcal{C}$ sia chiusa rispetto alle riduzioni
- Prendiamo un qualunque $L \in$ **co**$\mathcal{C}$ e supponiamo che esista una riduzione $R$ da $L'$ a $L$
  - dobbiamo mostrare che $L' \in$ **co**$\mathcal{C}$
- Per la Prop. A, $R$ è anche una riduzione da $\bar{L}'$ a $\bar{L}$
- Chiaramente $\bar{L} \in \mathcal{C}$, e per l'ipotesi di chiusura anche $\bar{L}' \in \mathcal{C}$
- Quindi $L' \in$ **co**$\mathcal{C}$

QED

# Relazioni tra classi complementari – IV

**Proposizione D [confrontare con 10.2 del Papadimitriou]**

Se $\mathcal{C}$ è chiusa risp. alle riduzioni e un problema $\mathcal{C}$-completo appartiene a **co**$\mathcal{C}$, allora $\mathcal{C} =$ **co**$\mathcal{C}$

- **Prova**: Supponiamo che qualche $L \in$ **co**$\mathcal{C}$ sia $\mathcal{C}$-completo. Prima dimostriamo che $\mathcal{C} \subseteq$ **co**$\mathcal{C}$:
  - per ogni $L' \in \mathcal{C}$, esiste una riduzione $R : L' \to L$ (completezza di $L$)
  - poichè $L \in$ **co**$\mathcal{C}$ e **co**$\mathcal{C}$ è chiusa risp. alle riduzioni (Prop. C) anche $L' \in$ **co**$\mathcal{C}$
  - questo prova che $\mathcal{C} \subseteq$ **co**$\mathcal{C}$.

(segue)

# Relazioni tra classi complementari – IV

- [Hp: $L \in \mathbf{co}\mathcal{C}$ è $\mathcal{C}$-completo]
- **Prova (segue)**: Resta da dimostrare che $\mathbf{co}\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}$:
  - per la completezza di $L$ e la Prop. B, $\overline{L}$ è $\mathbf{co}\mathcal{C}$-completo, quindi
  - per ogni $L' \in \mathbf{co}\mathcal{C}$, esiste una riduzione $R : L' \to \overline{L}$
  - per Prop. A, $R$ è anche una riduzione da $\overline{L}'$ a $L$
  - poichè $L \in \mathcal{C}$ (completezza) e $\mathcal{C}$ è chiusa risp. alle riduzioni, anche $L' \in \mathcal{C}$
  - questo prova che $\mathbf{co}\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}$.

QED

# Problemi **coNP**-completi

## Esercizio: Indicarne almeno 3

- $\overline{\text{SAT}}$ è **coNP** completo
- $\overline{\text{HAMILTON PATH}}$ è **coNP** completo
- $\overline{\text{3-COLORING}}$ è **coNP** completo
- ...
- Nota: $\overline{\text{SAT}}$ e VALIDITY sono essenzialmente equivalenti

# Problemi **coNP**-completi

## Esercizio: Indicarne almeno 3

Per la Prop. B, $L$ è **NP**-completo sse $\overline{L}$ è **coNP**-completo, quindi:

- $\overline{\text{SAT}}$ è **coNP** completo
- $\overline{\text{HAMILTON PATH}}$ è **coNP** completo
- $\overline{\text{3-COLORING}}$ è **coNP** completo
- ...
- Nota: $\overline{\text{SAT}}$ e VALIDITY sono essenzialmente equivalenti

# Problemi **coNP**-completi

## Esercizio: Indicarne almeno 3

Per la Prop. B, $L$ è **NP**-completo sse $\overline{L}$ è **coNP**-completo, quindi:

- $\overline{\text{SAT}}$ è **coNP** completo
- $\overline{\text{HAMILTON PATH}}$ è **coNP** completo
- $\overline{\text{3-COLORING}}$ è **coNP** completo
- ...
- Nota: $\overline{\text{SAT}}$ e VALIDITY sono essenzialmente equivalenti
  - le negazioni delle formule booleane insoddisfacibili sono formule valide

# Relazioni tra **P**, **NP** e **coNP**

- Si pensa che **NP** $\neq$ **coNP**
- Se **P** $=$ **NP** allora anche **P** $=$ **coNP**
  - perchè **P** è chiusa rispetto ai complementi (come ogni classe deterministica)
- Similmente se **P** $=$ **coNP** allora anche **P** $=$ **NP**
- Invece **P** $\neq$ **NP** e **NP** $=$ **coNP** potrebbero valere simultaneamente
- inoltre...

# Relazioni tra **P**, **NP** e **coNP**

- Si pensa che **NP** $\neq$ **coNP**
- Se **P** $=$ **NP** allora anche **P** $=$ **coNP**
  - perchè **P** è chiusa rispetto ai complementi (come ogni classe deterministica)
- Similmente se **P** $=$ **coNP** allora anche **P** $=$ **NP**
- Invece **P** $\neq$ **NP** e **NP** $=$ **coNP** potrebbero valere simultaneamente
- inoltre...

