

<b>IV.</b>	<b>SISTEMI DI CONTROLLO ELEMENTARI</b>	<b>IV-1</b>
IV.1	SCHEMI DI CONTROLLO	IV-3
IV.1.1	<i>Vantaggi del controllo in anello chiuso</i>	IV-5
IV.2	FORMULAZIONE DEL PROBLEMA DI CONTROLLO E SPECIFICHE DI PROGETTO	IV-6
IV.3	CONTROLLORI INDUSTRIALI: GENERALITÀ	IV-9
IV.4	CONTROLLORI A RELÈ	IV-9
IV.5	REGOLATORI PID	IV-12
IV.5.1	<i>Le azioni di controllo elementari nei regolatori PID</i>	IV-12
IV.5.2	<i>I vari tipi di regolatore e i criteri di scelta</i>	IV-18
IV.5.3	<i>Taratura automatica dei parametri dei regolatori PID</i>	IV-20

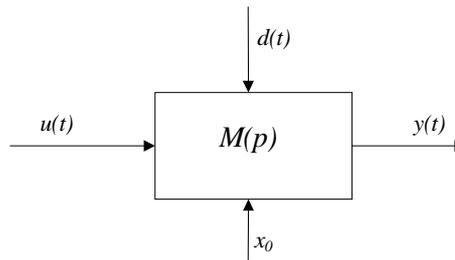
## IV. SISTEMI DI CONTROLLO ELEMENTARI

Controllare un sistema significa imporgli una *modalità di funzionamento desiderata*. Questa è in genere espressa dalla richiesta di mantenere una variabile di uscita  $y(t)$ , detta *uscita controllata*, il più possibile prossima ad un andamento temporale desiderato,  $y_r(t)$ , detto *segnale di riferimento*. Questo obiettivo viene perseguito agendo sul sistema mediante un segnale di ingresso  $u(t)$  detto *ingresso di controllo* o *variabile manipolata*.

Nei sistemi di controllo automatici, la determinazione, istante per istante, del segnale di controllo in grado di garantire un buon inseguimento del riferimento da parte dell'uscita controllata è demandata ad un organo detto *controllore*. Tale determinazione non è in genere semplice data la natura differenziale del legame ingresso-uscita del sistema da controllare. Per di più tale compito è reso ancora più complesso per le seguenti ragioni:

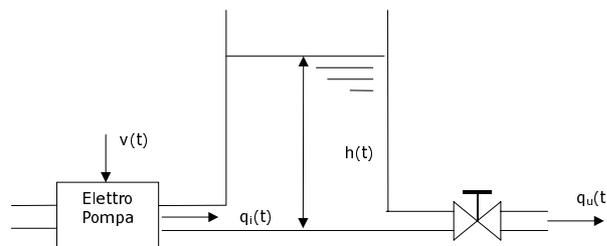
- lo stato  $x_0$  in cui si trova il sistema nell'istante in cui inizia l'azione di controllo non è in genere noto con certezza;
- il modello matematico del sistema da controllare è spesso affetto da incertezza nel valore di alcuni parametri  $p$ , e talvolta addirittura è solo parzialmente noto;
- spesso l'andamento della variabile da controllare non è determinato solo dall'ingresso di controllo, ma anche da altre variabili di ingresso  $d(t)$ , non manipolabili, dette *ingressi di disturbo* o semplicemente *disturbi*.

La schematizzazione grafica di un sistema da controllare è pertanto la seguente:



**Figura 4.1** Sistema da controllare

**Esempio 4.1** *Controllo del livello di un serbatoio con valvola di prelievo*. Si consideri il serbatoio cilindrico, con superficie di base  $S$ , mostrato in Fig.4.2, in cui è presente una valvola di prelievo sul fondo la quale viene azionata, in maniera non nota, da un utente.



**Figura 4.2** Serbatoio con valvola di prelievo

Si supponga di voler controllare il livello del liquido nel serbatoio agendo sulla tensione di comando dell'elettropompa.

In questo caso l'ingresso di controllo  $u(t)$  del sistema è la tensione di comando  $v(t)$  dell'elettropompa; la portata di uscita  $q_u(t)$  gioca il ruolo di ingresso di disturbo  $d(t)$ . Supponiamo inoltre che il legame tra la tensione di alimentazione dell'elettropompa e la portata di ingresso sia di tipo algebrico e lineare, ossia:

$$q_i(t) = kv(t)$$

con  $k$  costante dipendente dal rendimento della pompa, dalle tubazioni e dal dislivello tra pelo libero del serbatoio e pelo libero del pozzo da cui si pompa. Poiché tale costante non è mai perfettamente nota e, per di più, può variare, il modello del sistema risulterà essere incerto. In particolare esso si scriverà come:

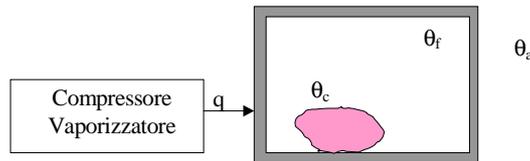
$$S\dot{y} = ku - d .$$

La rappresentazione i-s-u sarà allora:

$$\dot{x} = (0)x + \begin{pmatrix} k & -1 \\ S & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

$$y = (1)x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$$

**Esempio 4.2** *Controllo della temperatura interna di un frigorifero.* Si consideri il frigorifero mostrato schematicamente in Fig.4.3.



**Figura 4.3** Frigorifero

Indicando con:

- $\theta_c$  temperatura del corpo da raffreddare
- $\theta_f$  temperatura interna del frigorifero
- $\theta_a$  temperatura ambiente esterno
- $C_c$  capacità termica del corpo
- $C_f$  capacità termica del frigorifero
- $K_{af}$  coefficiente di scambio termico ambiente-frigorifero
- $K_{fc}$  coefficiente di scambio termico frigorifero-corpo
- $q$  potenza frigorifera (negativa se sottratta al frigorifero)

le relazioni costitutive si scrivono:

$$C_c \dot{\theta}_c = K_{fc} (\theta_f - \theta_c)$$

$$C_f \dot{\theta}_f = K_{fc} (\theta_c - \theta_f) + K_{af} (\theta_a - \theta_f) + q$$

In questo sistema, l'ingresso di controllo è la potenza frigorifera  $q(t)$ , che è un ingresso manipolabile a piacere, mentre la temperatura esterna dell'ambiente  $\theta_a(t)$ , che non è manipolabile, è un ingresso di disturbo.

