

APPENDICE A. RICHIAMI SULLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI A COEFFICIENTI COSTANTI

A.1 Generalità sulle equazioni differenziali

Cominciamo con alcuni richiami sulla terminologia generalmente utilizzata.

Si dice *equazione differenziale (E.D.) di ordine n* ogni equazione che leghi una funzione incognita $y(t)$ della variabile indipendente t alla variabile t stessa e alle derivate della y fino all'ordine n compreso attraverso una assegnata funzione F , ossia:

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, \dot{y}, y, t) = 0 \quad (\text{A.1})$$

In questo corso la variabile indipendente t rappresenterà sempre la variabile tempo.

Se dalla (A.1) è possibile esplicitare la derivata n-esima di y , essa può essere riscritta come:

$$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y, t) \quad (\text{A.2})$$

che è detta *forma normale* dell'E.D. (A.1).

Per *soluzione o integrale di un'E.D.* si intende una funzione che, sostituita, con i rispettive derivate, nell'equazione, dia luogo ad una identità.

E' facile convincersi che un'E.D. ammette infinite soluzioni. A tale scopo prendiamo in considerazione una generica E.D. del primo ordine, ossia:

$$\dot{y} = f(y, t) \quad (\text{A.3})$$

Una soluzione approssimata può essere ottenuta con una procedura numerica in cui la derivata di $y(t)$ in un generico istante può essere t_k viene approssimata con il rapporto incrementale, per cui, posto $t_{k+1} = t_k + \Delta t$, risulta:

$$\frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{\Delta t} = f(y(t_k), t_k)$$

e quindi

$$y(t_{k+1}) = y(t_k) + f(y(t_k), t_k) \Delta t \quad (\text{A.4})$$

Fissato allora, nel piano (t, y) di rappresentazione della soluzione, un istante generico t_0 e supposto, che in tale istante, la soluzione abbia il valore $y_0 = y(t_0)$, applicando iterativamente la (A.4) si ricava la soluzione. E' ovvio che variando il valore y_0 varia la soluzione. Viceversa ci si convince che per ogni punto (t_0, y_0) del piano passa una ed una sola soluzione della (A.3).

L'insieme di tutti gli integrali della (A.3) prende il nome di *integrale generale dell'E.D.* Esso è rappresentato da una funzione del tempo definita a meno di una costante arbitraria, ossia:

$$\tilde{y}(t) = \varphi(t, k)$$

dove k è una costante arbitraria.

Per contrapposizione, la soluzione passante per un punto (t_0, y_0) fissato prende il nome di *integrale particolare*. La condizione $y_0 = y(t_0)$ con cui si individua l'integrale particolare prende il nome di *condizione al contorno*. L'integrale particolare si ottiene da quello generale ricavando il valore della costante k mediante la condizione al contorno.

E' possibile dimostrare che l'integrale generale di un'E.D. di ordine n risulta definito a meno di n costanti: esse vanno determinate imponendo n condizioni al contorno; queste, generalmente ma non necessariamente, sono della forma:

$$y(t_0) = y_0, \quad \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \quad y^{(2)}(t_0) = y_0^{(2)}, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}.$$

A.2 Le equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti

Un'E.D. nella forma (A.1) è detta *lineare* se la funzione F è lineare rispetto alla funzione incognita y e a tutte le sue derivate che in essa compaiono. Pertanto la struttura più generale di un'E.D. lineare è:

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(t)\dot{y} + a_n(t)y = b(t) \quad (\text{A.5})$$

dove $a_1(t), \dots, a_n(t)$ sono funzioni del tempo note, dette coefficienti dell'E.D. lineare, e $b(t)$ è anch'essa una funzione nota.

Se i coefficienti a_1, \dots, a_n non variano al variare del tempo, l'E.D. è detta *lineare a coefficienti costanti*. Essa pertanto si presenta nella forma:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b(t) \quad (\text{A.6})$$

Se $b(t) = 0$, l'E.D. è detta *omogenea*; in caso contrario è detta *completa*.

A.3 Soluzione delle equazioni omogenee

Consideriamo un'E.D. lineare a coefficienti costanti omogenea:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = 0 \quad (\text{A.7})$$

Si dimostra che, se $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ sono n integrali della (A.7) linearmente indipendenti, l'integrale generale è:

$$y(t) = k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t) + \dots + k_n y_n(t) \quad (\text{A.8})$$

dove k_1, \dots, k_n sono costanti arbitrarie.

Gli integrali $y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)$ si dicono costituire un *sistema fondamentale*. Questo può essere individuato facilmente risolvendo la seguente equazione algebrica di grado n , detta *equazione caratteristica* associata all'E.D. omogenea:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (\text{A.9})$$

Essendo tale equazione a coefficienti reali, essa avrà radici reali o a coppie complesse coniugate.

