

III. ELEMENTI DI ANALISI DI SISTEMI LTI DEL PRIMO E DEL SECONDO ORDINE III-1

III.1	ASPETTI GENERALI DELL'ANALISI DEL COMPORTAMENTO DI SISTEMI LTI	III-1
III.1.1	<i>Risposta libera e risposta forzata</i>	III-1
III.1.2	<i>Segnali di ingresso test per sistemi LTI</i>	III-2
III.1.3	<i>Risposta in transitorio e risposta a regime</i>	III-5
III.1.4	<i>Alcune considerazioni sulle tecniche di analisi</i>	III-5
III.2	RAPPRESENTAZIONI INGRESSO-USCITA (I-U) DI SISTEMI LTI DI TIPO SISO	III-6
III.3	SISTEMI DEL PRIMO ORDINE	III-7
III.3.1	<i>Risposta in evoluzione libera</i>	III-9
III.3.2	<i>Risposta forzata al gradino</i>	III-11
III.3.3	<i>Risposta forzata ad una rampa</i>	III-13
III.3.4	<i>Risposta forzata ad un segnale sinusoidale</i>	III-13
III.3.5	<i>Risposta a regime e risposta in transitorio</i>	III-14
III.4	SISTEMI DEL SECONDO ORDINE	III-16
III.4.1	<i>Risposta in evoluzione libera</i>	III-17
III.4.2	<i>Parametri caratteristici di un sistema del secondo ordine</i>	III-22
III.4.3	<i>Risposta forzata al gradino</i>	III-26
III.4.4	<i>Risposta a regime e risposta in transitorio a segnali di ingresso a gradino</i>	III-34
III.4.5	<i>Risposta a regime e risposta in transitorio a segnali a rampa e sinusoidali: cenni</i>	III-34
III.5	PARAMETRI CARATTERISTICI DELLA RISPOSTA A GRADINO	III-35
III.5.1	<i>Parametri globali della risposta al gradino per sistemi del primo ordine</i>	III-36
III.5.2	<i>Parametri globali della risposta al gradino per sistemi del secondo ordine</i>	III-36

III. ELEMENTI DI ANALISI DI SISTEMI LTI DEL PRIMO E DEL SECONDO ORDINE

Lo sforzo sia di modellizzazione che di classificazione dei sistemi effettuato nel capitolo precedente è giustificato dal fatto che esso è destinato a fornire le infrastrutture necessarie per la soluzione di molti problemi di interesse ingegneristico, come ad esempio quello della realizzazione di sistemi in grado di compiere preassegnate funzioni in maniera automatica (sistemi di controllo).

Una volta costruito un modello matematico di un sistema reale, un primo passo fondamentale per la soluzione di un qualsiasi problema ingegneristico consiste nel capire come il sistema si comporta in differenti condizioni operative. Tale analisi, che va sotto il nome di *analisi del comportamento*, è basata sulla possibilità di calcolare l'andamento dell'uscita (*risposta in uscita*) e/o dello stato (*risposta nello stato*) sotto differenti segnali di ingresso e/o al variare di alcuni parametri fisici del sistema. Tale calcolo può essere effettuato, in linea di principio, in tre modi diversi:

1. calcolo analitico esatto della risposta;
2. valutazione approssimata (o andamento qualitativo) della risposta basata su parametri sintetici del modello;
3. determinazione numerica della risposta attraverso simulazione al calcolatore.

In pratica, con riferimento ai sistemi a stato vettore, il calcolo analitico esatto e l'andamento qualitativo della risposta possono essere effettuati solo per la classe dei sistemi lineari e stazionari (sistemi LTI). Infatti, per tali sistemi, il corpo teorico orientato all'analisi del comportamento è sufficientemente assestato e consente di analizzare sistemi complessi (sistemi MIMO di ordine comunque elevato) sotto diverse condizioni di sollecitazione.

In questo capitolo verrà anzitutto presentata una panoramica generale sui problemi di analisi di sistemi LTI, specificando in dettaglio i problemi da risolvere per caratterizzare il comportamento di un particolare sistema e avere così una base di confronto con altri sistemi. Successivamente l'attenzione verrà concentrata su due tipologie di sistemi particolarmente semplici e per essi verranno affrontati e risolti solo alcuni problemi, che serviranno comunque ad avere un'idea del modo in cui è possibile caratterizzare sinteticamente il comportamento di un sistema dinamico LTI.

III.1 Aspetti generali dell'analisi del comportamento di sistemi LTI

In questo paragrafo verranno illustrati alcuni concetti riguardanti l'analisi del comportamento di sistemi LTI nel caso generale, ossia validi per sistemi MIMO sia tempo continui che tempo discreti.

III.1.1 Risposta libera e risposta forzata

Consideriamo un generico sistema LTI descritto per mezzo di una rappresentazione esplicita i - s - u (X , ϕ , η). Per la linearità del sistema, in base al principio di sovrapposizione degli effetti discusso nel paragrafo II.4.3, la risposta totale nello stato e nell'uscita può essere espressa come somma di due termini:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \varphi(t-t_0, x_0 + 0, 0 + u_{[t_0, t)}) = \\
&= \varphi(t-t_0, x_0, 0) + \varphi(t-t_0, 0, u_{[t_0, t)}) = x_l(t) + x_f(t)
\end{aligned} \tag{3.1a}$$

$$\begin{aligned}
y(t) &= \eta(x_l(t) + x_f(t), 0 + u(t)) = \\
&= \eta(x_l(t), 0) + \eta(x_f(t), u(t)) = y_l(t) + y_f(t)
\end{aligned} \tag{3.1b}$$

Le (3.1) consentono di stabilire la seguente

Proprietà. In un sistema LTI la risposta nello stato e nell'uscita conseguente ad uno stato iniziale $x(t_0)=x_0$ e ad un forzamento $u(\cdot)$ possono essere ottenute come somma di due termini:

- i) il primo, detto *risposta in evoluzione libera*, rappresenta la risposta del sistema conseguente ad uno stato iniziale pari a quello effettivo $x(t_0)=x_0$ e ad un forzamento nullo;
- ii) il secondo, detto *risposta forzata*, rappresenta la risposta del sistema conseguente ad uno stato iniziale $x(t_0)=0$ e ad un forzamento pari a quello effettivo $u(\cdot)$.

Nello studio dei sistemi di controllo, in cui si è principalmente interessati a capire come comandare un dato sistema in maniera da farlo comportare in un modo desiderato, lo studio della risposta in evoluzione forzata è sicuramente di maggior interesse che non quello della risposta in evoluzione libera. Tuttavia, come si avrà modo di vedere diffusamente in seguito, l'analisi del comportamento di un sistema in evoluzione libera gioca un ruolo fondamentale anche nell'analisi qualitativa della risposta forzata.

Per quanto riguarda poi più specificamente l'analisi della risposta forzata, anche se, in pratica, i segnali di ingresso di un sistema reale possono assumere andamenti molto vari, per caratterizzare il comportamento di un sistema e per avere una base di confronto con altri sistemi si è soliti utilizzare *segnali di ingresso test* e calcolare, in maniera analitica esatta o in maniera approssimata mediante parametri sintetici, le risposte a tali segnali. Ovviamente la scelta del segnale test con cui caratterizzare il comportamento di un sistema va fatta in relazione alla tipologia dei segnali effettivi con cui il sistema verrà sollecitato durante il suo funzionamento. Vediamo quali sono i segnali test più utilizzati.

III.1.2 Segnali di ingresso test per sistemi LTI

I segnali di ingresso test più utilizzati sono: il gradino, la rampa, i segnali sinusoidali. Un altro segnale frequentemente utilizzato per caratterizzare il comportamento di un sistema, anche se in pratica poco ricorrente, è l'impulso.

Segnale a gradino. Il segnale a gradino di ampiezza unitaria applicato all'istante $t=0$, denotato con $1(t)$, è definito come:

$$u(t) = 1(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Il gradino di ampiezza U_0 applicato all'istante t_0 , denotato come $U_0 1(t-t_0)$, è definito come:

$$u(t) = U_0 1(t - t_0) = \begin{cases} U_0 & t \geq t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases}$$

Esso è mostrato in Fig.3.1

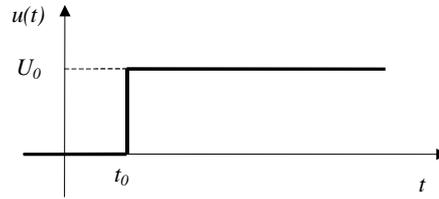


Figura 3.1 Segnale a gradino di ampiezza U_0 applicato all'istante t_0

Segnale a rampa. Il segnale a rampa di pendenza U_0 applicato all'istante t_0 , denotato con $U_0(t - t_0)1(t - t_0)$, è definito come:

$$u(t) = U_0(t - t_0)1(t - t_0) = \begin{cases} U_0(t - t_0) & t \geq t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases}$$

Esso è mostrato in Fig.3.2

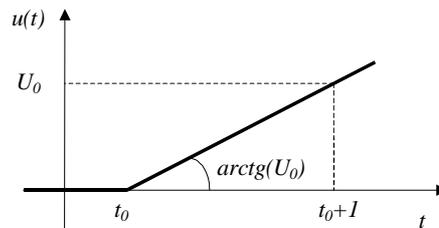


Figura 3.2 Segnale a rampa di pendenza U_0 applicato all'istante t_0

Impulso ideale (o impulso di Dirac). Il segnale impulsivo, o semplicemente impulso, è una funzione matematica che, nella pratica, non è realizzabile in maniera perfetta. Per definirlo cominciamo con il considerare un impulso rettangolare, applicato all'istante t_0 , di durata Δ e di area unitaria. Esso, denotato con $\delta_{\Delta}(t - t_0)$, è definito come:

$$u(t) = \delta_{\Delta}(t - t_0) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & t_0 \leq t < t_0 + \Delta \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Esso, per il caso di area U_0 , è mostrato in Fig.3.3.

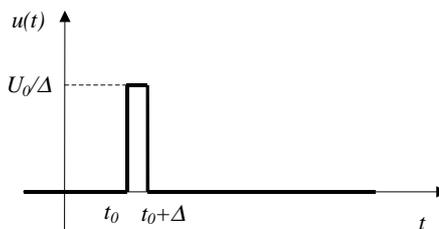


Figura 3.3 Impulso rettangolare di area U_0 applicato all'istante t_0

L'impulso ideale, anche detto impulso di Dirac, di ampiezza unitaria applicato all'istante t_0 , denotato con $\delta(t-t_0)$, è definito come il limite per Δ che tende a zero di $\delta_\Delta(t-t_0)$, ossia:

$$\delta(t-t_0) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_\Delta(t-t_0)$$

Esso, per il caso di ampiezza U_0 , è schematicamente indicato in Fig.3.4.

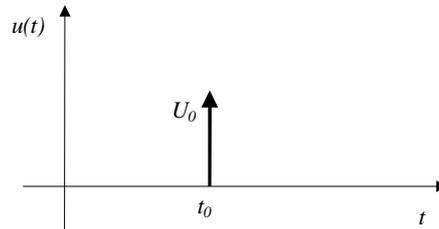


Figura 3.4 Impulso di Dirac di ampiezza U_0 applicato all'istante t_0

E' facile convincersi che $\frac{d1(t-t_0)}{dt} = \delta(t-t_0)$.

Segnale sinusoidale. Un segnale sinusoidale di ampiezza unitaria, *pulsazione* ω applicato all'istante $t=0$, denotato con $u(t)=\sin(\omega t)I(t)$ è mostrato in Fig.3.5.

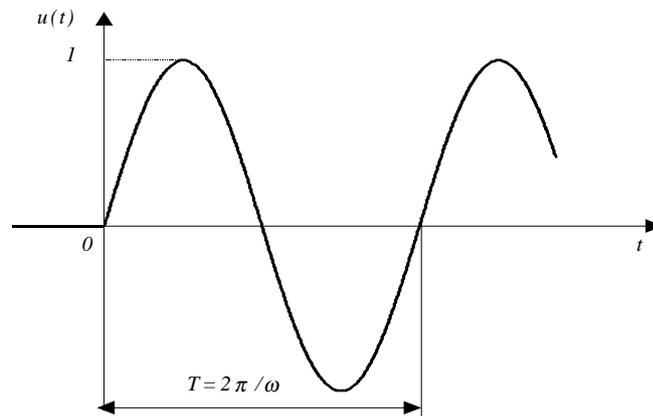


Figura 3.5 Segnale sinusoidale di ampiezza unitaria applicato all'istante $t=0$

L'intervallo di tempo $T = \frac{2\pi}{\omega}$ è detto *periodo* del segnale sinusoidale. L'inverso del periodo

$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ è detta *frequenza* del segnale sinusoidale.

Talvolta tali segnali vengono rappresentati in diagrammi in cui in ascissa, anziché il tempo t , è riportato il tempo normalizzato ωt ; in tale scala normalizzata, il periodo dell'oscillazione vale ovviamente 2π quale che sia il periodo effettivo del segnale.