Ponendo:

$$u(t) = q(t)$$

$$d(t) = \theta_a(t)$$

$$y(t) = \theta_f(t)$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_f(t) \\ \theta_c(t) \end{pmatrix}$$

con manipolazioni standard delle relazioni costitutive, si ottiene:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{K_{fc} + K_{af}}{C_f} & \frac{K_{fc}}{C_f} \\ +\frac{K_{fc}}{C_c} & -\frac{K_{fc}}{C_c} \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{C_f} & \frac{K_{af}}{C_f} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ d(t) \end{pmatrix}$$

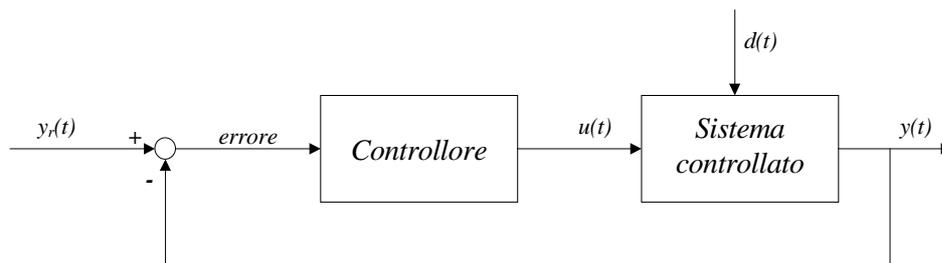
$$y(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ d(t) \end{pmatrix}$$

Il problema di controllo, in questo caso, consiste nel portare e mantenere la temperatura del frigorifero ad un assegnato valore costante, malgrado la presenza di variazioni di temperatura ambiente e l'incertezza sui valori dei parametri del modello.

## IV.1 Schemi di controllo

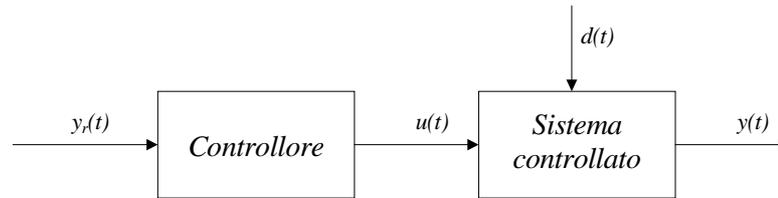
Per il calcolo del segnale di controllo in un generico istante  $t$ , in seguito detto istante corrente, il controllore può avvalersi, durante il funzionamento del sistema, di varie informazioni. Tra queste dovrà esserci, ovviamente, l'informazione sul segnale di riferimento. Altre informazioni possono riguardare il valore del disturbo e/o il valore dell'uscita controllata all'istante corrente. In base al tipo di informazioni utilizzate dal controllore per il calcolo del segnale di controllo si definiscono i seguenti schemi di controllo.

**Schema di controllo in anello chiuso o in retroazione** (in inglese **feedback**). Questo è lo schema di controllo più utilizzato. In esso il controllore riceve, istante per istante, un'informazione sul valore della variabile controllata: tale valore viene comparato con il segnale di riferimento, ed il segnale di errore risultante viene utilizzato per decidere l'azione di controllo. Lo schema risultante è mostrato in Fig.4.4.



**Figura 4.4** Sistema di controllo in anello chiuso

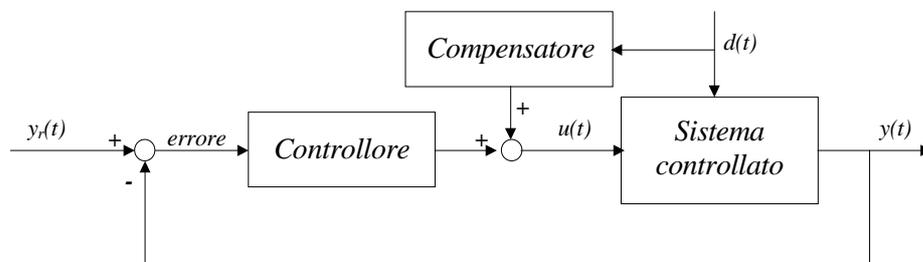
**Schema di controllo in anello aperto** (in inglese **feedforward**). In questo schema il controllore calcola il valore del segnale di controllo solo in base al segnale di riferimento. Questo può essere noto interamente apriori, ed in tal caso l'azione di controllo può essere precalcolata: è il caso, ad esempio, delle fasi di lavaggio delle lavatrici domestiche le quali sono preventivamente decise su una base temporale senza portare in conto l'efficienza delle operazioni di lavaggio stesse. In altri casi il segnale di riferimento può essere deciso durante il funzionamento, per cui il controllore è chiamato a calcolare in linea il segnale di controllo sulla base della sola conoscenza di un modello matematico nominale del sistema da controllare e, eventualmente, di un disturbo nominale. Lo schema di controllo è mostrato in Fig.4.5.



**Figura 4.5** Sistema di controllo in anello aperto

I vantaggi dello schema di controllo in anello chiuso rispetto a quello in anello aperto sono evidenti: il sistema in anello chiuso, disponendo della misura in linea della variabile controllata, ha modo di rendersi conto della presenza di variazioni di tale grandezza rispetto al valore atteso, variazioni causate dalla presenza di disturbi e/o di scostamenti del valore effettivo dei parametri del sistema rispetto a quelli *nominale* assunti nel modello. In tal modo la risposta del sistema di controllo ai segnali di riferimento risulta meno sensitiva sia alla presenza di disturbi che a variazioni dei parametri del sistema controllato.

**Schemi di controllo con compensazione del disturbo.** In alcuni casi i disturbi che intervengono sul sistema controllato possono essere misurati durante il funzionamento del sistema. Si pensi ad esempio al caso di un sistema di riscaldamento domestico in cui la temperatura esterna, che gioca il ruolo di disturbo, può essere misurata. In tal caso il controllore può avvalersi della conoscenza di tale disturbo per decidere, in maniera più opportuna, il valore del segnale di controllo, così da compensare preventivamente l'effetto del disturbo sulla variabile controllata anziché attendere di misurarne tale effetto attraverso la misura della variabile controllata stessa. Lo schema di controllo risultante, per il caso di controllo in anello chiuso, è mostrato in Fig.4.6.

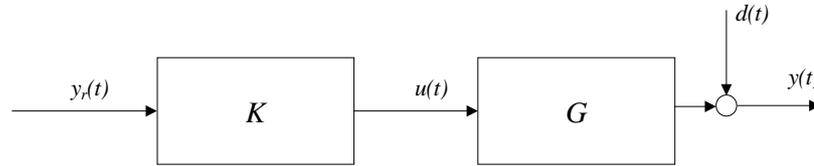


**Figura 4.6** Sistema di controllo in anello chiuso con compensazione del disturbo

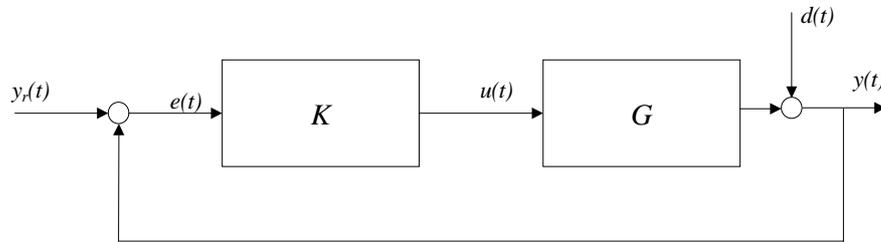
Lo schema di controllo con compensazione del disturbo può ovviamente essere utilizzato anche in presenza di controllo in anello aperto: in tal caso esso servirà a mitigare gli inconvenienti di tale schema di controllo.