Detta λ_i una generica radice reale di molteplicità m_i , ad essa sono associati gli m_i integrali indipendenti:

$$e^{\lambda_i t}, \quad t e^{\lambda_i t}, \dots, \quad t^{m_i-1} e^{\lambda_i t} \quad (\text{A.10})$$

mentre ad ogni coppia di radici complesse coniugate $\alpha_l \pm j\omega_l$ di molteplicità m_l sono associati $2m_l$ integrali indipendenti:

$$\begin{aligned} e^{\alpha_l t} \cos \omega_l t, \quad t e^{\alpha_l t} \cos \omega_l t, \dots, \quad t^{m_l-1} e^{\alpha_l t} \cos \omega_l t \\ e^{\alpha_l t} \sin \omega_l t, \quad t e^{\alpha_l t} \sin \omega_l t, \dots, \quad t^{m_l-1} e^{\alpha_l t} \sin \omega_l t \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Esempio A.1 *Un'E.D. omogenea del primo ordine.* Si consideri l'E.D. omogenea del primo ordine:

$$\dot{y} + 3y = 0, \quad y(0) = 4$$

L'equazione caratteristica associata è:

$$\lambda + 3 = 0$$

che ha 1 radice in $\lambda = -3$. Pertanto l'integrale generale è:

$$\tilde{y}(t) = k e^{-3t}$$

Imponendo la condizione al contorno, ossia:

$$k e^{-3t} \Big|_{t=0} = 4 \Rightarrow k = 4,$$

si ottiene che la soluzione dell'E.D. con la condizione al contorno imposta è:

$$y(t) = 4e^{-3t}$$

(Si controlli l'esattezza della soluzione mediante sostituzione).

Esempio A.2 *Un'E.D. omogenea del secondo ordine con radici reali e distinte.* Si consideri l'E.D. omogenea del secondo ordine:

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = 0, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1$$

L'equazione caratteristica associata è:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

che ha due radici reali in $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -2$. Pertanto l'integrale generale è:

$$\tilde{y}(t) = k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t}$$

Imponendo le condizioni al contorno, ossia:

$$\begin{aligned} k_1 e^{-t} + k_2 e^{-2t} \Big|_{t=0} &= 0 \\ -k_1 e^{-t} - 2k_2 e^{-2t} \Big|_{t=0} &= 1 \end{aligned}$$

si ottiene il sistema algebrico nelle incognite k_1 e k_2 :

$$\begin{cases} k_1 + k_2 = 0 \\ -k_1 - 2k_2 = 1 \end{cases}$$

che risolto fornisce:

$$\begin{aligned} k_1 &= 1 \\ k_2 &= -1 \end{aligned}$$

Pertanto la soluzione particolare è:

$$y(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

Esempio A.3 *Un'E.D. omogenea del secondo ordine con radici reali e coincidenti.* Si consideri l'E.D. omogenea del secondo ordine:

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + y = 0, \quad y(0) = -1, \dot{y}(0) = 0$$

L'equazione caratteristica associata è:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$

che ha due radici reali coincidenti in $\lambda_1 = -1$. Pertanto l'integrale generale è:

$$\tilde{y}(t) = k_1 e^{-t} + k_2 t e^{-t}$$

Imponendo le condizioni al contorno, ossia:

$$\begin{aligned} k_1 e^{-t} + k_2 t e^{-t} \Big|_{t=0} &= -1 \\ -k_1 e^{-t} - k_2 t e^{-t} + k_2 e^{-t} \Big|_{t=0} &= 0 \end{aligned}$$

si ottiene il sistema algebrico nelle incognite k_1 e k_2 :

$$\begin{cases} k_1 = -1 \\ -k_1 + k_2 = 0 \end{cases}$$

che risolto fornisce:

$$\begin{aligned} k_1 &= -1 \\ k_2 &= 1 \end{aligned}$$

Pertanto la soluzione particolare è:

$$y(t) = -e^{-t} + t e^{-t}$$

Esempio A.4 Un'E.D. omogenea del secondo ordine con radici complesse coniugate. Si consideri l'E.D. omogenea del secondo ordine:

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 3y = 0, \quad y(0) = 2, \dot{y}(0) = -1$$

L'equazione caratteristica associata è:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$$

che ha due radici complesse coniugate in $\lambda_{\pm} = -1 \pm j\sqrt{2}$. Pertanto l'integrale generale è:

$$\tilde{y}(t) = k_1 e^{-t} \cos\sqrt{2}t + k_2 e^{-t} \sin\sqrt{2}t = e^{-t} (k_1 \cos\sqrt{2}t + k_2 \sin\sqrt{2}t)$$

Imponendo le condizioni al contorno, ossia:

$$\begin{aligned} e^{-t} (k_1 \cos\sqrt{2}t + k_2 \sin\sqrt{2}t) \Big|_{t=0} &= 2 \\ -e^{-t} (k_1 \cos\sqrt{2}t + k_2 \sin\sqrt{2}t) + e^{-t} (-k_1 \sqrt{2} \sin\sqrt{2}t + k_2 \sqrt{2} \cos\sqrt{2}t) \Big|_{t=0} &= -1 \end{aligned}$$

si ottiene il sistema algebrico nelle incognite k_1 e k_2 :

$$\begin{cases} k_1 = 2 \\ -k_1 + k_2 \sqrt{2} = -1 \end{cases}$$

che risolto fornisce:

$$\begin{aligned} k_1 &= 2 \\ k_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Pertanto la soluzione particolare è:

$$y(t) = e^{-t} \left(2 \cos\sqrt{2}t + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\sqrt{2}t \right)$$