# Relazioni tra **P**, **NP** e **coNP**

- Si pensa che $\mathbf{NP} \neq \mathbf{coNP}$
- Se $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$ allora anche $\mathbf{P} = \mathbf{coNP}$
  - perchè **P** è chiusa rispetto ai complementi (come ogni classe deterministica)
- Similmente se $\mathbf{P} = \mathbf{coNP}$ allora anche $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$
- Invece $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ e $\mathbf{NP} = \mathbf{coNP}$ potrebbero valere simultaneamente
- inoltre...

# Relazioni tra **P**, **NP** e **coNP**

- Si pensa che **NP** $\neq$ **coNP**
- Se **P** $=$ **NP** allora anche **P** $=$ **coNP**
  - perchè **P** è chiusa rispetto ai complementi (come ogni classe deterministica)
- Similmente se **P** $=$ **coNP** allora anche **P** $=$ **NP**
- Invece **P** $\neq$ **NP** e **NP** $=$ **coNP** potrebbero valere simultaneamente
- inoltre...

# Relazioni tra **P**, **NP** e **coNP**

- Si pensa che **NP** $\neq$ **coNP**
- Se **P** $=$ **NP** allora anche **P** $=$ **coNP**
  - perchè **P** è chiusa rispetto ai complementi (come ogni classe deterministica)
- Similmente se **P** $=$ **coNP** allora anche **P** $=$ **NP**
- Invece **P** $\neq$ **NP** e **NP** $=$ **coNP** potrebbero valere simultaneamente
- inoltre...

# Relazioni tra **P**, **NP** e **coNP** – II

**Proposizione**

$\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP} \cap \mathbf{coNP}$

- **Prova**:
  - $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP}$ lo abbiamo già dimostrato, manca solo $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{coNP}$
  - prendete qualunque $L \in \mathbf{P}$
  - $\overline{L} \in \mathbf{P}$ (perchè **P** è chiuso risp. a complemento)
  - ne segue $\overline{L} \in \mathbf{NP}$ (perchè $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP}$)
  - quindi per def., $L \in \mathbf{coNP}$

QED

# Relazioni tra **P**, **NP** e **coNP** – III

- I problemi completi per **NP** o **coNP** sono quelli che più difficilmente appartengono a **P**:
- Dato che **P** $\subseteq$ **NP** $\cap$ **coNP** e il Corollario alla proposizione 8.4
  - (se $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_1$ contiene un problema $\mathcal{C}_2$-completo allora $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$)

  abbiamo che se **P** contenesse:
  - un problema **NP**-completo allora **P** $=$ **NP** ($=$ **coNP**)
  - un problema **coNP**-completo allora **P** $=$ **coNP** ($=$ **NP**)
- Sono anche quelli che più difficilmente appartengono alla classe complementare. Per la Prop. D:
  - se un problema **coNP**-completo appartiene a **NP**, oppure
  - se un problema **NP**-completo appartiene a **coNP**, allora **NP** $=$ **coNP**

# Relazioni tra **P**, **NP** e **coNP** – III

- I problemi completi per **NP** o **coNP** sono quelli che più difficilmente appartengono a **P**:
- Dato che **P** $\subseteq$ **NP** $\cap$ **coNP** e il Corollario alla proposizione 8.4
  - (se $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_1$ contiene un problema $\mathcal{C}_2$-completo allora $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$)

  abbiamo che se **P** contenesse:
  - un problema **NP**-completo allora **P** $=$ **NP** ($=$ **coNP**)
  - un problema **coNP**-completo allora **P** $=$ **coNP** ($=$ **NP**)
- Sono anche quelli che più difficilmente appartengono alla classe complementare. Per la Prop. D:
  - se un problema **coNP**-completo appartiene a **NP**, oppure
  - se un problema **NP**-completo appartiene a **coNP**, allora **NP** $=$ **coNP**

# Relazioni tra **P**, **NP** e **coNP** – III

- I problemi completi per **NP** o **coNP** sono quelli che più difficilmente appartengono a **P**:
- Dato che **P** $\subseteq$ **NP** $\cap$ **coNP** e il Corollario alla proposizione 8.4
  - (se $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_1$ contiene un problema $\mathcal{C}_2$-completo allora $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2$)

  abbiamo che se **P** contenesse:
  - un problema **NP**-completo allora **P** $=$ **NP** ($=$ **coNP**)
  - un problema **coNP**-completo allora **P** $=$ **coNP** ($=$ **NP**)
- Sono anche quelli che più difficilmente appartengono alla classe complementare. Per la Prop. D:
  - se un problema **coNP**-completo appartiene a **NP**, oppure
  - se un problema **NP**-completo appartiene a **coNP**, allora **NP** $=$ **coNP**