### IV.1.1 Vantaggi del controllo in anello chiuso

Per valutare quantitativamente i vantaggi del controllo in anello chiuso rispetto a quello in anello aperto, facciamo riferimento alla situazione semplificata mostrata nelle Fig. 4.7 per il controllo in anello aperto, e 4.8 per il controllo in anello chiuso. In tali schemi si è supposto che i modelli matematici ingresso-uscita del controllore e dell'impianto siano puramente algebrici (cosa che è anche vera in situazioni di regime stazionario) e lineari, e che il disturbo entri in maniera additiva sull'uscita dell'impianto.



**Figura 4.7** Sistema di controllo algebrico e lineare in anello aperto



**Figura 4.8** Sistema di controllo algebrico e lineare in anello chiuso

Detto  $W$  il legame tra riferimento e uscita controllata, e detto  $W_d$  il legame tra disturbo e uscita controllata, facilmente si ricava che, nel caso di controllo in anello aperto, si ha:

$$y(t) = W y_r(t) = GK y_r(t) \quad (4.1)$$

mentre il legame disturbo-uscita è:

$$y(t) = W_d d(t) = d(t) \quad (4.2)$$

Dal punto di vista della sensitività rispetto al disturbo, pertanto, possiamo dire che, nel caso di controllo in anello aperto, il disturbo si propaga completamente sull'uscita, senza alcuna attenuazione. Per quanto riguarda invece la sensitività rispetto alle variazioni parametriche del modello matematico dell'impianto, detta  $\Delta G$  una generica variazione del legame ingresso-uscita dell'impianto e  $\Delta W$  la corrispondente variazione del legame ingresso-uscita del sistema di controllo complessivo, definendo la sensitività di  $W$  rispetto a  $G$  come:

$$S_G = \frac{\Delta W}{\Delta G} \quad (4.3)$$

nel caso di controllo in anello aperto, avendo supposto  $K$  costante, si ha:

$$S_G = \frac{\Delta W}{\Delta G} = \frac{d(GK)}{dG} = K \quad (4.4)$$

Pertanto una variazione  $\Delta G$  nel legame ingresso-uscita dell'impianto viene moltiplicata per  $K$  nel legame riferimento-uscita del sistema di controllo.

Analizziamo ora il sistema di controllo a ciclo chiuso.

In questo caso, con semplici passaggi si ricava che il legame riferimento-uscita è dato da:

$$y(t) = W_{y_r}(t) = \frac{GK}{1+GK} y_r(t) \quad (4.5)$$

Infatti, posto  $d(t)=0$ , dallo schema di Fig.4.6 si ricava:

$$y(t) = Gu(t) = GKe(t) = GK[y_r(t) - y(t)] = GK y_r(t) - GK y(t)$$

per cui, portando  $GK y(t)$  a primo membro, con altri semplici passaggi si ottiene la (4.5).

In maniera analoga si ottiene il legame disturbo-uscita che risulta essere:

$$y(t) = W_d d(t) = \frac{1}{1+GK} d(t) \quad (4.6)$$

Dalla (4.6) si evince che, nei sistemi di controllo a ciclo chiuso il disturbo si propaga sull'uscita attenuato del fattore  $1+GK$ . Ovviamente, perché questa attenuazione sia sensibile, deve essere:  $1+GK \gg 1$  e quindi

$$K \gg \frac{1}{G} \quad (4.7)$$

Per quanto riguarda la sensitività alle variazioni parametriche, così come fatto per ottenere la (4.4), con semplici passaggi si ottiene:

$$S_G = \frac{1}{(1+GK)^2} \quad (4.8)$$

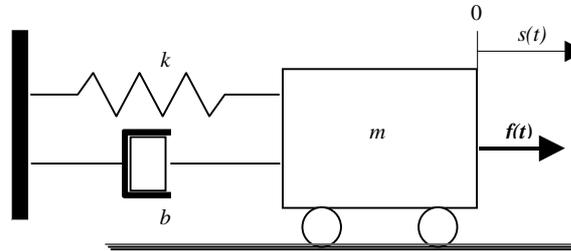
Pertanto, rispetto al controllo a ciclo aperto, anche la sensitività alle variazioni parametriche risulta attenuata in ragione del fattore  $(1+GK)^2$ , per cui ancora una volta conviene progettare il controllore in maniera che sia verificata la (4.7).

Da quanto finora detto, sembrerebbe che il controllo a ciclo chiuso presenti solo vantaggi e nessun inconveniente. In realtà a tali conclusioni si è pervenuti considerando solo sistemi in cui sia l'impianto che il controllore sono sistemi statici, ovvero che si trovino in regime stazionario. Quando si considerano sistemi dinamici, i sistemi a ciclo chiuso presentano un inconveniente a cui, in sede di progetto, bisogna prestare estrema attenzione: **all'aumentare della costante di guadagno del controllore molti sistemi a ciclo chiuso tendono ad esibire un comportamento instabile**. In altre parole l'uscita controllata non tende più a seguire il segnale di riferimento, ma si allontana indefinitamente da esso. Tale comportamento è assolutamente da evitare in quanto, oltre a portare ad un insoddisfacente comportamento del sistema di controllo, porterebbe anche ad un aumento del valore di tutti i segnali interni del sistema, compreso il segnale di controllo, e ciò potrebbe causare seri danni all'impianto.

## IV.2 Formulazione del problema di controllo e specifiche di progetto

Per la formulazione del problema di controllo facciamo riferimento allo schema di controllo a ciclo chiuso mostrato in Fig.4.4. Come detto nella parte introduttiva del capitolo, obiettivo del problema è quello di progettare un controllore in grado di garantire che l'uscita controllata  $y(t)$  segua, al meglio possibile, l'andamento imposto dal segnale di controllo, anche in presenza di eventuali disturbi.

Per capire le difficoltà già presenti nella formulazione di un problema di controllo, facciamo vedere mediante un esempio che l'inseguimento perfetto tra  $y(t)$  e  $y_r(t)$  non è in pratica realizzabile stante le limitazioni fisiche dei sistemi preposti alla attuazione del segnale di controllo comandato dal controllore. Si consideri a tale scopo il sistema massa-molla-smorzatore mostrato in Fig.4.9 e già considerato nel paragrafo 3.4.



**Figura 4.9** Sistema massa-molla-smorzatore

Esso, ponendo  $u(t)=f(t)$  e  $y(t)=s(t)$ , è descritto da un'equazione differenziale ingresso-uscita del tipo:

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y}(t) + a_2 y(t) = bu(t)$$

Supponiamo di voler imporre all'uscita, mediante un sistema di controllo, uno spostamento a gradino. Sostituendo l'andamento desiderato di  $y(t)$  nell'E.D, facilmente si vede che, per ottenere uno spostamento finito e istantaneo del carrello, sarebbe necessario applicare al carrello una forza impulsiva, ossia di durata infinitesima e ampiezza infinita. Tale segnale in forza non è ovviamente realizzabile da nessun attuatore reale.