Diremo segnale sinusoidale di ampiezza U_0 , pulsazione ω , fase φ , applicato all'istante $t=0$, e lo indicheremo con $u(t)=U_0\sin(\omega t+\varphi)I(t)$ il segnale mostrato in Fig.3.6.

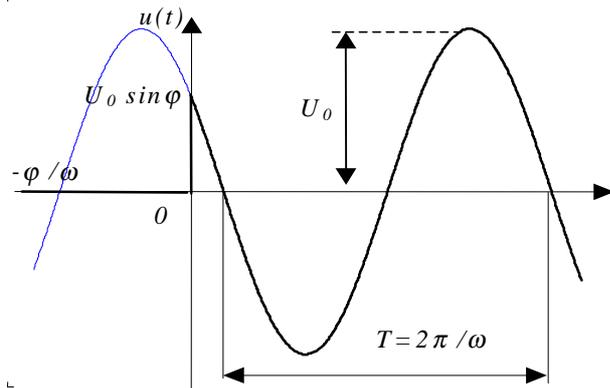


Figura 3.6 Segnale sinusoidale di ampiezza U_0 , pulsazione ω , fase φ

Un segnale sinusoidale con fase φ positiva è detto in anticipo di fase di φ radianti rispetto al segnale standard con fase 0; se φ è negativo il segnale è detto in ritardo di fase.

III.1.3 Risposta in transitorio e risposta a regime

Consideriamo un sistema in cui la risposta in evoluzione libera, quale che sia lo stato iniziale, tende a zero per t che tende all'infinito, ossia:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_l(t) = 0 \quad (3.2)$$

Supponiamo, inoltre, che esso sia forzato con un segnale $u(\cdot)$ (polinomiale, sinusoidale, ...), e che esista una funzione del tempo $x_r(t)$ (risp. $y_r(t)$) avente la stessa forma del segnale di ingresso e tale che:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (x_f(t) - x_r(t)) = 0 \quad (\text{risp.} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (y_f(t) - y_r(t)) = 0).$$

In tal caso diremo che il sistema ammette *risposta a regime* al segnale di ingresso $u(\cdot)$ e tale risposta vale $x_r(t)$ (risp. $y_r(t)$).

Se un sistema ammette risposta a regime a un segnale di ingresso $u(\cdot)$, si definisce *risposta in transitorio* $x_t(t)$ (risp. $y_t(t)$) del sistema al segnale $u(\cdot)$ la differenza tra la risposta totale e la risposta a regime, ossia:

$$x_t(t) = x(t) - x_r(t) \quad (\text{risp.} \quad y_t(t) = y(t) - y_r(t)).$$

E' possibile dimostrare che sistemi LTI per i quali vale la (3.2) ammettono risposta a regime a segnali a gradino, rampa e a segnali sinusoidali. Nell'analisi del comportamento di sistemi LTI un posto di particolare rilievo è occupato dalla risposta a regime e segnali sinusoidali.

III.1.4 Alcune considerazioni sulle tecniche di analisi

Con riferimento ai sistemi lineari LTI, sono disponibili diverse tecniche per il calcolo analitico della risposta riferite a modelli impliciti i-s-u (in seguito anche detti rappresentazioni implicite i-s-u) o ad altri tipi di modelli da essi facilmente ottenibili. La rappresentazione di riferimento è pertanto:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}\quad (3.3)$$

nel caso tempo continuo, oppure

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k)\end{aligned}\quad (3.4)$$

nel caso tempo discreto.

Tali tecniche di analisi, tuttavia, sono basate sull'uso di strumenti matematici (metodi di soluzione di sistemi di equazioni differenziali o alle differenze del primo ordine, trasformata di Laplace, trasformata di Fourier, Z-trasformata, etc.) che verranno forniti in corsi successivi. Pertanto in questo capitolo ci limiteremo a trattare solo due tipologie di sistemi abbastanza semplici, vale a dire classi particolari di sistemi SISO tempo continui del primo e del secondo ordine.

Per l'analisi di tali sistemi, anziché considerare rappresentazioni ingresso-stato-uscita, faremo riferimento alle cosiddette *rappresentazioni ingresso-uscita (i-u)*, ossia a rappresentazioni in cui lo stato non compare esplicitamente.

III.2 Rappresentazioni ingresso-uscita (i-u) di sistemi LTI di tipo SISO

Per i sistemi lineari e stazionari SISO a tempo continuo, descritti da una rappresentazione i-s-u del tipo (3.3), è quasi sempre possibile ottenere una rappresentazione i-u in termini di un'equazione differenziale del tipo:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \dots + b_n u \quad (3.5)$$

o, nel caso di sistemi a tempo discreto, da un'equazione alle differenze del tipo:

$$y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \dots + a_n y_k = b_0 u_{k+n} + b_1 u_{k+n-1} + \dots + b_n u_k \quad (3.6)$$

Per convincersi di quanto sopra detto, si consideri un sistema SISO del secondo ordine, a tempo continuo, descritto da una rappresentazione (i-s-u) nella forma (3.3). Essa in forma esplicita si scrive:

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1 u \quad (3.7a)$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2 u$$

$$\begin{aligned}y &= c_1 x_1 + c_2 x_2 + d u = \\ &= \gamma_{01} x_1 + \gamma_{02} x_2 + \delta_{00} u\end{aligned}\quad (3.7b)$$

Derivando la (3.7b) ed utilizzando le (3.7a) si ha:

$$\begin{aligned}\dot{y} &= c_1 \dot{x}_1 + c_2 \dot{x}_2 + \dot{d} u = \\ &= (c_1 a_{11} + c_2 a_{21}) x_1 + (c_1 a_{12} + c_2 a_{22}) x_2 + (c_1 b_1 + c_2 b_2) u + \dot{d} u = \\ &= \gamma_{11} x_1 + \gamma_{12} x_2 + \delta_{10} u + \delta_{11} \dot{u}\end{aligned}\quad (3.8)$$

Analogamente, derivando la (3.8) ed utilizzando sempre le (3.7a) si ha:

$$\ddot{y} = \gamma_{21} x_1 + \gamma_{22} x_2 + \delta_{20} u + \delta_{21} \dot{u} + \delta_{22} \ddot{u} \quad (3.9)$$

Risolvendo le (3.7b) e (3.8) rispetto a x_1, x_2 si ha:

$$\begin{aligned}x_1 &= \alpha_{10} y + \alpha_{11} \dot{y} + \beta_{10} u + \beta_{11} \dot{u} \\ x_2 &= \alpha_{20} y + \alpha_{21} \dot{y} + \beta_{20} u + \beta_{21} \dot{u}\end{aligned}\quad (3.10)$$

che sostituite nella (3.9) danno l'equazione i-u:

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_2y = b_0\ddot{u} + b_1\dot{u} + b_2u \quad (3.11)$$

I vantaggi di utilizzare un'equazione differenziale i-u (o un'equazione alle differenze) come rappresentazione di un sistema SISO sono i seguenti:

- essa, per sistemi semplici, è direttamente ottenibile scrivendo le relazioni costitutive del fenomeno in studio;
- offre il vantaggio di permettere di studiare il comportamento di un sistema mediante una semplice tecnica di soluzione delle equazioni differenziali lineari e a coefficienti costanti, tecnica che viene richiamata in Appendice A.

In realtà la semplificazione nello studio sussiste solo per i sistemi di basso ordine. Per i sistemi di ordine elevato, a livello operativo, essa dà luogo a seri problemi di carattere pratico, teorico e numerico, legati alla difficoltà del calcolo delle condizioni iniziali, alle difficoltà che si incontrano in presenza di segnali d'ingresso non sufficientemente regolari, a problemi di instabilità numerica. Per questo motivo in questo corso ci limiteremo ad utilizzarla solo per lo studio di classi di sistemi del primo e del secondo ordine particolarmente semplici.

III.3 Sistemi del primo ordine

Consideriamo un sistema dinamico lineare e stazionario del primo ordine, con ingresso $u(t)$, uscita $y(t)$, e descritto da un'equazione differenziale ingresso-uscita del tipo:

$$\dot{y}(t) + ay(t) = bu(t) \quad (3.12)$$

con a e b parametri costanti.

Osservazione 3.1. L'E.D. (3.12) descrive il comportamento ingresso-uscita di molti sistemi fisici, così come mostrato in Tabella 3.I in cui sono riconsiderati alcuni sistemi fisici già discussi negli Esempi 2.3, 2.4, 2.11.

Osservazione 3.2. Il sistema descritto dall'E.D. (3.12) rientra nella classe più generale di sistemi SISO descritti da un E.D. del tipo:

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}\dot{y} + a_ny = b_0u(t) \quad (3.13)$$

Per tali sistemi è abbastanza semplice ottenere una rappresentazione ingresso-stato-uscita.

Infatti, tenendo presente che, come mostrato in Appendice A, per tali sistemi la conoscenza dei valori assunti da $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, \dot{y}, y$ in un generico istante t_0 , unitamente alla conoscenza dell'ingresso $u(t)$, per $t \geq t_0$, determina completamente l'andamento futuro dell'uscita, è possibile assumere $y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, \dot{y}, y$ come variabili di stato, ossia:

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= y^{(n-1)} \end{aligned}$$

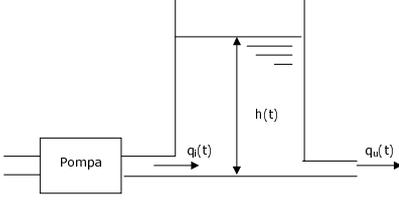
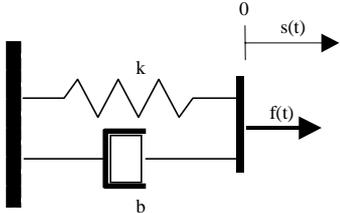
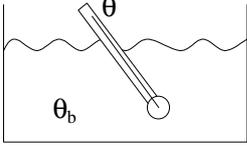
<p><i>Serbatoio con valvola di prelievo: caso di moto laminare</i></p> 	<p>$u(t) = q_i(t), \quad y(t) = h(t)$</p> <p><u>Relazioni costitutive</u></p> $S \frac{dh}{dt} = q_i(t) - q_u(t)$ $q_u(t) = kh(t)$ <p><u>E.D. in forma standard</u></p> $\dot{y} + \frac{k}{S} y = \frac{1}{S} u$
<p><i>Sistema molla - smorzatore</i></p> 	<p>$u(t) = f(t), \quad y(t) = s(t)$</p> <p><u>Relazioni costitutive</u></p> $f(t) = ks(t) + b\dot{s}(t)$ <p><u>E.D. in forma standard</u></p> $\dot{y} + \frac{k}{b} y = \frac{1}{b} u$
<p><i>Termometro</i></p> 	<p>$u(t) = \theta_b(t), \quad y(t) = \theta(t)$</p> <p><u>Relazioni costitutive</u></p> $C \frac{d\theta}{dt} = q(t)$ $q(t) = K(\theta_b(t) - \theta(t))$ <p><u>E.D. in forma standard</u></p> $\dot{y} + \frac{K}{C} y = \frac{K}{C} u$

Tabella 3.I Esempi di sistemi fisici aventi modello matematico del tipo $\dot{y}(t) + ay(t) = bu(t)$

Con tale scelta la (3.13) può essere riscritta come:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_{n-1}x_1 - a_{n-2}x_2 - \dots - a_1x_n + b_0u \end{aligned}$$

a cui corrisponde la rappresentazione implicita ingresso-stato-uscita:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

con

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad D = [0]$$

In questo caso, inoltre, lo stato iniziale coincide con le condizioni iniziali dell'E.D..

Osservazione 3.3. L'E.D. (3.13), e quindi quella (3.12) nel caso di sistemi del 1° ordine, non comprende la totalità dei sistemi lineari e stazionari di ordine n , i quali, come visto nel paragrafo III.2, sono descritti da un'E.D. del tipo:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_n u^{(n)} + b_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + b_0 u$$

Lo studio di tale classe più generale di sistemi esula dagli scopi di questo corso.

III.3.1 Risposta in evoluzione libera

Si consideri un sistema del primo ordine descritto dall'E.D. (3.12) con condizioni iniziali assegnate (supponiamo, per semplicità, all'istante $t_0=0$):

$$\dot{y} + ay = bu, \quad y(0) = y_0 \quad (3.14)$$

Come detto nel paragrafo III.1.1, la *risposta in evoluzione libera* $y_l(t)$ di un sistema è quella conseguente ad uno stato iniziale pari a quello assegnato $x(t_0)=x_0$ e ad un forzamento nullo. Nel caso in cui il sistema è rappresentato per mezzo di un'E.D. del tipo (3.14), come detto nell'Osservazione 3.2, lo stato può essere assunto coincidente con l'uscita e le sue derivate successive fino a quella di ordine $(n-1)$. Pertanto la risposta in evoluzione libera in uscita coinciderà con la soluzione dell'E.D. omogenea associata con le condizioni iniziali assegnate. Risulta pertanto:

$$\lambda + a = 0$$

Detta λ la radice di tale equazione (ovviamente è $\lambda=-a$), sarà:

$$y_l(t) = ke^{\lambda t}$$

e, imponendo la condizione iniziale, risulta:

$$y_l(t) = y_0 e^{\lambda t} \quad (3.15)$$

Pertanto l'evoluzione libera di un sistema del primo ordine ha un andamento di tipo esponenziale. Tale esponenziale, come mostrato in Fig.3.7, è *convergente* se $\lambda < 0$, *costante* se $\lambda = 0$, *divergente* se $\lambda > 0$.