# La classe **NP** $\cap$ **coNP**

## Struttura

- I problemi **NP** $\cap$ **coNP** sono sia in **NP**
  - $\Rightarrow$ le istanze "yes" hanno certificati succinti
- ...sia in **coNP**
  - $\Rightarrow$ le istanze "no" hanno *disqualifier* succinti
- certificati e disqualifiers potrebbero avere natura completamente diversa
- ed essere pensati per algoritmi di verifica indipendenti tra loro

# La classe **NP** $\cap$ **coNP**

## Struttura

- I problemi **NP** $\cap$ **coNP** sono sia in **NP**
  - $\Rightarrow$ le istanze "yes" hanno certificati succinti
- ...sia in **coNP**
  - $\Rightarrow$ le istanze "no" hanno *disqualifier* succinti
- certificati e disqualifiers potrebbero avere natura completamente diversa
- ed essere pensati per algoritmi di verifica indipendenti tra loro

# La classe **NP** $\cap$ **coNP**

## Struttura

- I problemi **NP** $\cap$ **coNP** sono sia in **NP**
  - $\Rightarrow$ le istanze "yes" hanno certificati succinti
- ...sia in **coNP**
  - $\Rightarrow$ le istanze "no" hanno *disqualifier* succinti

- certificati e disqualifiers potrebbero avere natura completamente diversa
- ed essere pensati per algoritmi di verifica indipendenti tra loro

# La classe **NP** ∩ **coNP**

## Proprietà

- Sappiamo che $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP} \cap \mathbf{coNP}$ ma non sappiamo se $\mathbf{P} = \mathbf{NP} \cap \mathbf{coNP}$
- Si può dimostrare che $\mathrm{PRIME} \in \mathbf{NP} \cap \mathbf{coNP}$ (Teorema di Pratt)
  - invece non è noto se $\mathrm{PRIME} \in \mathbf{P}$
- In ottimizzazione combinatoria sono noti problemi *duali*, che si riducono l'uno al complemento dell'altro
  - se sono entrambi in **NP** allora le riduzioni provano che sono anche in **coNP**, quindi in $\mathbf{NP} \cap \mathbf{coNP}$

# La classe NP ∩ coNP

## Proprietà

- Sappiamo che $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP} \cap \mathbf{coNP}$ ma non sappiamo se $\mathbf{P} = \mathbf{NP} \cap \mathbf{coNP}$
- Si può dimostrare che $\textsc{prime} \in \mathbf{NP} \cap \mathbf{coNP}$ (Teorema di Pratt)
  - invece non è noto se $\textsc{prime} \in \mathbf{P}$
- In ottimizzazione combinatoria sono noti problemi *duali*, che si riducono l'uno al complemento dell'altro
  - se sono entrambi in **NP** allora le riduzioni provano che sono anche in **coNP**, quindi in $\mathbf{NP} \cap \mathbf{coNP}$

# La classe **NP** $\cap$ **coNP**

## Proprietà

- Sappiamo che $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{NP} \cap \mathbf{coNP}$ ma non sappiamo se $\mathbf{P} = \mathbf{NP} \cap \mathbf{coNP}$
- Si può dimostrare che $\textsc{Prime} \in \mathbf{NP} \cap \mathbf{coNP}$ (Teorema di Pratt)
  - invece non è noto se $\textsc{Prime} \in \mathbf{P}$
- In ottimizzazione combinatoria sono noti problemi *duali*, che si riducono l'uno al complemento dell'altro
  - se sono entrambi in **NP** allora le riduzioni provano che sono anche in **coNP**, quindi in $\mathbf{NP} \cap \mathbf{coNP}$

# Capitolo di riferimento

## Papadimitriou

- Parte 3, Capitolo 10, paragrafo 10.1

# Esercizio 1

Dire se esistono riduzioni tra i seguenti problemi

- SAT e VALIDITY
- PRIMES e 2-SAT
- PRIMES e $\overline{\text{TSP(D)}}$
- CLIQUE e PRIMES

Considerare entrambe le direzioni.

Risposte possibili: "si", "no", "solo se **P** = **NP**", "non si sa"

# Esercizio 2

Assumendo che **NP** $\neq$ **coNP** dire se esistono riduzioni tra i seguenti problemi

- SAT e VALIDITY
- CLIQUE e PRIMES
- NODE COVER e 2-SAT
- PRIMES e KNAPSACK
- MAX FLOW e 3-COLORING

Considerare entrambe le direzioni.

Risposte possibili: "si", "no", "non si sa"

# Esercizio 3

Supponendo che $L_1$ sia **PSPACE**-completo e che $L_2$ sia **NPSPACE**-completo, dire se esistono riduzioni tra $L_1$ e $L_2$.

Considerare entrambe le direzioni.

Risposte possibili: "si", "no", "non si sa", "solo se $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$"