Questo esempio mette in evidenza due cose:

- a) a causa della limitatezza dei segnali di controllo attuabili, è impossibile ottenere una perfetta uguaglianza, istante per istante, tra il segnale di riferimento e l'uscita controllata, per cui bisogna essere disposti ad accettare la presenza di uno scostamento, o *errore*, tra questi due segnali; il problema di progetto, pertanto, va formulato definendo, in qualche modo, dei *requisiti* o *specifiche* sull'errore tollerabile in tutte le condizioni di funzionamento;
- b) l'entità dello scostamento, e quindi dell'errore tollerabile, dipende dalla tipologia del segnale di riferimento; infatti, nel caso in cui il riferimento abbia un andamento più "dolce" del gradino, come ad esempio nel caso di segnali a rampa o di segnali sinusoidali, si intuisce che, a parità di vincoli sul segnale di controllo, l'errore può essere mantenuto in limiti più contenuti. Lo stesso discorso può essere fatto con riferimento ai segnali di disturbo che il sistema di controllo è chiamato a reiettare.

In una corretta formulazione di un problema di controllo, pertanto, si dovrà specificare:

- la classe funzionale dei segnali di riferimento;
- la classe funzionale dei segnali di disturbo;
- i "limiti" da ritenersi accettabili sul segnale di errore nelle varie condizioni di funzionamento;
- le limitazioni sul segnale di controllo.

Analizziamo separatamente questi aspetti della formulazione del problema.

**Classe funzionale dei segnali di riferimento.** Sebbene il segnale di riferimento di un sistema di controllo possa, in linea di principio, variare in maniera arbitraria, per assegnare le specifiche si è soliti far riferimento essenzialmente alla classe dei segnali a gradino e a quella dei segnali a rampa.

*Segnali a gradino.* Per la caratterizzazione del comportamento desiderato di un sistema di controllo si assumerà come segnale di riferimento il gradino quando il sistema è destinato a lavorare con segnali di riferimento costanti a tratti. E' questo, ad esempio, il caso del controllo della temperatura interna di un frigorifero considerato nell'esempio 4.2. Sistemi di controllo di questo tipo sono comunemente detti "*sistemi di regolazione*".

*Segnali a rampa.* Per la caratterizzazione del comportamento desiderato di un sistema di controllo si assumerà come segnale di riferimento la rampa quando il sistema è destinato a lavorare con segnali di riferimento che variano nel tempo. E' questo, ad esempio, il caso di un sistema di controllo per la movimentazione di un utensile (verniciatore, strumento di taglio, ...) che deve effettuare una lavorazione di precisione. Sistemi di controllo di questo tipo sono comunemente detti "*sistemi di asservimento*".

**Classe funzionale dei segnali di disturbo.** Anche per i segnali di disturbo valgono considerazioni analoghe a quelle dei segnali di riferimento, per cui anche per essi, per assegnare le specifiche di progetto del sistema di controllo si è soliti far riferimento alla classe dei segnali a gradino e a quella dei segnali a rampa. In talune applicazioni, tuttavia, si ha a che fare con disturbi di natura completamente diversa, come ad esempio disturbi periodici. Si pensi ad esempio al problema di posizionamento di una piattaforma marina, in cui il moto ondoso, che esibisce un andamento quasi periodico, gioca il ruolo di disturbo. In questo caso si è soliti caratterizzare il disturbo come un segnale sinusoidale.

**Specifiche sul segnale di errore.** Il primo requisito che deve essere garantito è quello della limitatezza del segnale di errore in ogni condizione operativa, e quindi la *stabilità*. Per quanto riguarda poi l'ulteriore specificazione dei limiti di tollerabilità dell'errore, questi vengono specificati separatamente per l'errore in presenza del solo segnale di riferimento e l'errore dovuto al solo disturbo.

*Errore in presenza del solo segnale di riferimento.* Per la specificazione delle caratteristiche di tale errore viene trattato separatamente il *comportamento a regime* e il *comportamento in transitorio*.

Per quanto riguarda il comportamento a regime, il comportamento desiderato viene specificato assegnando l'errore massimo tollerabile (o *errore a regime*) in presenza della classe di segnali di riferimento assunta. Poiché all'interno di tale classe il segnale di riferimento è definito a meno dell'ampiezza, si è soliti assegnare l'errore a regime massimo in termini relativi, ossia rapportato all'ampiezza del segnale di riferimento.

Per quanto riguarda il comportamento in transitorio, questo viene solitamente specificato con riferimento alla risposta al gradino dell'intero sistema di controllo. Assumendo che tale risposta abbia l'andamento tipico di quella dei sistemi lineari e stazionari, andamento discusso nel paragrafo III.5 e mostrato in Fig.3.22, di tale risposta vengono di solito specificate due caratteristiche:

1. la prima, detta *velocità di risposta*, viene fissata imponendo il valore massimo di un parametro che dia un'indicazione sul tempo che il sistema impiega per raggiungere il valore di regime; il parametro solitamente impiegato per fissare tale specifica è il tempo di assestamento; talvolta, nelle applicazioni in cui interessa essenzialmente che l'uscita

raggiunga in un tempo massimo prefissato il valore di regime, anche se poi compie oscillazioni più o meno ampie intorno a tale valore, viene usato il tempo di salita;

2. la seconda, detta *precisione dinamica*, tende a fissare lo scostamento massimo rispetto al valore di regime che si è disposti a tollerare una volta che l'uscita ha raggiunto, per la prima volta, il valore di regime stesso; il parametro usato per specificare tale comportamento desiderato è la sovralongazione.

Errore dovuto al disturbo. Di tale errore viene di solito specificato il solo comportamento desiderato a regime. Anch'esso ovviamente va riferito alla classe di segnali di disturbo assunta.

### IV.3 Controllori industriali: generalità

Come detto nei paragrafi precedenti, un controllore automatico compara il valore effettivo dell'uscita controllata con il segnale di riferimento, ne determina lo scostamento o errore, e produce un segnale di controllo volto a ridurre l'errore a zero o a un valore piccolo. Il modo in cui il controllore produce il segnale di controllo è di solito detto *azione di controllo*.

I principali controllori industriali vengono classificati, sulla base del tipo di azione di controllo da essi esplicata, in due grosse categorie:

1. Controllori a due posizioni, anche detti controllori on-off o controllori a relè;
2. Controllori di tipo Proporzionali-Integrale-Derivativo, anche detti controllori PID o regolatori standard.

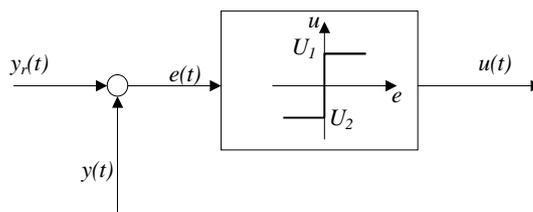
Tali controllori sono probabilmente i più diffusi in molte applicazioni sia di tipo industriale che per il controllo di macchine di uso domestico. La loro ampia diffusione, legata alle buone prestazioni che essi sono in grado di garantire su molti impianti che potremmo definire di tipo "non patologico", ha portato negli anni ad un notevole sforzo tecnologico legato agli aspetti realizzativi. Le tecnologie realizzative utilizzate vanno, in ordine cronologico, dalla tecnologia meccanica o elettrica, alla tecnologia idraulica, a quella pneumatica, per poi passare, negli anni settanta, alla tecnologia elettronica, e negli anni novanta, alla tecnologia digitale.