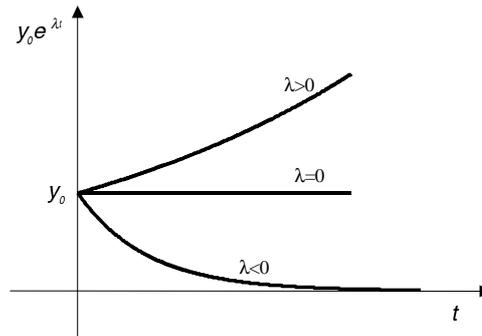


Figura 3.7 Risposta in evoluzione libera di un sistema del primo ordine

Facilmente ci si rende conto che l'andamento della risposta in evoluzione libera è completamente definito (a meno ovviamente del valore iniziale) dal valore della radice λ dell'equazione omogenea associata. Spesso, in sostituzione del valore di λ , la risposta viene caratterizzata attraverso un parametro τ , detto anche *costante di tempo del sistema del primo ordine*, legata a λ in maniera biunivoca attraverso la relazione:

$$\tau = -\frac{1}{\lambda} \quad (3.16)$$

In termini di tale parametro, si conclude che:

La risposta in evoluzione libera di un sistema LTI del primo ordine descritto dalla (3.14) è data da:

$$y_l(t) = y_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \tau = \frac{1}{a} \quad (3.17)$$

Tale costante di tempo ha un'interpretazione particolarmente utile per sistemi con risposta in evoluzione libera convergente, per i quali, essendo $\lambda < 0$, risulta $\tau > 0$. Per essi si vede facilmente che:

- per $t=3\tau$, $y_l(t) = y_0 e^{-3} \cong 0.05 y_0$, ossia la risposta in uscita si è ridotta del 95% del valore iniziale, ovvero ha raggiunto un valore al di sotto del 5% del valore iniziale;
- per $t=4.6\tau$, $y_l(t) = y_0 e^{-4.6} \cong 0.01 y_0$, ossia la risposta in uscita si è ridotta del 99% del valore iniziale, ovvero ha raggiunto un valore al di sotto del 1% del valore iniziale.

Pertanto, nel caso di sistemi a risposta convergente, se si è interessati a individuare il tempo dopo il quale la risposta in evoluzione libera si porta "praticamente a zero", tale tempo può essere stimato pari a 3 volte la costante di tempo se si è interessati ad un precisione del 5% del valore iniziale, oppure a 4.6 volte la costante di tempo se si è interessati ad un precisione del 1% del valore iniziale.

Altre interpretazioni di τ sono illustrate in Fig.3.8.

Con riferimento ai sistemi fisici mostrati in Tabella 3.I, si vede facilmente che:

- Serbatoio con valvola di prelievo: $\tau = S/k$
- Sistema molla-smorzatore: $\tau = b/k$
- Termometro: $\tau = C/K$

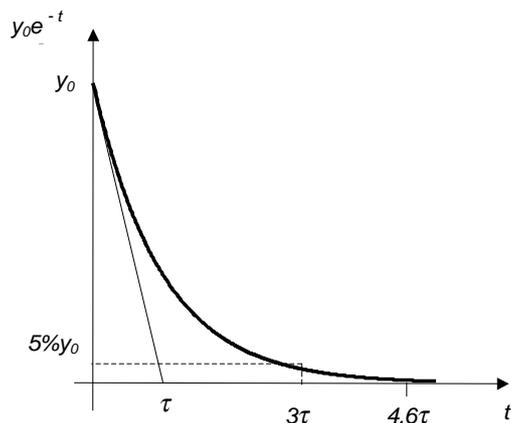


Figura 3.8 Risposta in evoluzione libera di un sistema del primo ordine convergente ($\lambda < 0$ e quindi $\tau > 0$)

L'interpretazione delle leggi trovate per i fenomeni fisici in considerazione è evidente. Così, ad esempio, se il serbatoio, in un certo istante iniziale t_0 , contiene liquido per un'altezza pari a h_0 , in assenza di altro liquido immesso esso si praticamente si svuoterà in un tempo pari a $3 \div 4.6$ volte la costante di tempo; questa, a sua volta, è direttamente proporzionale alla superficie di base del serbatoio (da questa, infatti, dipende il volume di acqua contenuto nel serbatoio) e inversamente proporzionale alla costante k , e quindi alla sezione della valvola di prelievo.

III.3.2 Risposta forzata al gradino

Come detto nel paragrafo III.1.1, la *risposta forzata* $y_f(t)$ di un sistema è quella ottenuta imponendo stato iniziale nullo e ingresso pari a quello assegnato.

In questo paragrafo calcoleremo la risposta forzata ad un gradino di un sistema del primo ordine descritto dall'E.D. (3.12), ossia:

$$\dot{y} + ay = bu, \quad y(0) = 0, \quad u(t) = U_0 1(t) \quad (3.18)$$

La risposta in uscita di tale sistema, come richiamato in Appendice A, si otterrà sommando l'integrale generale dell'omogenea associata e una soluzione particolare dell'E.D completa. Utilizzando le notazioni standard introdotte in Appendice A nel paragrafo A.4, detta λ la radice dell'equazione omogenea associata (ovviamente è $\lambda = -a$), risulta:

$$\tilde{y}(t) = ke^{\lambda t}$$

Per quanto riguarda un integrale particolare dell'E.D. completa, esso potrà essere cercato tra i polinomi di grado zero, ossia del tipo:

$$\bar{y}(t) = c$$

Sostituendo $\bar{y}(t)$ nell'E.D. si ha:

$$ac = bU_0$$

per cui:

$$c = \frac{b}{a} U_0$$

e quindi una soluzione particolare è:

$$\bar{y}(t) = \frac{b}{a} U_0$$

La soluzione generale dell'E.D. completa è:

$$y(t) = \tilde{y}(t) + \bar{y}(t) = ke^{\lambda t} + \frac{b}{a} U_0$$

La costante k , infine, va ricavata imponendo la condizione al contorno, ossia:

$$y(0) = 0 \Rightarrow ke^{\lambda t} + \frac{b}{a} U_0 \Big|_{t=0} = 0 \Rightarrow k = -\frac{b}{a} U_0$$

Pertanto la risposta forzata al gradino è:

$$y(t) = \frac{b}{a} U_0 (1 - e^{-\lambda t})$$

In tale espressione la costante moltiplicativa di U_0 , ossia il parametro b/a dipendente solo dal sistema, è detta *guadagno del sistema* ed è in genere indicata con G . Con tale posizione, ricordando anche la definizione di costante di tempo del sistema, concludiamo che:

La risposta al gradino di un sistema LTI del primo ordine è data da:

$$y(t) = GU_0 (1 - e^{-t/\tau}), \quad G = \frac{b}{a}, \quad \tau = \frac{1}{a} \quad (3.19)$$

Come si vede, l'andamento esponenziale già incontrato nella risposta in evoluzione libera caratterizza anche la risposta forzata al gradino.

In Fig.3.9 è riportata la risposta al gradino per il caso di un sistema con $\tau > 0$ ($\lambda < 0$). Come si può osservare, tale risposta tende ad un valore costante pari a GU_0 , valore che in pratica è raggiunto dopo un tempo pari a $3 \div 4.6\tau$.

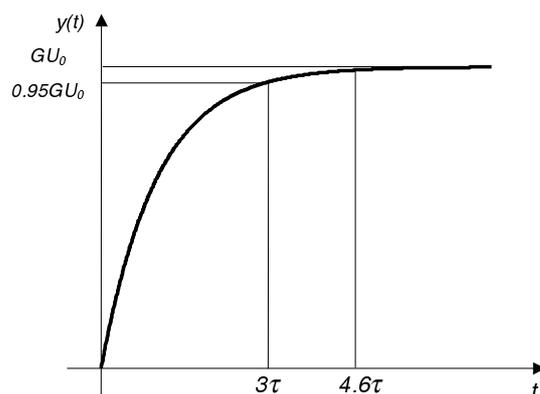


Figura 3.9 Risposta al gradino di un sistema del primo ordine avente $\tau > 0$

Con riferimento ai sistemi fisici mostrati in Tabella 3.I, si vede facilmente che:

- Serbatoio con valvola di prelievo: $\tau = S/k, \quad G = 1/k$
- Sistema molla-smorzatore: $\tau = b/k, \quad G = 1/k$
- Termometro: $\tau = C/K, \quad G = 1$

Anche in questo caso l'interpretazione delle leggi trovate per i fenomeni fisici in considerazione è evidente. Così, ad esempio, se il sistema molla smorzatore viene sollecitato con una forza a gradino di ampiezza F_0 , la posizione dell'estremo libero del sistema tende a portarsi verso un valore costante pari a F_0/k , che è proprio la posizione in cui la forza di deformazione elastica della molla equilibra la forza costante applicata. Tale posizione è in pratica raggiunta dopo un tempo pari a $3 \div 4.6$ volte la costante di tempo del sistema.

III.3.3 Risposta forzata ad una rampa

In questo paragrafo calcoleremo la risposta forzata ad una rampa di un sistema del primo ordine descritto dall'E.D. (3.12), ossia:

$$\dot{y} + ay = bu, \quad y(0) = 0, \quad u(t) = U_0 t 1(t) \quad (3.20)$$

Tenendo conto di quanto detto in Appendice A, e utilizzando un procedimento analogo a quello del paragrafo precedente, si ricava che:

La risposta forzata ad una rampa di un sistema LTI del primo ordine descritto dalla (3.20) è data da:

$$y(t) = GU_0 \left(t - \tau + \tau e^{-t/\tau} \right), \quad G = \frac{b}{a}, \quad \tau = \frac{1}{a} \quad (3.21)$$

In Fig.3.10 è riportata la risposta alla rampa per il caso di un sistema con $\tau > 0$ ($\lambda < 0$).

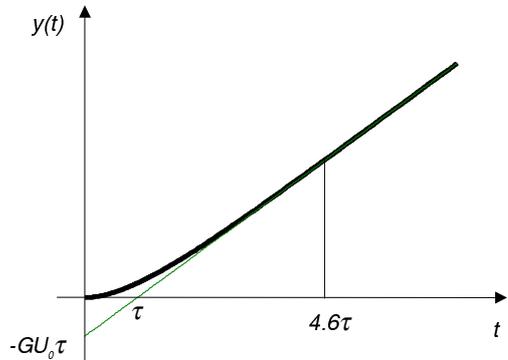


Figura 3.10 Risposta a rampa di un sistema del primo ordine avente $\tau > 0$

Come si può osservare, tale risposta, per t che tende all'infinito, tende alla retta di equazione:

$$y_r(t) = GU_0(t - \tau) \quad (3.22)$$

Questa è una retta di pendenza GU_0 e che attraversa l'asse delle ordinate nel punto di coordinate $(0, -GU_0\tau)$. Tale retta è in pratica raggiunta quando il termine $\tau e^{-t/\tau}$ diventa trascurabile, ossia dopo un tempo pari circa a $3 \div 4.6\tau$.

III.3.4 Risposta forzata ad un segnale sinusoidale

Per il sistema descritto dall'E.D. (3.12) calcoliamo ora la risposta forzata ad un segnale sinusoidale applicato all'istante $t=0$, ossia:

$$u(t) = [U_0 \sin \omega_0 t] \mathbb{1}(t) \quad (3.23)$$

In questo caso, un integrale particolare dell'E.D. sarà da ricercare tra le funzioni del tipo:

$$\bar{y}(t) = c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \cos \omega_0 t$$

Con una procedura analoga a quella del paragrafo III.3.3, con manipolazioni matematiche semplici ma tediose, si ricava che:

La risposta al segnale sinusoidale (3.23) di un sistema LTI del primo ordine è data da:

$$\left\{ \begin{array}{l} y(t) = M(\omega_0) U_0 [\sin(\omega_0 t + \varphi(\omega_0)) - \sin \varphi(\omega_0) e^{-t/\tau}] \\ \text{con} \\ M(\omega_0) = \frac{G}{\sqrt{1 + \omega_0^2 \tau^2}}, \quad \varphi(\omega_0) = -\arctg(\omega_0 \tau) \end{array} \right. \quad (3.24)$$

In Fig.3.11 sono riportati sia il segnale sinusoidale (3.23) con $U_0=1$, $\omega_0=2\pi$, che la risposta di un sistema del primo ordine avente $G=1$ e $\tau=1/2\pi$.