A.4 Soluzione delle equazioni complete

Consideriamo un'E.D. lineare a coefficienti costanti completa:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b(t) \quad (\text{A.12})$$

Si dimostra che l'integrale generale di tale E.D. completa è dato dalla somma dell'integrale generale $\tilde{y}(t)$ dell'equazione omogenea ad essa associata (ottenuta ponendo $b(t)=0$) e di un integrale particolare $\bar{y}(t)$ dell'equazione completa stessa, ossia:

$$y(t) = \tilde{y}(t) + \bar{y}(t) \quad (\text{A.13})$$

Un integrale particolare dell'E.D. completa può essere ottenuto in maniera semplice solo in alcuni casi particolari. Tra questi sono da includere i casi in cui la funzione $b(t)$ e le sue derivate di ordine successivo hanno la stessa struttura, come ad esempio:

- $b(t)$ è un polinomio in t (ad es. $b(t)=1$, $b(t)=t$, $b(t)=t^2$, etc.)
- $b(t)$ è una funzione sinusoidale
- $b(t)$ è una combinazione lineare di un polinomio in t (e/o di funzioni sinusoidali) e di alcune sue derivate.

E' facile convincersi che in questi casi è possibile cercare una soluzione particolare $\bar{y}(t)$ della (A.12) tra le funzioni aventi la stessa struttura della $b(t)$.

Esempio A.5 *Soluzione di un'E.D. completa del primo ordine.* Si consideri l'E.D. del primo ordine:

$$\dot{y} + 3y = t, \quad y(0) = 0$$

L'equazione omogenea associata è:

$$\dot{y} + 3y = 0$$

Come già visto nell'esempio 3.1, l'integrale generale di tale equazione omogenea è:

$$\tilde{y}(t) = ke^{-3t}$$

Per quanto riguarda un integrale particolare dell'E.D. completa, per quanto detto sopra potremo cercare una tale soluzione tra i polinomi di primo grado, ossia del tipo:

$$\bar{y}(t) = c_1 t + c_2$$

Ricaviamo i valori di c_1, c_2 . Sostituendo $\bar{y}(t)$ nell'E.D. si ha

$$c_1 + 3c_1 t + 3c_2 = t$$

per cui, in base al principio di identità dei polinomi, per aversi un'identità deve essere:

$$\begin{cases} c_1 + 3c_2 = 0 \\ 3c_1 = 1 \end{cases}$$

che risolto fornisce:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{3} \\ c_2 &= -\frac{1}{9} \end{aligned}$$

Pertanto una soluzione particolare è:

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}$$

In definitiva la soluzione generale dell'E.D. completa è:

$$y(t) = \tilde{y}(t) + \bar{y}(t) = ke^{-3t} + \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}$$

La costante k , infine, va ricavata imponendo la condizione al contorno, ossia:

$$y(0) = 0 \Rightarrow ke^{-3t} + \frac{1}{3}t - \frac{1}{9} \Big|_{t=0} = 0 \Rightarrow k - \frac{1}{9} = 0 \Rightarrow k = \frac{1}{9}$$

Pertanto la soluzione dell'E.D. con la condizione al contorno assegnata è:

$$y(t) = \frac{1}{9}e^{-3t} + \frac{1}{3}t - \frac{1}{9}$$

E' opportuno osservare che la tecnica di calcolo di una soluzione particolare precedentemente descritta può essere applicata ogniquale volta la funzione $b(t)$, nell'intervallo di integrazione (t_0, t_f) di interesse, appartiene ad una delle funzioni precedentemente elencate.

Nel caso particolare in cui in t_0 la funzione $b(t)$ presenta un impulso (come ad esempio succede se $b(t) = u(t) + \dot{u}(t) + \ddot{u}(t)$ e $u(t)$ è una rampa applicata all'istante t_0), la tecnica di calcolo può ancora essere applicata purché si calcolino preventivamente le condizioni iniziali all'istante $t_0^+ = t_0 + \varepsilon$, con ε infinitesimo. Tale calcolo, tuttavia, non è del tutto banale, ed esula dagli scopi di questo corso.

Facciamo invece notare che non ci sono problemi nel calcolo di una soluzione particolare se $b(t)$ è un segnale a gradino, a rampa, o un segnale sinusoidale applicato all'istante t_0 . Infatti si dimostra che la presenza di una discontinuità di prima specie (salto) in t_0 provoca un salto nel valore della $y^{(n)}$, ma non determina discontinuità nei valori di y e delle sue derivate successive fino a quella di ordine $(n-1)$ dove n è il grado dell'E.D., per cui non modifica le condizioni iniziali all'istante t_0^+ rispetto a quelle supposte assegnate in t_0 .