Nel seguito noi ci limiteremo ad illustrati i tipi di azione di controllo esplicate da tali controllori senza trattare il problema tecnologico relativo alla loro realizzazione. La comprensione di tali tipi di azione e degli effetti da esse prodotte è fondamentale per poter effettuare la scelta del tipo di azione più adatta a ciascuna applicazione.

### IV.4 Controllori a relè

Tali controllori, come detto precedentemente, dispongono in genere di solo due condizioni di funzionamento; queste, in molti casi, sono semplicemente acceso o spento. Controllori di questo tipo, che sono interpretabili come dei semplici interruttori automatici, sono di semplice realizzazione e quindi poco costosi; per questa ragione trovano larga applicazione sia in sistemi industriali (sistemi di regolazione di livello, di regolazione di temperatura in forni industriali, etc.) che in applicazioni domestiche (frigorifero, scaldabagno, impianto di riscaldamento, etc.).

La tipica caratteristica di funzionamento ingresso-uscita è mostrata in Fig.4.10.



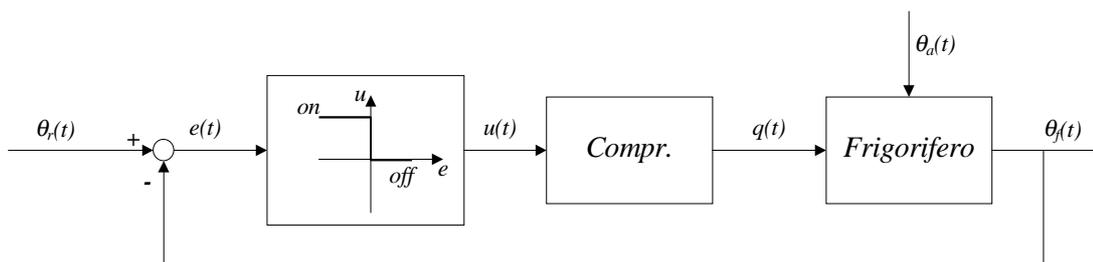
**Figura 4.10** Rappresentazione schematica di un controllore a relè

Da tale figura si evince che il comportamento del controllore a relè può essere sintetizzato nel modo seguente:

$$u(t) = \begin{cases} U_1 & \text{se } e(t) > 0 \\ U_2 & \text{se } e(t) < 0 \end{cases}$$

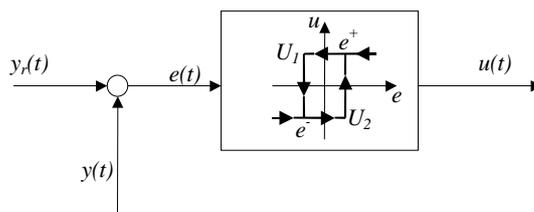
In altri termini, il segnale di controllo resta al suo valore minimo o a quello massimo a seconda che l'errore sia negativo o positivo. Ovviamente i due valori del segnale di controllo possono essere "acceso" e "spento".

**Esempio 4.3** *Controllo della temperatura interna di un frigorifero.* Si consideri nuovamente il frigorifero discusso nell'esempio 4.2. Per il controllo della temperatura si potrà utilizzare un controllore a relè in cui il compressore viene attaccato quando la temperatura interna supera il valore desiderato ( $e(t) < 0$ ), staccato quando scende al di sotto. Lo schema di controllo risultante è mostrato in Fig.4.11.



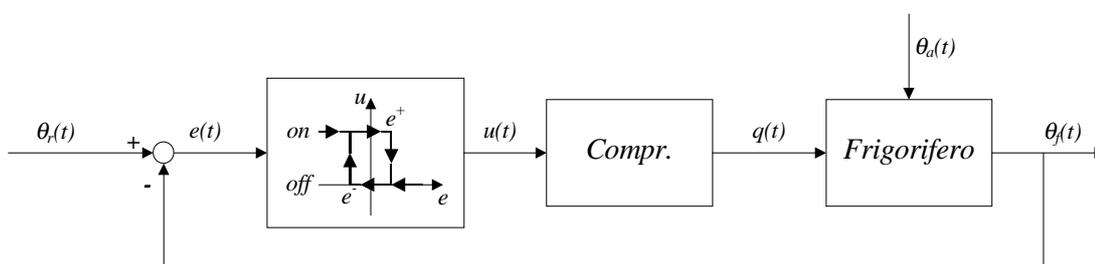
**Figura 4.11** Controllo a relè della temperatura di un frigorifero

Il sistema di controllo mostrato in Fig.4.11, che utilizza un relè semplice con una caratteristica del tipo mostrato in Fig.4.10, presenta il seguente inconveniente: allorché la temperatura del frigo raggiunge quella desiderata, il relè tende a commutare a frequenza elevata mantenendo l'errore intorno allo zero; tali commutazioni in alta frequenza sono da evitare in quanto provocherebbero una notevole usura sia del relè stesso che del compressore riducendo il loro tempo di vita. Per evitare tale inconveniente si ricorre ai cosiddetti relè con isteresi, la cui caratteristica è mostrata in Fig.4.12.



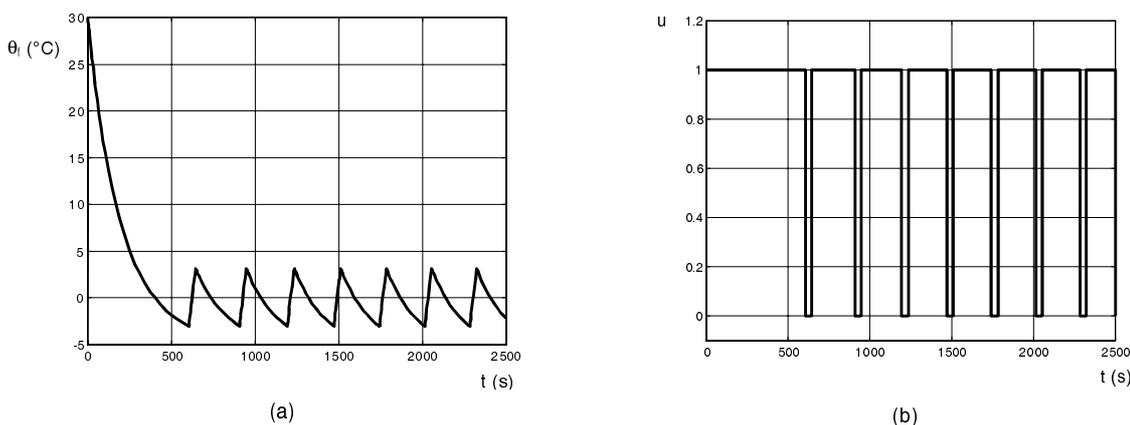
**Figura 4.12** Rappresentazione schematica di un controllore a relè con isteresi

In questo controllore la commutazione da  $U_2$  a  $U_1$  avviene non quando l'errore supera lo zero, bensì quando supera il valore di soglia  $e^+$ ; analogamente per la commutazione da  $U_1$  a  $U_2$ . Ovviamente questo viene pagato con il fatto che l'errore non resterà rigorosamente a zero, bensì oscillerà tra i valori  $e^-$  ed  $e^+$  anche dette soglie differenziali. In Fig.4.13 è mostrato lo schema di controllo del frigorifero con un controllore a relè con isteresi.