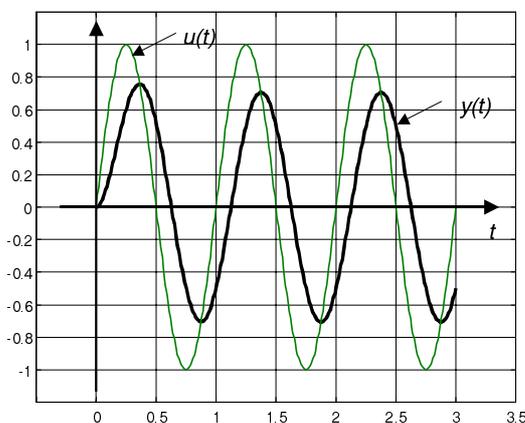


Figura 3.11 Risposta forzata di un sistema del primo ordine a un segnale sinusoidale

E' facile rendersi conto che, per t che tende all'infinito, la risposta forzata tende al segnale sinusoidale di equazione:

$$y_r(t) = M(\omega_0) U_0 \sin(\omega_0 t + \varphi(\omega_0)) \quad (3.25)$$

Questa è una senoide di pulsazione ω_0 pari a quella di ingresso, di ampiezza pari a quella di ingresso moltiplicata per $M(\omega_0)$, e sfasata rispetto a quella di ingresso di $\varphi(\omega_0)$. Tale andamento sinusoidale è in pratica raggiunta quando il termine $e^{-t/\tau}$ diventa trascurabile, ossia dopo un tempo pari circa a $3 \div 4.6 \tau$.

III.3.5 Risposta a regime e risposta in transitorio

Come detto nel paragrafo III.1.3:

"Condizione necessaria per l'esistenza della risposta a regime di un sistema è che la risposta in evoluzione libera, per qualsiasi stato iniziale, tenda a zero per t che tende all'infinito."

Nel caso di sistemi del primo ordine questa condizione è soddisfatta se e solo se $\lambda < 0$. Nel seguito di tale paragrafo, pertanto, considereremo solo sistemi con $\lambda < 0$.

Risposta a regime e in transitorio ad un gradino. Consideriamo il caso di un sistema sollecitato con ingresso a gradino. La risposta totale, somma della risposta in evoluzione libera e in evoluzione forzata, in base a quanto visto nei paragrafi III.3.1 e III.3.2, è data da:

$$y(t) = y_0 e^{-t/\tau} + GU_0 (1 - e^{-t/\tau}) \quad (3.26)$$

Facilmente si vede che, per t che tende all'infinito, tale risposta tende al valore costante:

$$y_r(t) = GU_0$$

Pertanto:

La risposta a regime di un sistema LTI del primo ordine a un gradino di ampiezza U_0 è un segnale costante di ampiezza pari a GU_0 , ossia:

$$y_r(t) = GU_0 \quad (3.27)$$

Per quanto riguarda la risposta in transitorio, poiché essa è data dalla differenza tra la risposta totale e la risposta a regime, si ha che:

La risposta in transitorio di un sistema LTI del primo ordine, conseguente all'applicazione di un gradino di ampiezza U_0 è data da:

$$y_t(t) = (y_0 - GU_0) e^{-t/\tau} \quad (3.28)$$

Come si vede, l'andamento temporale della risposta in transitorio è analogo a quello della risposta in evoluzione libera: essa ha un andamento esponenziale e si estingue praticamente dopo un tempo pari a 4.6 volte la costante di tempo del sistema.

Risposta a regime e in transitorio ad una rampa. Consideriamo ora il caso di un sistema sollecitato con ingresso a rampa. La risposta totale è data da:

$$y(t) = y_0 e^{-t/\tau} + GU_0 (t - \tau + \tau e^{-t/\tau}) \quad (3.29)$$

Come già visto nel paragrafo III.3.3, per t che tende all'infinito tale risposta tende alla retta di equazione:

$$y_r(t) = GU_0 (t - \tau)$$

Concludiamo che:

La risposta a regime di un sistema LTI del primo ordine ad una rampa di pendenza U_0 è ancora una rampa di pendenza GU_0 e risulta:

$$y_r(t) = GU_0 (t - \tau) \quad (3.30)$$

Per quanto riguarda la risposta in transitorio, essendo essa data dalla differenza tra la risposta totale e la risposta a regime, si ha che:

La risposta in transitorio di un sistema LTI del primo ordine, conseguente all'applicazione di una rampa di pendenza U_0 è data da:

$$y_t(t) = (y_0 - \tau GU_0) e^{-t/\tau} \quad (3.31)$$

Anche in questo caso l'andamento temporale della risposta in transitorio è del tipo della risposta in evoluzione libera, per cui, per sistemi con $\lambda < 0$, si estingue praticamente dopo un tempo pari a 4.6 volte la costante di tempo del sistema.

Risposta a regime e in transitorio ad un segnale sinusoidale. Per i segnali sinusoidali la risposta totale è data da:

$$y(t) = y_0 e^{-t/\tau} + M(\omega_0) U_0 \left[\sin(\omega_0 t + \varphi(\omega_0)) - \sin \varphi(\omega_0) e^{-t/\tau} \right] \quad (3.32)$$

Per t che tende all'infinito tale risposta tende al segnale sinusoidale di equazione:

$$y_r(t) = M(\omega_0) U_0 \sin(\omega_0 t + \varphi(\omega_0))$$

Pertanto:

La risposta a regime di un sistema LTI del primo ordine ad una segnale sinusoidale di ampiezza U_0 e pulsazione ω_0 è data da

$$y_r(t) = M(\omega_0) U_0 \sin(\omega_0 t + \varphi(\omega_0)) \quad (3.33)$$

per cui essa è ancora una sinusoide di pulsazione ω_0 pari a quella di ingresso, di ampiezza pari a quella di ingresso moltiplicata per $M(\omega_0)$, e sfasata rispetto a quella di ingresso di $\varphi(\omega_0)$ ($M(\omega_0)$ e $\varphi(\omega_0)$ sono specificate nella (3.24).

Per quanto riguarda la risposta in transitorio, essendo essa data dalla differenza tra la risposta totale e la risposta a regime, si ha che:

La risposta in transitorio di un sistema LTI del primo ordine, conseguente all'applicazione di segnale sinusoidale di ampiezza U_0 e pulsazione ω_0 è data da

$$y_t(t) = (y_0 - M(\omega_0) U_0 \sin \varphi(\omega_0)) e^{-t/\tau} \quad (3.34)$$

Anche in questo caso l'andamento temporale della risposta in transitorio è del tipo della risposta in evoluzione libera, per cui, per sistemi con $\lambda < 0$, si estingue praticamente dopo un tempo pari a 4.6 volte la costante di tempo del sistema.

III.4 Sistemi del secondo ordine

Prendiamo nuovamente in considerazione un sistema massa-molla-attrito del tipo di quello considerato nell'Esempio 2.8, ma con massa costante (vedi Fig.3.12). La relazione costitutiva che ne descrive il comportamento è fornita dalla seconda legge di Newton:

$$m\ddot{s} = -b\dot{s} - ks + f \quad (3.35)$$

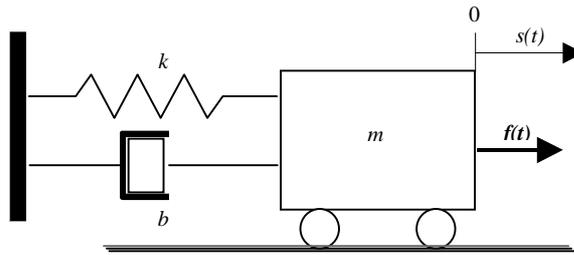


Figura 3.12 Sistema massa-molla-smorzatore

Tale sistema ci porta in maniera naturale a considerare la classe di sistemi che considereremo in questo paragrafo, ossia i sistemi SISO, dinamici, lineari e stazionari del secondo ordine, con ingresso $u(t)$, uscita $y(t)$, e descritti da un'equazione differenziale ingresso-uscita del tipo:

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y}(t) + a_2 y(t) = bu(t)$$

con a_1, a_2, b parametri costanti.

Diciamo subito che, a causa della maggiore complessità nella trattazione matematica di tali sistemi, limiteremo la nostra analisi di dettaglio al calcolo della risposta in evoluzione libera, della risposta forzata al gradino, e della risposta a regime e in transitorio ad un segnale a gradino. L'analisi della risposta ad ingressi a rampa e di tipo sinusoidale sarà trattata dando solo alcuni risultati senza dimostrazione.

III.4.1 Risposta in evoluzione libera

La risposta in evoluzione libera del sistema:

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y}(t) + a_2 y(t) = bu(t) \tag{3.36}$$

con condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} y(0) &= y_0 \\ \dot{y}(0) &= \dot{y}_0 \end{aligned} \tag{3.37}$$

dipende dalla natura delle radici dell'equazione caratteristica dell'omogenea associata, ossia:

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0 \tag{3.38}$$

Le radici λ_1, λ_2 di tale equazione possono essere:

1. reali e distinte;
2. reali e coincidenti;
3. complesse coniugate.

Le soluzioni esplicite per i tre casi sono riportate in Tabella 3.II.

Caso di radici λ_1, λ_2 reali e distinte

$$y_l(t) = \frac{\dot{y}_0 - \lambda_2 y_0}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} - \frac{\dot{y}_0 - \lambda_1 y_0}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t} \quad (3.39)$$

Caso di radici $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ reali e coincidenti

$$y_l(t) = y_0 e^{\lambda t} + (\dot{y}_0 - \lambda y_0) t e^{\lambda t} \quad (3.40)$$

Caso di radici $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\omega$ complesse e coniugate

$$y_l(t) = y_0 e^{\alpha t} \cos \omega t + \frac{(\dot{y}_0 - \alpha y_0)}{\omega} e^{\alpha t} \sin \omega t = A e^{\alpha t} \sin(\omega t + \beta) \quad (3.41)$$

con

$$A = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\dot{y}_0 - \alpha y_0}{\omega} \right)^2}, \quad \beta = \arctg \frac{\omega y_0}{\dot{y}_0 - \alpha y_0}$$

Tabella 3.II Risposta in evoluzione libera di un sistema del secondo ordine

Tali formule si ricavano con i procedimenti richiamati in Appendice A. Per quanto riguarda poi il rispetto delle condizioni iniziali, esso può essere verificato per sostituzione diretta.

Le espressioni della risposta in evoluzione libera riportate in Tab.3.II, tuttavia, non danno un'immediata percezione dell'andamento temporale di tale risposta. Per ricavare tali andamenti consideriamo separatamente le tre diverse situazioni.

Caso di radici reali e distinte. In questo caso la risposta in evoluzione libera, come richiamato in Appendice A, è data da:

$$y_l(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t} \quad (3.42)$$

con k_1, k_2 dipendenti sia dalle condizioni iniziali che da λ_1, λ_2 . Essa è pertanto data dalla combinazione lineare di due leggi esponenziali del tipo di quelle già considerate per i sistemi del primo ordine. Valgono pertanto le seguenti proprietà.

Proprietà 1. Se almeno una delle due le radici λ_1, λ_2 è positiva, la risposta in evoluzione libera è divergente.

Proprietà 2. Se una delle due le radici, supponiamo λ_1 , è nulla e l'altra è negativa, la risposta in evoluzione libera tende ad assumere asintoticamente un valore costante pari a k_1 .

Proprietà 3. Se entrambe le radici λ_1, λ_2 sono negative, la risposta in evoluzione libera tende asintoticamente a zero. Dette $\tau_i = -1/\lambda_i$, $i=1,2$ le costanti di tempo associate alle due radici, ciascuno dei due termini esponenziali va a "zero" dopo un tempo pari 3÷4.6 volte la costante di tempo associata, per cui, in prima approssimazione, si può ritenere che l'intera risposta in evoluzione libera vada a "zero" dopo un tempo pari a 3÷4.6 volte *la più grande costante di tempo* $\tau_{\max} = \max\{\tau_1, \tau_2\}$. Possibili andamenti della risposta in evoluzione libera per $\tau_1 = 1, \tau_2 = 0.2$ e al variare di k_1, k_2 sono riportati in Fig.3.13.