**Figura 4.13** Controllo della temperatura di un frigorifero mediante relè con isteresi

In Fig.4.14 è mostrato un tipico andamento della temperatura interna del frigo nel caso in cui la temperatura interna iniziale è di  $30^\circ\text{C}$ , la temperatura di riferimento è di  $0^\circ\text{C}$ , e le soglie differenziali sono state poste a  $+3^\circ\text{C}$  e  $-3^\circ\text{C}$ , rispettivamente.



**Figura 4.14** Controllo della temperatura di un frigorifero mediante relè con isteresi: a) andamento della temperatura interna del frigo; b) segnale di comando del compressore.

Ovviamente la frequenza di commutazione del segnale di comando tende a diminuire all'aumentare delle soglie differenziali, ma in questo caso aumenta l'ampiezza delle oscillazioni dell'errore. Il limite di utilizzazione dei controllori a relè sta proprio nella difficoltà nel trovare sempre un'adeguata soluzione di compromesso tra queste due opposte esigenze.

## IV.5 Regolatori PID

I regolatori PID sono dispositivi di controllo nei quali la variabile di controllo  $u(t)$  viene generata come somma di tre contributi detti, rispettivamente, *azione proporzionale*, *azione integrale*, *azione derivativa*. Nel seguito vengono anzitutto descritti questi tre tipi di azione.

Per meglio illustrare gli effetti dei tre tipi di azione, faremo riferimento al problema del controllo della posizione verticale del sistema massa-molla-smorzatore illustrato in Fig.4.15. E' interessante notare che tale sistema può essere interpretato come una rappresentazione schematica del sistema di sospensione attiva di un autoveicolo.

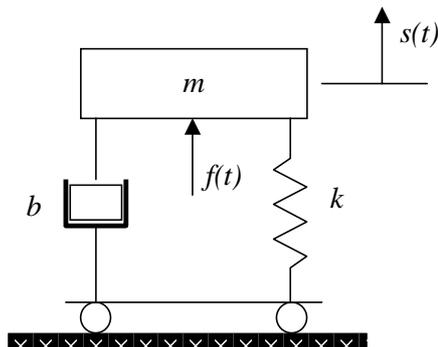


Figura 4.15 Sistema massa-molla-smorzatore

Supponiamo che  $s(t)$  misuri gli spostamenti della massa sospesa rispetto alla posizione da essa occupata all'equilibrio sotto l'azione della forza peso (posizione in cui la forza peso è equilibrata dalla reazione elastica della molla). Con tale assunzione, nella scrittura della legge di Newton potremo ignorare sia la forza peso che la reazione elastica di equilibrio; pertanto, posto  $y(t)=s(t)$  e  $u(t)=f(t)$ , si avrà:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = u \quad (4.9)$$

Supponiamo che obiettivo del controllo sia quello di portare la massa sospesa dalla posizione di riposo ad una nuova posizione costante garantendo un comportamento preassegnato sia in transitorio che a regime. In tale ipotesi il segnale di riferimento sarà un segnale a gradino del tipo:

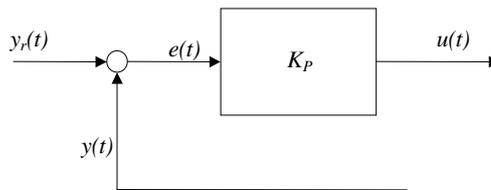
$$y_r(t) = Y_{r0} 1(t)$$

### IV.5.1 Le azioni di controllo elementari nei regolatori PID

**Azione proporzionale.** In un controllore con azione proporzionale il segnale di controllo è proporzionale al segnale di errore; la relazione ingresso-uscita, mostrata in Fig.4.16, si scrive:

$$u(t) = K_P e(t)$$

$K_P$  è detto *coefficiente dell'azione proporzionale* o *guadagno proporzionale*.



**Figura 4.16** Azione proporzionale

Per capire l'effetto di un'azione proporzionale supponiamo di utilizzarla per il controllo del sistema massa-molla-smorzatore precedentemente discusso. Sostituendo l'espressione di  $u(t)$  nella (4.9) si ottiene:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = K_P e = K_P (y_r - y)$$

per cui l'E.D. tra riferimento e uscita è:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + (k + K_P)y = K_P y_r \quad (4.10)$$

Come si vede, l'effetto che si ottiene è interpretabile come quello legato ad un aumento della rigidità della molla. Valutiamo i parametri essenziali della risposta a gradino di tale sistema.

- Cominciamo anzitutto con l'osservare che, essendo  $K_P > 0$ , le radici dell'equazione caratteristica sono sempre a parte reale negativa, per cui il sistema a ciclo chiuso è asintoticamente stabile. Pertanto la risposta a regime al gradino è costante.
- Per quanto riguarda la costante di guadagno, essendo il sistema asintoticamente stabile, essa può essere ottenuta come rapporto tra il valore di regime  $y(\infty)$  dell'uscita e quello del riferimento; tale valore, essendo  $y(\infty)$  costante, può essere ottenuto dalla (4.10) mediante la relazione:

$$(k + K_P)y(\infty) = K_P y_r(\infty)$$

per cui è data da:

$$G = \frac{y(\infty)}{y_r(\infty)} = \frac{K_P}{k + K_P}$$

Come si vede, al crescere di  $K_P$  la costante di guadagno tende a 1, per cui l'uscita a regime tende al valore del riferimento, ossia l'errore a regime tende a zero.

*In definitiva, per ridurre l'errore a regime in presenza di un riferimento a gradino, bisogna aumentare il coefficiente dell'azione proporzionale.*

- Per quanto riguarda la risposta in transitorio, gli effetti dell'azione proporzionale possono essere intuiti tenendo presente che, poiché essa è interpretabile come un aumento della rigidità della molla, la sua presenza comporta una diminuzione del coefficiente di smorzamento delle radici dell'equazione caratteristica. Questo è confermato dal calcolo analitico di tale coefficiente che risulta pari a (vedi esempio 3.7):

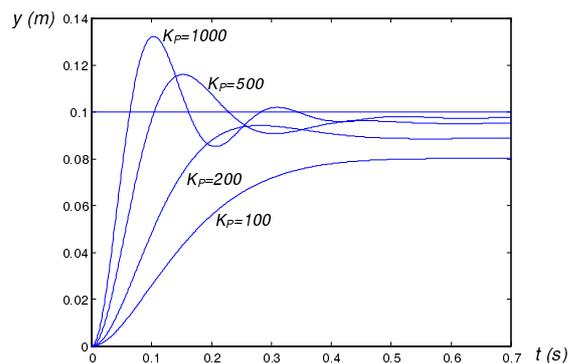
$$\zeta = \frac{b}{2\sqrt{(k + K_P)m}}$$

In definitiva, *all'aumentare del coefficiente dell'azione proporzionale aumenta l'ampiezza delle oscillazioni della risposta del sistema*. Tale fenomeno è interpretabile come una diminuzione della "stabilità in senso lato" del sistema.

L'effetto di diminuzione della "stabilità in senso lato" riscontrato nello studio del sistema massa-molla-smorzatore ci induce a chiederci se, in sistemi di tipo diverso, l'uso di un controllore proporzionale può pregiudicare anche la stabilità in senso stretto del sistema a ciclo chiuso. La risposta è purtroppo positiva. Infatti è possibile far vedere che, *in sistemi lineari e stazionari di ordine elevato, all'aumentare del coefficiente di azione proporzionale il sistema a ciclo chiuso può diventare instabile*. In particolare, spesso accade che all'aumentare di  $K_P$  la risposta del sistema comincia a presentare oscillazioni sempre meno smorzate, per poi diventare prima persistenti e poi divergenti.

**Esempio 4.4.** Si consideri il sistema meccanico di Fig.4.15 descritto dall'E.D. (4.9). Si assumano i seguenti valori dei parametri:  $m=1kg$ ,  $k=25N/m$ ,  $b=20Ns/m$ . Si supponga di controllarlo con un sistema a ciclo chiuso in cui il controllore sia di tipo proporzionale, ossia consista in una semplice costante di guadagno  $K_P$ . Si vuole studiare, in simulazione, il comportamento dell'uscita controllata nel sistema a ciclo chiuso al variare di  $K_P$  in presenza di un riferimento a gradino di ampiezza  $Y_{r0}=0.1m$ .

I risultati della simulazione, effettuata in ambiente SIMULINK, sono mostrati in Fig.4.17. Essi confermano le considerazioni precedentemente fatte.



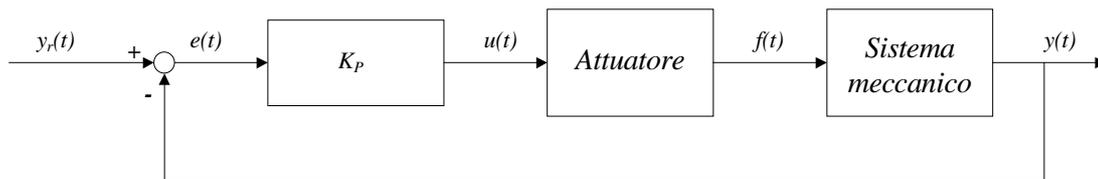
**Figura 4.17** Risposta al gradino del sistema massa-molla smorzatore con controllo proporzionale

Come visto, uno degli effetti benefici dell'aumento del guadagno proporzionale  $K_P$  è quello di far diminuire l'errore a regime. In generale vi è anche un altro effetto benefico, anche se esso non è presente nel sistema massa-molla-smorzatore considerato, vale a dire l'aumento della velocità di risposta. A questa, tuttavia, si accompagna un aumento notevole dell'ampiezza del segnale di controllo, e questo potrebbe essere non compatibile con il sistema di attuazione scelto.

**Esempio 4.5.** Si consideri nuovamente il sistema meccanico dell'esempio 4.4, con gli stessi valori dei parametri. Supponiamo però che questa volta il segnale di forza, comandato dal controllore, venga generato da un attuatore (per esempio un motore elettrico) che, a sua volta, sia un sistema dinamico del primo ordine con guadagno unitario e costante di tempo  $\tau=0.02s$ , ossia descritto da un'E.D. del tipo:

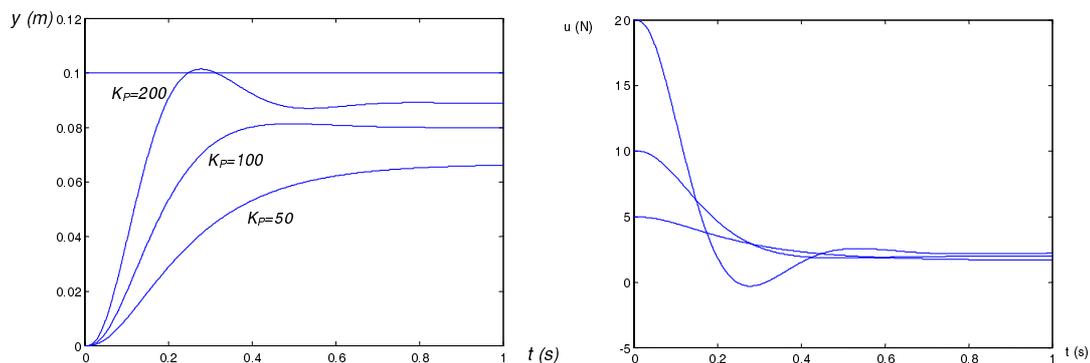
$$\dot{f} + 50f = u$$

dove  $f(t)$  è la forza effettivamente generata sul sistema e  $u(t)$  è l'uscita del controllore. Lo schema di controllo a ciclo chiuso si presenta come in Fig.4.18.



**Figura 4.18** Schema di controllo del sistema massa-molla smorzatore con sistema di attuazione

Gli andamenti della risposta a ciclo chiuso, mostrati in Fig.4.19, confermano le considerazioni precedentemente fatte.



**Figura 4.19** Risposta al gradino e segnale di controllo del sistema massa-molla smorzatore + attuatore con controllo proporzionale

Riassumendo, pertanto, possiamo concludere che:

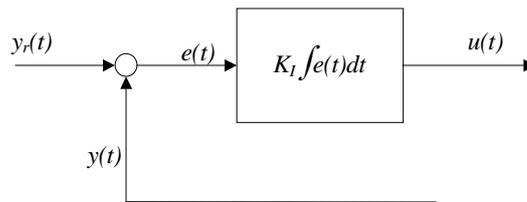
*utilizzando un controllo di tipo proporzionale, all'aumentare del guadagno  $K_P$  possiamo aspettarci:*

- *una diminuzione dell'errore a regime*
- *una maggiore velocità di risposta*
- *un aumento dell'ampiezza delle oscillazioni con tendenza verso l'instabilità .*

**Azione integrale.** In un controllore con azione integrale il segnale di controllo è proporzionale all'integrale del segnale di errore; la relazione ingresso-uscita, mostrata in Fig.4.20, si scrive:

$$u(t) = K_I \int_0^t e(\tau) d\tau$$

$K_I$  è detto *coefficiente dell'azione integrale*.