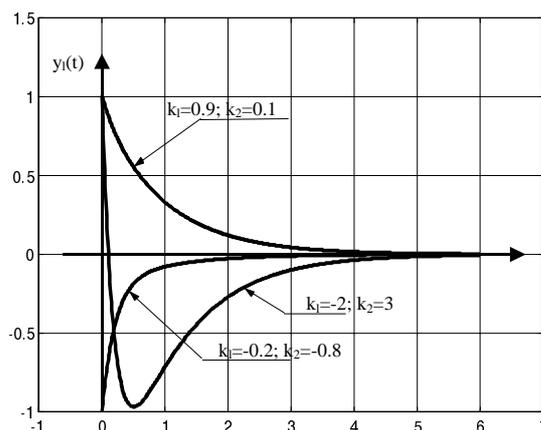


Figura 3.13 Risposta in evoluzione libera di un sistema del secondo ordine avente $\tau_1 = 1, \tau_2 = 0.2$

Esempio 3.5. Si consideri il sistema massa-molla-smorzatore descritto dall'Eq. (3.35). Questa, posto $u(t)=f(t)$ e $y(t)=s(t)$, può essere riscritta nella forma standard:

$$\ddot{y} + \frac{b}{m} \dot{y} + \frac{k}{m} y = u$$

per cui l'omogenea associata è:

$$\lambda^2 + \frac{b}{m} \lambda + \frac{k}{m} = 0$$

Si nota subito che, essendo i parametri fisici positivi, per la regola di Cartesio le radici sono sempre a parte reale negativa. Esse valgono:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4k}{4m^2}}$$

Pertanto, nel caso di $b^2 > 4k$ (sistema sovrasmorzato) le radici sono reali e distinte. In tal caso, in dipendenza delle condizioni iniziali su posizione e velocità della massa, si possono avere situazioni di evoluzione dello spostamento $s(t)$ della massa come quelle riportate in Fig.3.13.

Caso di radici reali e coincidenti. Posto $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, la risposta in evoluzione libera è data da:

$$y_1(t) = k_1 e^{\lambda t} + k_2 t e^{\lambda t} \quad (3.43)$$

con k_1, k_2 dipendenti sia dalle condizioni iniziali che da λ . Per quanto riguarda il termine $k_1 e^{\lambda t}$, per esso valgono le stesse considerazioni di convergenza, costanza o divergenza fatte per i sistemi del primo ordine.

Per quanto riguarda invece il termine $t e^{\lambda t}$, valgono invece le seguenti considerazioni.

Proprietà 1. Se λ è positiva, la risposta in evoluzione libera è divergente.

Proprietà 2. Se λ è nulla, il termine si riduce a $t e^{0t} = t$, per cui la risposta in evoluzione libera è divergente (vedi Fig.3.14).

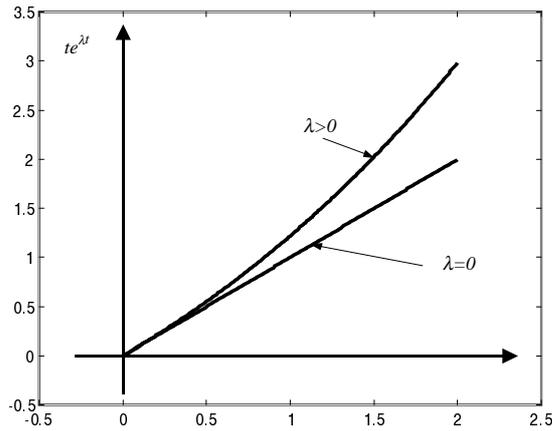


Figura 3.14 Grafico del termine $te^{\lambda t}$

Proprietà 3. Se λ è negativa, la risposta in evoluzione libera tende asintoticamente a zero con un andamento del tipo mostrato in Fig.3.15. Come si vede, il valore zero è praticamente raggiunto dopo un tempo maggiore di 4.6 volte τ come invece succede per i sistemi del primo ordine. In tal caso, infatti, il tempo necessario per raggiungere lo zero a meno dell'1% del valore iniziale della risposta è stimabile in 6.6τ .

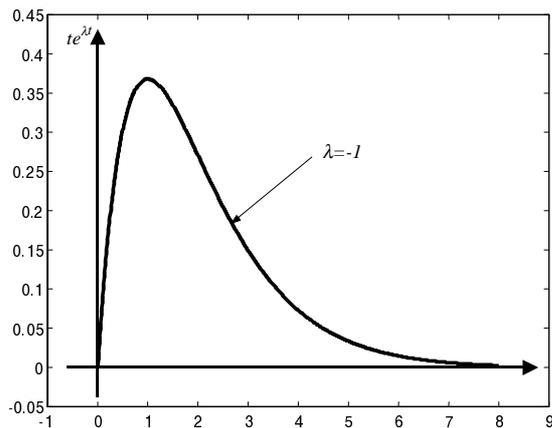


Figura 3.15 Grafico del termine $te^{\lambda t}$ nel caso di $\lambda < 0$

In definitiva, a differenza di quanto avviene nel caso di radici distinte, se le radici sono coincidenti ed entrambe nulle la risposta è divergente.

Caso di radici complesse e coniugate. In questo caso, posto

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\omega$$

in base a quanto detto in Appendice A la risposta in evoluzione libera è data da:

$$y_1(t) = k_1 e^{\alpha t} \sin \omega t + k_2 e^{\alpha t} \cos \omega t \quad (3.44)$$

con k_1, k_2 dipendenti sia dalle condizioni iniziali che da α, ω . Esprimendo la coppia (k_1, k_2) in termini di un'altra coppia di costanti (A, β) definita come:

$$\begin{aligned} k_1 &= A \cos \beta \\ k_2 &= A \sin \beta \end{aligned} \quad (3.45)$$

per cui:

$$A = \sqrt{k_1^2 + k_2^2} \quad (3.46)$$

$$\beta = \arctg \frac{k_1}{k_2}$$

si ottiene:

$$y_1(t) = Ae^{\alpha t} \sin(\omega t + \beta) \quad (3.47)$$

con (A, β) dipendenti sia dalle condizioni iniziali che da α, ω .

La legge oraria $e^{\alpha t} \sin \omega t$ è una legge di tipo oscillatoria i cui picchi hanno un inviluppo esponenziale. Il carattere di convergenza o divergenza di tale legge oraria sarà determinato esclusivamente dal segno di α : per $\alpha < 0$, l'oscillazione è convergente (vedi Fig.3.16a); per $\alpha = 0$, l'oscillazione è di ampiezza costante, ossia è sinusoidale (vedi Fig.3.16b); per $\alpha > 0$, l'oscillazione è divergente (vedi Fig.3.16c).

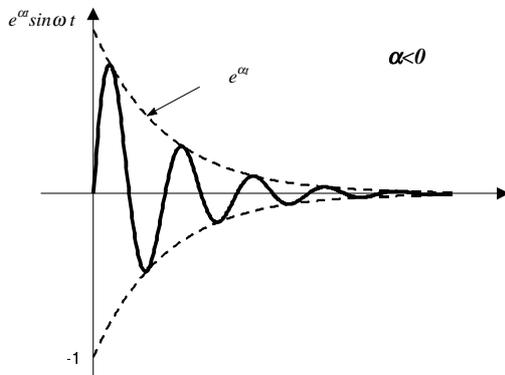


Figura 3.15a

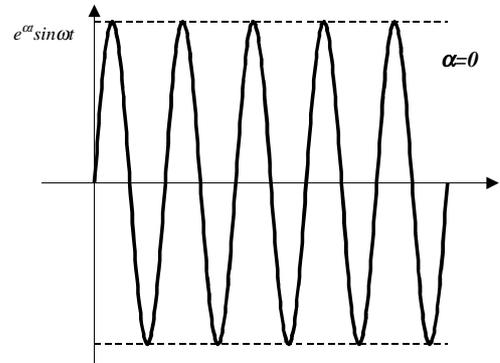


Figura 3.15b

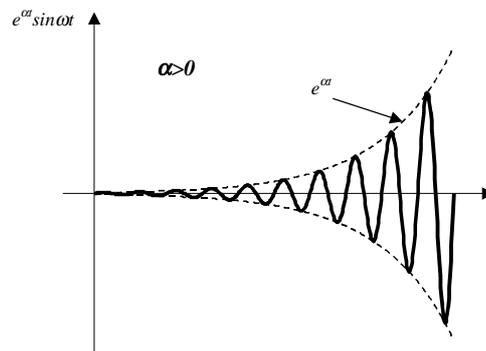


Figura 3.15c Grafici del termine $e^{\alpha t} \sin \omega t$

In chiusura di tale paragrafo facciamo notare che, mettendo insieme risultati relativi a sistemi del primo ordine e a sistemi del secondo ordine, possiamo concludere che il carattere di convergenza, non divergenza, e divergenza della risposta di tali sistemi è esclusivamente determinato dal segno della parte reale delle radici dell'equazione caratteristica del sistema. Valgono infatti le seguenti proprietà:

Caso 1: risposta libera convergente. La risposta in evoluzione libera di un sistema del primo o secondo ordine è convergente per qualsiasi insieme di condizioni iniziali se e solo se le radici dell'equazione caratteristica sono tutte a parte reale negativa. Sistemi che godono di questa proprietà sono detti essere *asintoticamente stabili*.

Caso 2: risposta libera non divergente. La risposta in evoluzione libera di un sistema del primo o secondo ordine è non divergente per qualsiasi insieme di condizioni iniziali se e solo l'equazione caratteristica non ha radici a parte reale positiva e, nel caso di sistemi del secondo ordine, non ha una coppia di radici nulle. Sistemi che godono di questa proprietà sono detti essere *semplicemente stabili*.

Caso 3: risposta libera divergente. La risposta in evoluzione libera di un sistema del primo o secondo ordine è divergente se l'equazione caratteristica ha qualche radice a parte reale positiva oppure, nel caso di sistemi del secondo ordine, ha una coppia di radici nulle. Sistemi che godono di questa proprietà sono detti essere *instabili*.

III.4.2 Parametri caratteristici di un sistema del secondo ordine

Come visto nel paragrafo precedente, l'andamento della risposta in evoluzione libera di un sistema del secondo ordine con radici complesse e coniugate è completamente caratterizzato dalla coppia di parametri (α, ω) che rappresentano parte reale e coefficiente dell'immaginario delle radici stesse. Tali parametri danno un'informazione diretta sia sulla legge esponenziale che involuppa i picchi delle oscillazioni (parametro α) che sulla pulsazione delle oscillazioni (parametro ω).

Di frequente, anziché utilizzare tali parametri, vengono utilizzate altre coppie di parametri legate ad (α, ω) attraverso semplici relazioni, e che forniscono un'informazione più direttamente legata ad altre caratteristiche della risposta, soprattutto nel caso di moto oscillatorio convergente.

Parametri (τ, T) . Il parametro τ , legato ad α dalla relazione:

$$\tau = -\frac{1}{\alpha}$$

è detto costante di tempo della legge oraria del moto. Nel caso di $\alpha < 0$, e quindi $\tau > 0$, esso ha lo stesso significato già discusso per i sistemi del primo ordine: fornisce un'indicazione sul tempo dopo il quale la legge oraria del moto (in questo caso convergente) raggiunge praticamente lo zero (ad es. 4÷5 volte τ). Ovviamente, a differenza dei sistemi del primo ordine, in questo caso il calcolo è approssimato in quanto basato sull'involuppo esponenziale della legge oraria del moto.

Il parametro T , legato ad ω dalla relazione

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

rappresenta il periodo della sinusoide della legge oraria del moto. Talvolta, anziché il periodo T , viene specificata la frequenza $f = 1/T$.

Parametri (ζ, ω_n) .

Definizione. Per definire tale coppia di parametri, facciamo riferimento alla posizione delle radici complesse coniugate ($\alpha \pm j\omega$) nel piano complesso ($\alpha, j\omega$).

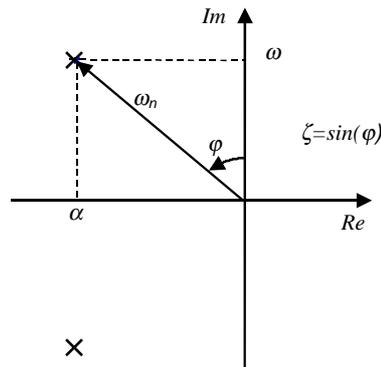


Figura 3.16 Definizione dei parametri (ζ, ω_n)

Come mostrato nella Fig.3.16, con riferimento al vettore rappresentativo del numero complesso ($\alpha + j\omega$), ω_n è il modulo di tale vettore, mentre ζ è il seno dell'angolo formato dal semiasse positivo delle ordinate con il vettore stesso (l'angolo si intende computato positivamente in verso antiorario).

- ω_n è detta *pulsazione naturale* della legge oraria del moto
- ζ è detto *coefficiente di smorzamento*.

Facilmente si ricavano le formule di passaggio dalla coppia (α, ω) a quella (ζ, ω_n) e viceversa. Risulta:

$$\begin{cases} \omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} \\ \zeta = \frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \end{cases} \quad (3.48)$$

mentre le formule inverse sono:

$$\begin{cases} \alpha = -\zeta\omega_n \\ \omega = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \end{cases} \quad (3.49)$$

Dalla seconda delle (3.48) si evince che il segno di ζ è opposto a quello di α ; inoltre $\alpha=0 \Leftrightarrow \zeta=0$. Pertanto il segno di ζ consente di stabilire la convergenza o la divergenza della legge oraria del moto:

- $\zeta > 0 \Rightarrow$ legge oraria del moto convergente;
- $\zeta = 0 \Rightarrow$ legge oraria del moto di tipo sinusoidale;
- $\zeta < 0 \Rightarrow$ legge oraria del moto divergente.

Relazione tra la coppia di parametri (ζ, ω_n) e i coefficienti (a_1, a_2) dell'E.D. Chiediamoci ora se la coppia di parametri (ζ, ω_n) può essere ricavata in maniera diretta dai coefficienti (a_1, a_2) dell'equazione caratteristica (3.38) senza passare attraverso il calcolo delle radici e l'utilizzazione delle (3.48). A tal proposito notiamo che, dette ($\alpha + j\omega$) le radici dell'equazione (3.38) che qui riscriviamo:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

essa può essere riscritta come:

$$[\lambda - (\alpha + j\omega)][\lambda - (\alpha - j\omega)] = 0$$

Con alcuni semplici passaggi si ottiene:

$$[\lambda - (\alpha + j\omega)][\lambda - (\alpha - j\omega)] = (\lambda - \alpha)^2 + \omega^2 = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha^2 + \omega^2$$

Pertanto, utilizzando le prime delle (3.48) e (3.49), la (3.38) può risciversi come:

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0 \quad (3.50)$$

Si conclude pertanto che:

$$a_1 = 2\zeta\omega_n \quad a_2 = \omega_n^2 \quad (3.51)$$

da cui si ha anche:

$$\omega_n = \sqrt{a_2} \quad \zeta = \frac{a_1}{2\sqrt{a_2}} \quad (3.52)$$

Notiamo ora che, nel caso in cui le relazioni (3.51) sono utilizzate per ricavare i valori di (ζ, ω_n) in un'equazione della forma (3.38) che presenta radici reali e distinte (ossia $a_1^2 - 4a_2 \geq 0$, in base alla (3.52) risulta anche $|\zeta| \geq 1$). Questo nuovo ζ può essere visto come una generalizzazione di quello introdotto per il caso di radici complesse coniugate. Per esso, infatti, in base a quanto detto, si ha:

- $|\zeta| < 1 \Rightarrow$ radici complesse coniugate;
- $|\zeta| = 1 \Rightarrow$ radici reali e coincidenti;
- $|\zeta| > 1 \Rightarrow$ radici reali e distinte.

Ovviamente l'interpretazione geometrica di (ζ, ω_n) data attraverso la Fi.3.16 è valida nel solo caso di radici complesse coniugate.

Interpretazione del significato di (ζ, ω_n) . Consideriamo il caso di un sistema avente $0 < \zeta < 1$, ossia moto oscillatorio convergente. In tal caso, se restringiamo ulteriormente la nostra attenzione al caso di $0 < \zeta \ll 1$, è possibile dare di ζ un'interpretazione particolarmente interessante. Infatti, con semplici passaggi si ottiene:

$$\frac{1}{\zeta} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}{-\alpha} \cong \frac{\omega}{-\alpha} = \frac{2\pi}{T} \tau \cong \frac{6\tau}{T} \quad (3.53)$$

Poiché 6τ è circa 2 volte il tempo necessario perché la legge oraria del moto vada praticamente a zero, e T è il periodo dell'oscillazione, concludiamo che, nel caso considerato, il valore $\frac{1}{2\zeta}$ fornisce una stima del numero di oscillazioni che la risposta in evoluzione libera del sistema compie prima di raggiungere praticamente il valore 0.

Tornando al caso generale di $0 < \zeta < 1$, possiamo dire che ζ fornisce una misura della tendenza del sistema a oscillare: quanto più ζ è prossimo a 1, tanto più le oscillazioni sono smorzate.

Per quanto riguarda ω_n , poiché dalla seconda delle (3.49) risulta:

$$\omega_n = \frac{\omega}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

possiamo dire che essa rappresenta la pulsazione che avrebbero le oscillazioni nel caso di sistema non smorzato (ossia con $\zeta = 0$).

Utilizzando le suddette interpretazioni di ζ e ω_n è possibile caratterizzare qualitativamente l'andamento della risposta in evoluzione libera di un sistema del secondo ordine in maniera molto semplice, come mostra il seguente esempio.

Esempio 3.6. Si consideri un sistema massa-molla-smorzatore del tipo considerato nell'esempio 3.5. Esso è descritto dall'E.D.

$$\ddot{y} + \frac{b}{m} \dot{y} + \frac{k}{m} y = \frac{1}{m} u$$

Questa può risciversi nella forma:

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_n \dot{y} + \omega_n^2 y = \frac{1}{m} u$$

con:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}}$$

Si vuole caratterizzare l'andamento qualitativo della risposta in evoluzione libera nel caso di: $m=1kg$, $b=2Ns/m$, $k=25N/m$.

Risulta:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{25}{1}} = 5 \text{ rad/sec}$$

$$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}} = \frac{2}{2\sqrt{25 \cdot 1}} = 0.2$$

Concludiamo che:

- poiché $0 < \zeta < 1$, la risposta in evoluzione libera è oscillatoria smorzata;
- poiché $\zeta \ll 1$, la massa compirà 3+4 oscillazioni (l'inverso di ζ è pari a 5) prima di raggiungere praticamente il valore 0;
- $\alpha = -\zeta\omega_n = -1 \Rightarrow \tau = 1 \text{ sec}$, per cui le oscillazioni in uscita si smorzano dopo circa 5 sec;
- il periodo delle oscillazioni è

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \cong 1.3 \text{ sec}$$

Con queste informazioni siamo in grado di disegnare l'andamento qualitativo della risposta. In Fig.3.17 è riportato l'andamento "esatto" nel caso di $y_0 = 0.1m$, $\dot{y}_0 = 1m/sec$.

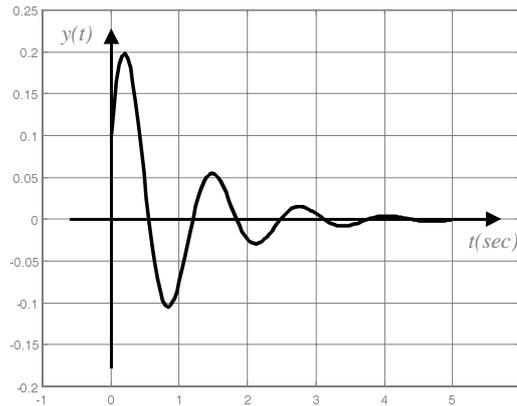


Figura 3.17 Risposta del sistema dell'Esempio 3.6

Ovviamente il tracciamento dell'andamento "esatto" per assegnate condizioni iniziali potrà essere effettuato solo calcolando la soluzione analitica esatta dell'E.D..

III.4.3 Risposta forzata al gradino

Consideriamo un sistema descritto dall'E.D. i-u:

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y = bu \quad (3.54)$$

e proponiamoci di calcolare la risposta forzata al gradino, ossia la risposta al segnale $u(t) = U_0 1(t)$ con condizioni iniziali nulle, ossia: $y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0$.

Anche in questo caso l'espressione della risposta dipende dalle radici dell'equazione caratteristica. In tabella 3.III sono riportate le varie forme assunte dalla risposta forzata a gradino.

Posto:

$$G = \frac{b}{a_2} \quad (3.55)$$

si ha:

Caso di radici λ_1, λ_2 reali e distinte ($|\zeta| > 1$)

$$y(t) = GU_0 \left[1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t} \right] \quad (3.56)$$

Caso di radici $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ reali e coincidenti ($|\zeta| = 1$)

$$y(t) = GU_0 [1 - e^{\lambda t} + \lambda t e^{\lambda t}] \quad (3.57)$$

Caso di radici $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\omega$ complesse e coniugate ($|\zeta| < 1$)

$$y(t) = GU_0 \left[1 - \frac{1}{\sin\theta} e^{\alpha t} \sin(\omega t + \theta) \right] \quad (3.58)$$

$$\theta = \arctg(-\omega / \alpha)$$

Tabella 3.III Risposta forzata al gradino di un sistema del secondo ordine

Analizziamo ora in maniera dettagliata le varie situazioni.

L'equazione omogenea associata all'E.D (3.54) è:

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0.$$

Le radici di tale equazione, al variare del valore di ζ possono essere scritte come:

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} \lambda_1, \lambda_2, & |\zeta| > 1 \\ \lambda, \lambda, & |\zeta| = 1 \\ \alpha \pm j\omega, & |\zeta| < 1 \end{cases} \quad (3.59)$$

Con tali notazioni, la soluzione generale dell'omogenea associata, per i vari casi, si può scrivere come segue:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t}, & |\zeta| > 1 \\ k_1 e^{\lambda t} + k_2 t e^{\lambda t}, & |\zeta| = 1 \\ k_1 e^{\alpha t} \sin(\omega t + k_2), & |\zeta| < 1 \end{cases} \quad (3.60)$$

con k_1, k_2 costanti arbitrarie.

Per quanto riguarda un integrale particolare dell'E.D. completa, esso potrà essere cercato tra i polinomi di grado zero, ossia del tipo:

$$\bar{y}(t) = c$$

Sostituendo $\bar{y}(t)$ nell'E.D. si ha

$$a_2 c = b U_0$$

per cui

$$c = \frac{b}{a_2} U_0$$

e quindi una soluzione particolare è:

$$\bar{y}(t) = \frac{b}{a_2} U_0 \quad (3.61)$$

La costante moltiplicativa di U_0 , ossia il parametro b/ω_n^2 , dipendente solo dal sistema, sarà in seguito indicata con G . Essa, con riferimento all'E.D. i-u (come la (3.54)), è data dal rapporto tra il coefficiente di u nel secondo membro dell'E.D. e il coefficiente di y a primo membro. G è detta *costante di guadagno del sistema*.

La soluzione generale dell'E.D. completa è allora:

$$y(t) = \bar{y}(t) + \tilde{y}(t) = \begin{cases} GU_0 + k_1 e^{\lambda_1 t} + k_2 e^{\lambda_2 t}, & |\zeta| > 1 \\ GU_0 + k_1 e^{\lambda t} + k_2 t e^{\lambda t}, & |\zeta| = 1 \\ GU_0 + k_1 e^{\alpha t} \sin(\omega t + k_2), & |\zeta| < 1 \end{cases} \quad (3.62)$$

Le costanti k_1, k_2 vanno ricavate imponendo le condizioni al contorno. Essendo tale calcolo alquanto laborioso, nel seguito sono forniti e commentati i risultati separatamente nei tre casi.

Caso di $|\zeta| > 1$: radici reali e distinte. In tal caso la risposta forzata al gradino risulta essere:

$$y(t) = GU_0 \left[1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_2 t} \right] \quad (3.63)$$

Come si vede, gli andamenti esponenziali già incontrati nella risposta in evoluzione libera caratterizzano anche la risposta forzata al gradino.

La (3.63) può anche esprimersi in termini delle costanti di tempo τ_1, τ_2 associate alle radici λ_1, λ_2 :

$$y(t) = GU_0 \left[1 + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right] \quad (3.64)$$

Ovviamente i due termini esponenziali vanno entrambi a zero se e solo se le due radici sono entrambe negative (e quindi le costanti di tempo positive), ossia se il sistema è asintoticamente stabile. In tal caso la risposta al gradino tende ad un valore costante pari a GU_0 , valore che, se una delle due costanti di tempo è molto maggiore dell'altra, è in pratica raggiunto dopo un tempo pari a circa 4.6 volte la più alta costante di tempo.

In Fig.3.18 è riportata la risposta al gradino per il caso di un sistema con $\tau_2 > \tau_1 > 0$, ossia di leggi esponenziali convergenti, ed in particolare $\tau_2 = 1 \text{ sec}$, $\tau_1 = 0.2 \text{ sec}$.

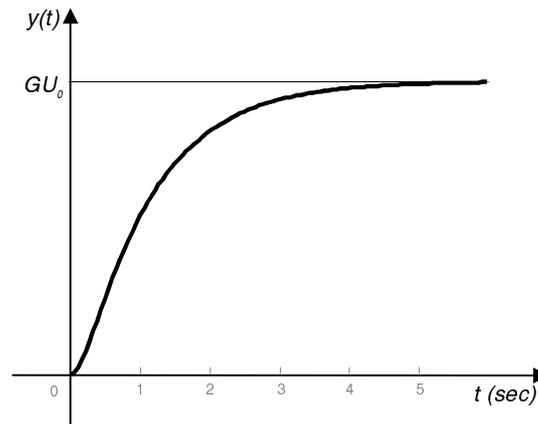


Figura 3.18 Risposta al gradino di un sistema del secondo ordine avente $\tau_2 = 1\text{sec}$, $\tau_1 = 0.2\text{sec}$

Caso di $|\zeta| = 1$: radici reali e coincidenti. In tal caso la risposta forzata al gradino risulta essere:

$$y(t) = GU_0 [1 - e^{\lambda t} + \lambda t e^{\lambda t}] \quad (3.65)$$

Come si vede, i termini $e^{\lambda t}$, $t e^{\lambda t}$ già incontrati nella risposta in evoluzione libera caratterizzano anche la risposta forzata al gradino.

La (3.65) può anche esprimersi in termini della costanti di tempo τ associata alla radice λ :

$$y(t) = GU_0 \left[1 - e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \quad (3.66)$$

Ovviamente i due termini esponenziali vanno entrambi a zero se e solo se $\lambda < 0$ (e quindi $\tau > 0$), ossia se il sistema è asintoticamente stabile. In tal caso la risposta al gradino tende ad un valore costante pari a GU_0 , valore che in pratica è raggiunto dopo un tempo che, come visto nell'analisi della risposta in evoluzione libera, è maggiore di 4.6 volte la costante di tempo; una stima approssimata è data da 6.6 volte la costante di tempo.

In Fig.3.19 è riportata la risposta al gradino per il caso di un sistema del secondo ordine con $\tau_1 = \tau_2 = 1\text{sec}$. Essa raggiunge praticamente il valore costante GU_0 dopo circa 6sec, ossia dopo circa 6.6 volte la costante di tempo.

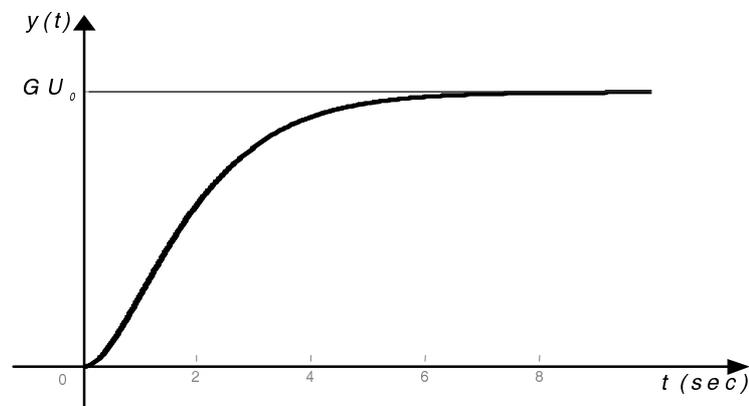


Figura 3.19 Risposta al gradino di un sistema del secondo ordine avente $\tau_1 = \tau_2 = 1\text{sec}$

Caso di $|\zeta| < 1$: radici complesse coniugate. In tal caso la risposta forzata al gradino risulta essere:

$$y(t) = GU_0 \left[1 - \frac{1}{\sin\theta} e^{\alpha t} \sin(\omega t + \theta) \right] \quad (3.67)$$

$$\theta = \arctg(-\omega / \alpha)$$

E' da notare che l'angolo θ è il complementare dell'angolo φ già introdotto nella Fig.3.16 per definire il coefficiente di smorzamento.

Utilizzando le (3.49), con semplici passaggi si ottiene:

$$y(t) = GU_0 \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \left(\sqrt{1-\zeta^2} \omega_n t + \arctg \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) \right] \quad (3.68)$$

Come si vede, l'andamento oscillatorio già incontrato nella risposta in evoluzione libera caratterizza anche la risposta forzata al gradino. Inoltre, come si vede, introducendo il *tempo universale* $t^* = \omega_n t$, la risposta a gradino dipende solo dal coefficiente di smorzamento ζ .

La (3.67) può anche esprimersi in termini della costante di tempo τ associata alla legge esponenziale:

$$y(t) = GU_0 \left[1 - \frac{1}{\sin\theta} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega t + \theta) \right] \quad (3.69)$$

Come si vede il termine oscillatorio va a zero se e solo se le due radici complesse coniugate sono a parte reale negativa (e quindi la costante di tempo positiva), ossia se il sistema è asintoticamente stabile. In tal caso la risposta al gradino tende ad un valore costante pari a GU_0 , valore che in pratica è raggiunto dopo un tempo pari a circa 4.6 volte la costante di tempo.

L'andamento della risposta al gradino, come espressa dalla (3.68), è riportata in Fig.3.20 per le seguenti situazioni:

- $GU_0=1$;
- vari valori di $\zeta > 0$;
- sulle ascisse è riportato il tempo universale $t^* = \omega_n t$.

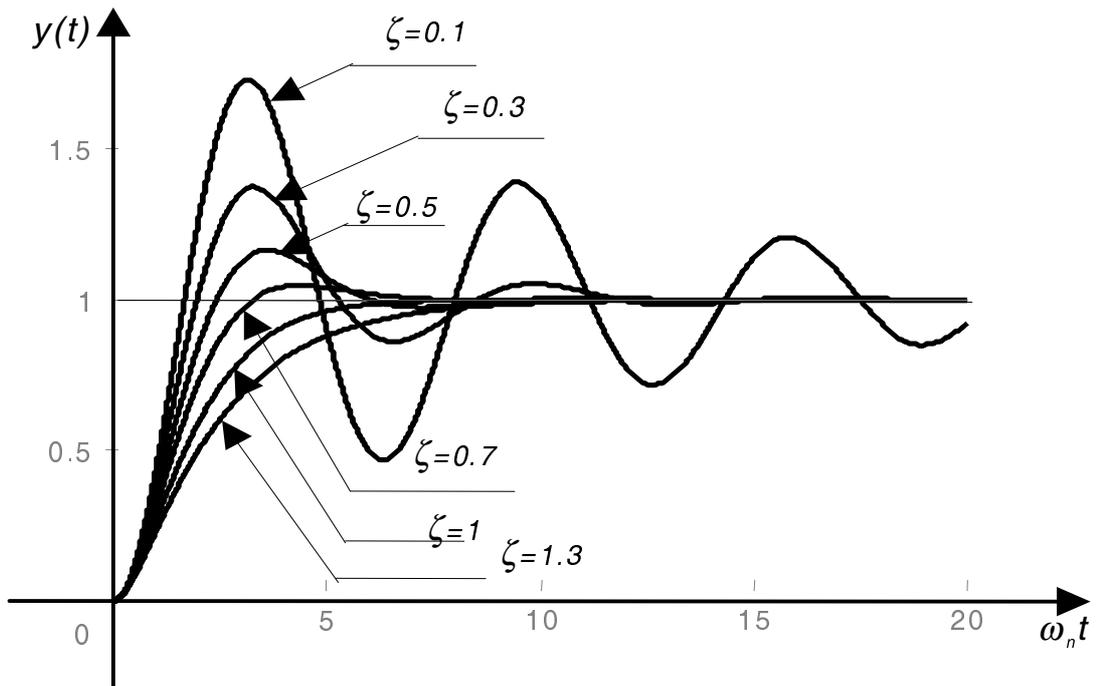


Figura 3.20 Risposta al gradino di un sistema del secondo ordine con $GU_0=1$

Esempio 3.7. Si consideri il sistema meccanico mostrato in Fig.3.21, costituito da un sistema molla-smorzatore verticale, su cui, all'istante $t=0$, viene poggiato un corpo di massa m . Assumiamo che la massa m venga poggiata senza perturbare istantaneamente le condizioni iniziali (posizione e velocità iniziali assunte nulle) del piano di appoggio. Ci proponiamo di studiare il moto del corpo nel caso di: $m=1\text{kg}$, $k=25\text{N/m}$, e assumendo per il coefficiente di smorzamento viscoso i seguenti tre valori diversi: $b_1=2\text{Ns/m}$, $b_2=10\text{Ns/m}$, $b_3=20\text{Ns/m}$.

E' facile convincersi che il sistema in considerazione, a partire dall'istante $t=0$, può essere considerato come un classico sistema massa-molla-smorzatore soggetto ad una forza a gradino applicata all'istante $t=0$ e di ampiezza pari al peso del corpo. Detta g l'accelerazione di gravità, il moto del corpo sarà descritto da:

$$m\ddot{s} = -b\dot{s} - ks + mg1(t), \quad s(0) = 0, \dot{s}(0) = 0$$

Ponendo, come al solito, $y(t)=s(t)$, $u(t)=f(t)$, dove $f(t)$ indica genericamente la forza applicata all'elemento di massa, si ottiene:

$$\ddot{y} + \frac{b}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = \frac{1}{m}u, \quad y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0, \quad u(t) = mg1(t)$$

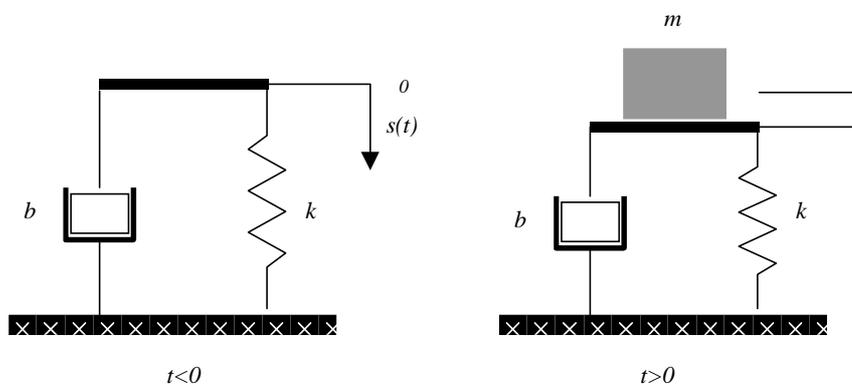


Figura 3.21 Il sistema meccanico dell'Esempio 3.7

L'ingresso del sistema è, in tutti e tre i casi, un segnale a gradino di ampiezza pari a $mg=1(\text{kg})9.81(\text{m/sec}^2)=9.81\text{N}$.

Come già detto nell'Esempio 3.6, l'E.D. può risciversi nella forma:

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = \frac{1}{m} u$$

con:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{km}}$$

Le seguenti considerazioni, valide per tutti e tre i casi, sono alla base della determinazione dell'andamento qualitativo della risposta:

- la pulsazione naturale non dipende dal coefficiente b per cui, in tutti e tre casi, risulta:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{25}{1}} = 5 \text{ rad/sec}$$

- poiché $\zeta > 0$, la risposta al gradino tende asintoticamente al valore costante GU_0 , dove U_0 è l'ampiezza del gradino e vale 9.81, mentre G è la costante di guadagno del sistema e vale: $G = 1/m\omega_n^2 = 0.04$; pertanto risulta: $GU_0 \approx 0.4$;

Il coefficiente b influenza il coefficiente di smorzamento ζ il quale, nei tre casi, risulta rispettivamente pari a: $\zeta_1=0.2$, $\zeta_2=1$, $\zeta_3=2$.

Studiamo separatamente le 3 situazioni.

Caso 1: $b=2Ns/m \Rightarrow \zeta=0.2$ (sistema sottosmorzato). L'andamento qualitativo della risposta a gradino può essere determinato in base alle seguenti considerazioni aggiuntive:

- poiché $\zeta < 1$, la risposta al gradino è oscillatoria;
- poiché $\zeta \ll 1$, la massa compirà 3+4 oscillazioni (l'inverso di ζ è pari a 5) prima di raggiungere praticamente il valore 0;
- $\alpha = -\zeta\omega_n = -1 \Rightarrow \tau = 1 \text{ sec}$, per cui le oscillazioni in uscita si smorzano dopo circa 5 sec;
- il periodo delle oscillazioni è

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \approx 1.3 \text{ sec}$$

Con queste informazioni siamo in grado di disegnare l'andamento qualitativo della risposta al gradino. In Fig.3.22 è riportato l'andamento "esatto" di tale risposta che conferma la correttezza delle considerazioni fatte.

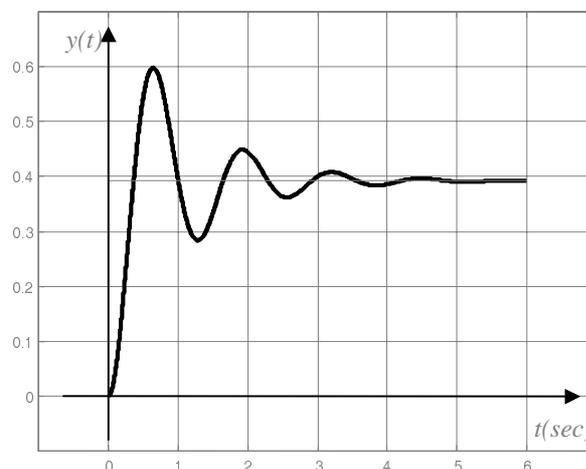


Figura 3.22 Risposta del sistema massa-molla-smorzatore dell'Esempio 3.7 nel caso di $b=2Ns/m$

Caso 2: $b=10Ns/m \Rightarrow \zeta=1$ (sistema criticamente smorzato). In tal caso si ha:

- poiché $\zeta = 1$, la risposta al gradino non è oscillatoria;
- con $\zeta = 1$ si hanno due radici reali coincidenti in $\lambda = -\zeta\omega_n = -5 \Rightarrow \tau = 0.2\text{sec}$, per cui la risposta raggiungerà praticamente il valore di regime dopo un tempo pari a circa 1.4 sec (circa 6.6 volte la costante di tempo)

Con queste informazioni siamo in grado di disegnare l'andamento qualitativo della risposta al gradino. In Fig.3.23 è riportato l'andamento "esatto" di tale risposta che conferma la correttezza delle considerazioni fatte.

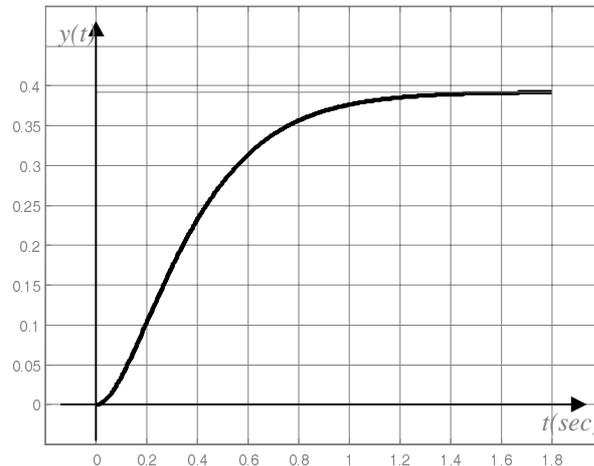


Figura 3.23 Risposta del sistema massa-molla-smorzatore dell'Esempio 3.7 nel caso di $b=10Ns/m$

Caso 3: $b=20Ns/m \Rightarrow \zeta=2$ (sistema sovra-smorzato). In tal caso si ha:

- poiché $\zeta > 1$, la risposta al gradino non è oscillatoria;
- con $\zeta > 1$ si hanno due radici reali e distinte in

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} = -10 \pm 5\sqrt{3} \Rightarrow \tau_1 = 0.3\text{sec}, \quad \tau_2 = 0.05\text{sec},$$

per cui la risposta raggiungerà praticamente il valore di regime dopo un tempo pari a circa 3.5sec (4.6 volte la massima costante di tempo)

Con queste informazioni siamo in grado di disegnare l'andamento qualitativo della risposta al gradino. In Fig.3.24 è riportato l'andamento "esatto" di tale risposta che conferma la correttezza delle considerazioni fatte.



Figura 3.22 Risposta del sistema massa-molla-smorzatore dell'Esempio 3.7 nel caso di $b=20Ns/m$

III.4.4 Risposta a regime e risposta in transitorio a segnali di ingresso a gradino

Consideriamo un sistema del secondo ordine, asintoticamente stabile ($\zeta > 0$), sollecitato con un ingresso a gradino. La risposta totale, somma della risposta in evoluzione libera e in evoluzione forzata, in base a quanto visto nei paragrafi III.4.1 - III.4.3, si può scrivere come:

$$y(t) = y_l(t) + y_f(t) = \begin{cases} k_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + k_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} + GU_0 \left[1 + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right], & \zeta > 1 \\ k_1 e^{-\frac{t}{\tau}} + k_2 t e^{-\frac{t}{\tau}} + GU_0 \left[1 + \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \right], & \zeta = 1 \\ A e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega t + \beta) + GU_0 \left[1 - \frac{1}{\sin\theta} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin(\omega t + \theta) \right] & \zeta < 1 \end{cases}$$

dove le coppie di costanti (k_1, k_2) e (A, β) dipendono dalle condizioni iniziali (vedi Tab.3.II).

Facilmente si vede che, per t che tende all'infinito, tale risposta tende al valore costante:

$$y_r(t) = GU_0$$

Pertanto:

La risposta a regime di un sistema LTI del secondo ordine a un gradino di ampiezza U_0 è un segnale costante di ampiezza pari a GU_0 , ossia:

$$y_r(t) = GU_0 \quad (3.70)$$

La risposta in transitorio, data dalla differenza tra la risposta totale e la risposta a regime, risulta avere un andamento temporale analogo a quello della risposta in evoluzione libera: essa, nel caso di $\zeta < 1$, ha un andamento oscillatorio e si estingue praticamente dopo un tempo pari a 4.6 volte la costante di tempo del sistema; nel caso di $\zeta = 1$, ha un andamento descritto dall'eq. 3.40, e si estingue praticamente dopo un tempo pari a 6.6 volte la costante di tempo del sistema; nel caso di $\zeta > 1$, ha un andamento descritto dall'eq. 3.39, e, nel caso di costanti di tempo molto diverse tra loro, si estingue praticamente dopo un tempo pari a 4.6 volte la costante di tempo del sistema.

III.4.5 Risposta a regime e risposta in transitorio a segnali a rampa e sinusoidali: cenni

Il calcolo di tali risposte è abbastanza macchinoso. Tuttavia, da un punto di vista qualitativo, valgono considerazioni analoghe a quelle fatte per i sistemi del primo ordine. Pertanto, di seguito, riassumiamo, senza dimostrarli, i risultati sugli andamenti qualitativi:

◆ La risposta a regime ad una rampa di pendenza U_0 è ancora una rampa di pendenza GU_0 . In particolare è possibile dimostrare che:

$$y_r(t) = GU_0t + \hat{G}U_0, \quad G = \frac{b}{\omega_n^2}, \quad \hat{G} = -\frac{2\zeta b}{\omega_n^3} \quad (3.71)$$

- ◆ La risposta a regime ad una segnale sinusoidale di ampiezza U_0 e pulsazione ω_0 è ancora una senoide di pulsazione ω_0 pari a quella di ingresso, di ampiezza pari a quella di ingresso moltiplicata per un fattore $M(\omega_0)$, e sfasata rispetto a quella di ingresso di un angolo $\varphi(\omega_0)$; le grandezze $M(\omega_0)$ e $\varphi(\omega_0)$ dipendono sia dal sistema che dalla pulsazione del segnale di ingresso.
- ◆ La risposta in transitorio, sia nel caso di ingresso a rampa che di ingresso sinusoidale, ha un andamento analogo a quello della risposta in evoluzione libera, per cui il suo andamento e la sua durata "pratica" possono essere facilmente stimati sulla base delle radici dell'equazione caratteristica.

III.5 Parametri caratteristici della risposta a gradino

La risposta a gradino di un sistema LTI asintoticamente stabile può essere caratterizzata attraverso alcuni parametri caratteristici anche detti *parametri globali*. Per definirli facciamo riferimento all'andamento tipico della risposta a gradino di un sistema asintoticamente stabile, normalizzata rispetto al valore asintotico GU_0 , mostrato in Fig.3.23.

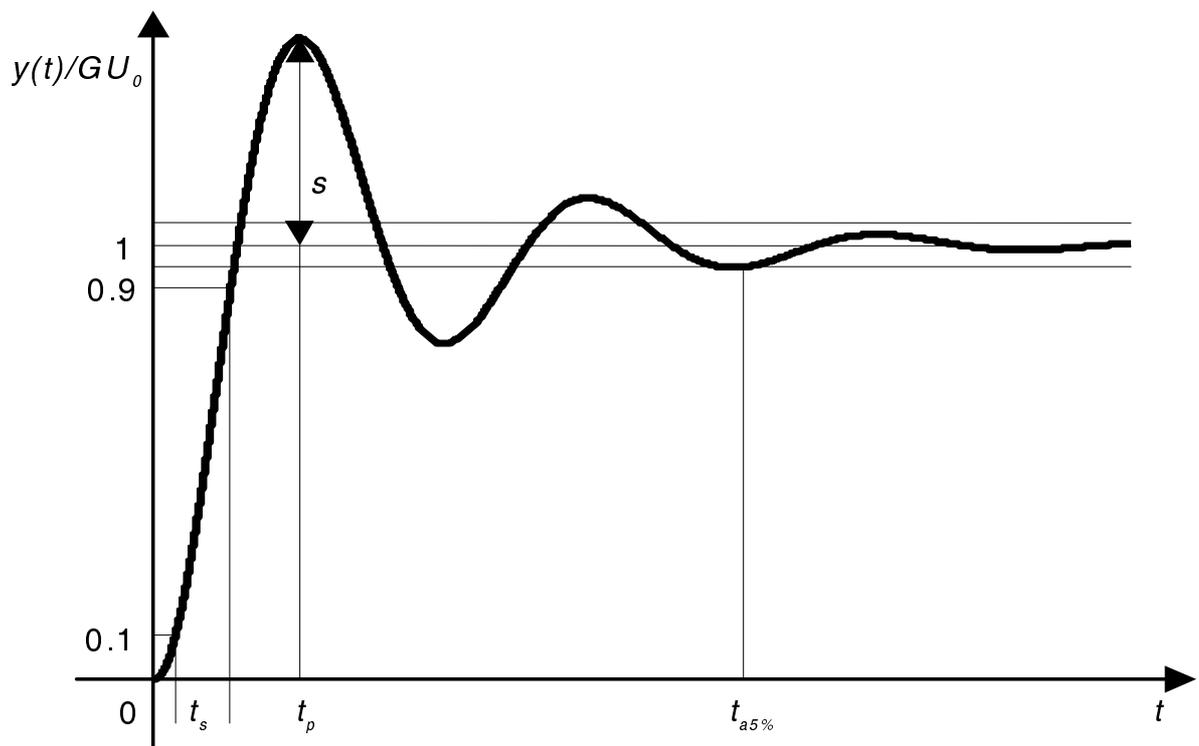


Figura 3.22 Risposta al gradino normalizzata

Essi sono:

- ◆ **tempo di salita o di risposta t_s** definito come il tempo necessario perché la risposta si porti, per la prima volta, dal 10% al 90% del valore finale;

- ◆ **tempo di assestamento al 5%** $t_{a5\%}$ definito come il tempo necessario perché la risposta raggiunga definitivamente il valore finale a meno del 5%;
- ◆ **istante di picco** t_p definito come l'istante in cui la risposta normalizzata raggiunge il suo valore massimo;
- ◆ **sovraelongazione** s definita come la differenza tra il valore della risposta normalizzata all'istante di picco e il valore finale.

III.5.1 Parametri globali della risposta al gradino per sistemi del primo ordine

Nel caso di sistemi del primo ordine la risposta al gradino normalizzata è data da (vedi eq.(3.19)):

$$\frac{y(t)}{GU_0} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (3.72)$$

I valori dei parametri globali si ricavano analiticamente in maniera abbastanza semplice.

Risulta:

- $t_s = 2.2\tau$
- $t_a = 3\tau$
- $t_p = \infty$
- $s = 0$

III.5.2 Parametri globali della risposta al gradino per sistemi del secondo ordine

Nel caso di sistemi del secondo ordine, come visto nel paragrafo III.4.3, la risposta al gradino normalizzata assume tre forme diverse: una per $\zeta < 1$ (si ricordi che qui consideriamo solo il caso di $\zeta > 0$), una per $\zeta = 1$, una per $\zeta > 1$. Tali espressioni sono tuttavia abbastanza complesse, e il calcolo dei parametri globali della risposta al gradino non è agevole. Per questo motivo diamo di seguito, senza dimostrazione, espressioni, talvolta approssimate, solo di due di tali parametri, tempo di assestamento e sovraelongazione, per i casi di maggiore interesse.

Tempo di assestamento. È possibile dimostrare che:

$$t_a \cong \begin{cases} \frac{3}{\zeta\omega_n} & \zeta \ll 1 \\ \frac{4.75}{\omega_n} & \zeta = 1 \\ 3\tau_{\max} & \zeta \gg 1 \end{cases} \quad (3.73)$$

Tali espressioni razionalizzano e confermano quanto già detto nel paragrafo III.4.3.

Sovraelongazione. La sovraelongazione è esprimibile in maniera esatta in funzione del coefficiente di smorzamento ζ . È possibile dimostrare che:

$$s = \begin{cases} e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} & \zeta < 1 \\ 0 & \zeta \geq 1 \end{cases} \quad (3.74)$$

La Fig.3.23 riporta l'andamento della sovralongazione in funzione di ζ .

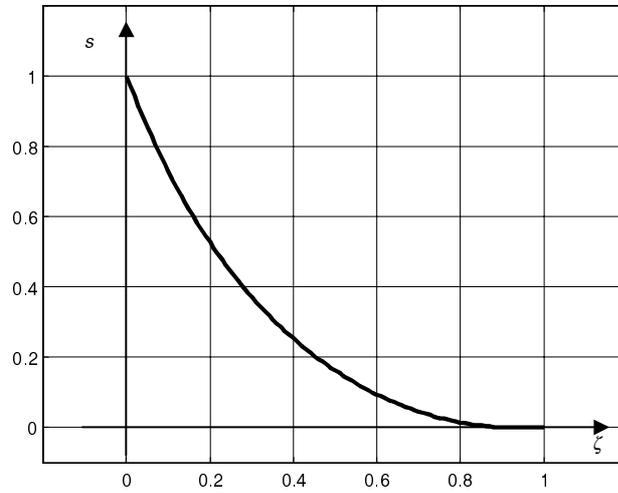


Figura 3.22 La sovralongazione in funzione del coefficiente di smorzamento in un sistema del II ordine

Come si può notare, la sovralongazione in sistemi del secondo ordine diventa trascurabile per $\zeta > 0.8$.