**Figura 4.20** Azione integrale

Per capire l'effetto di un'azione integrale supponiamo di utilizzarla per il controllo del sistema massa-molla-smorzatore precedentemente discusso. Sostituendo l'espressione di  $u(t)$  nella (4.9) e ipotizzando un segnale di riferimento a gradino, si ottiene:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = K_I \int_0^t e(\tau) d\tau$$

Derivando primo e secondo membro, e tenendo presente che, essendo per  $t > 0$  il segnale di riferimento costante le derivate successive di  $y(t)$  coincidono con le derivate del segnale di errore, risulta:

$$m\ddot{e} + b\dot{e} + ke + K_I e = 0 \quad (4.11)$$

Da questa si deduce che, se la scelta di  $K_I$  è effettuata in maniera da garantire che il sistema a ciclo chiuso sia asintoticamente stabile, allora la risposta a regime a gradino sarà costante, di conseguenza l'errore  $e(t)$  a regime tende a diventare costante, e di conseguenza risulta  $\dot{e} = \ddot{e} = \ddot{\ddot{e}} = 0$ . Sostituendo nella (4.11), si conclude che l'errore a regime diventa nullo, ossia l'uscita controllata tende al valore di regime del segnale di riferimento.

Possiamo pertanto concludere che: *l'introduzione di un'azione integrale garantisce che l'errore a regime in presenza di un riferimento a gradino è nullo.*

Con un procedimento analogo è possibile anche far vedere che: *l'introduzione di un'azione integrale garantisce che l'errore a regime in presenza di disturbo a gradino è nullo.*

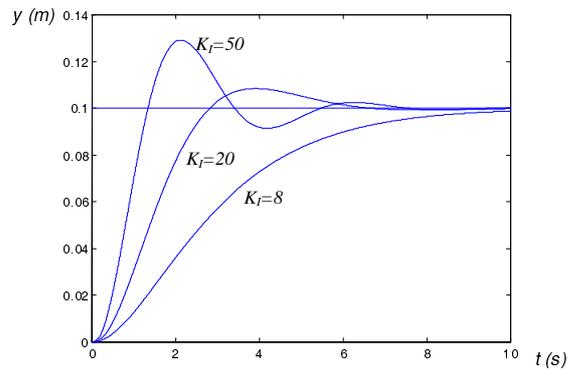
E' da notare che tale risultato vale quale che siano i valori dei parametri del sistema. Esso inoltre è indipendente dal valore di  $K_I$ : nella scelta di tale coefficiente bisogna solo fare attenzione a rispettare il vincolo di stabilità del sistema a ciclo chiuso. Se il sistema da controllare è asintoticamente stabile, tale vincolo è soddisfatto per bassi valori di  $K_I$ . Al crescere di  $K_I$  il sistema tende verso l'instabilità. Inoltre è possibile mostrare che:

*" utilizzando un controllo di tipo integrale, il sistema a ciclo chiuso tende ad esibire una velocità di risposta più bassa rispetto a quella che si ha con un controllore proporzionale; inoltre, all'aumentare del coefficiente  $K_I$  possiamo aspettarci:*

- una aumento della velocità di risposta
- un aumento dell'ampiezza delle oscillazioni con tendenza verso l'instabilità "

Mostriamo quanto detto con un esempio.

**Esempio 4.6.** Si consideri nuovamente il sistema meccanico dell'esempio 4.4 con gli stessi valori dei parametri. Il comportamento del sistema a ciclo utilizzando un controllore di tipo integrale con diversi valori del coefficiente dell'azione integrale  $K_I$  è mostrato in Fig.4.21.



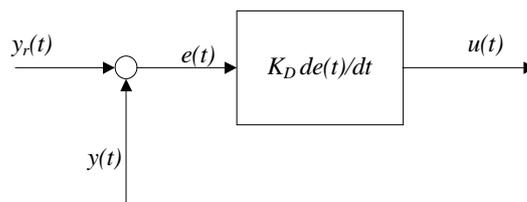
**Figura 4.21** Risposta al gradino del sistema massa-molla smorzatore con controllo integrale

Come si può notare, l'errore a regime va sempre a zero. E' evidente tuttavia la minore velocità di risposta del sistema rispetto a quello con azione proporzionale. Tale velocità di risposta non può essere recuperata semplicemente aumentando  $K_I$ ; infatti un aumento di tale coefficiente tende a portare velocemente il sistema verso l'instabilità.

**Azione derivativa.** In un controllore con azione derivativa il segnale di controllo è proporzionale alla derivata del segnale di errore; la relazione ingresso-uscita, mostrata in Fig.4.22, si scrive:

$$u(t) = K_D \frac{de(t)}{dt}$$

$K_D$  è detto *coefficiente dell'azione derivativa*.



**Figura 4.22** Azione derivativa

Per capire l'effetto di un'azione derivativa supponiamo di utilizzarla per il controllo del sistema massa-molla-smorzatore precedentemente discusso. Sostituendo l'espressione di  $u(t)$  nella (4.9) e ipotizzando un segnale di riferimento a gradino, per  $t > 0$  si ottiene:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = K_P \dot{e} = K_P \dot{y}$$

per cui l'E.D. tra riferimento e uscita è:

$$m\ddot{y} + (b + K_D)\dot{y} + ky = 0 \quad (4.12)$$

Come si vede, l'effetto che si ottiene è interpretabile come quello legato ad un aumento del coefficiente di attrito dello smorzatore. Valutiamo i parametri essenziali della risposta a gradino di tale sistema.

- Essendo  $K_D > 0$ , le radici dell'equazione caratteristica sono sempre a parte reale negativa, per cui il sistema a ciclo chiuso è asintoticamente stabile.

Per quanto riguarda la risposta a regime, essa, utilizzando una sola azione derivativa risulta essere nulla. Questo è uno dei motivi per cui tale azione non è mai utilizzata da sola.

- Per quanto riguarda la risposta in transitorio, gli effetti dell'azione derivativa possono essere intuitsi tenendo presente che, poiché essa è interpretabile come un aumento del coefficiente di smorzamento dello smorzatore, la sua presenza comporta un aumento del coefficiente di smorzamento delle radici dell'equazione caratteristica. Questo è confermato dal calcolo analitico di tale coefficiente che risulta pari a (vedi esempio 3.7):

$$\zeta = \frac{b + K_D}{2\sqrt{km}}$$

In definitiva, *all'aumentare del coefficiente dell'azione derivativa diminuisce l'ampiezza delle oscillazioni della risposta del sistema. L'azione derivativa, pertanto, introduce un effetto stabilizzante.*

Un'altra interpretazione dell'effetto stabilizzante dell'azione derivativa è basata sulla considerazione che, poiché il segnale di controllo è proporzionale alla derivata del segnale di errore, esso risulterà più grande quando l'errore tende a crescere velocemente e viceversa: in altri termini con l'azione derivativa viene effettuata una sorta di previsione dell'andamento dell'errore e, sulla base di tale previsione, si tenta di anticipare la correzione dell'errore stesso.

In conclusione ribadiamo ancora una volta che *l'azione derivativa non è mai usata da sola; essa viene tipicamente accoppiata con l'azione proporzionale per consentire di avere uno smorzamento delle oscillazioni che tipicamente si hanno all'aumentare del guadagno proporzionale.*

#### **IV.5.2 I vari tipi di regolatore e i criteri di scelta**

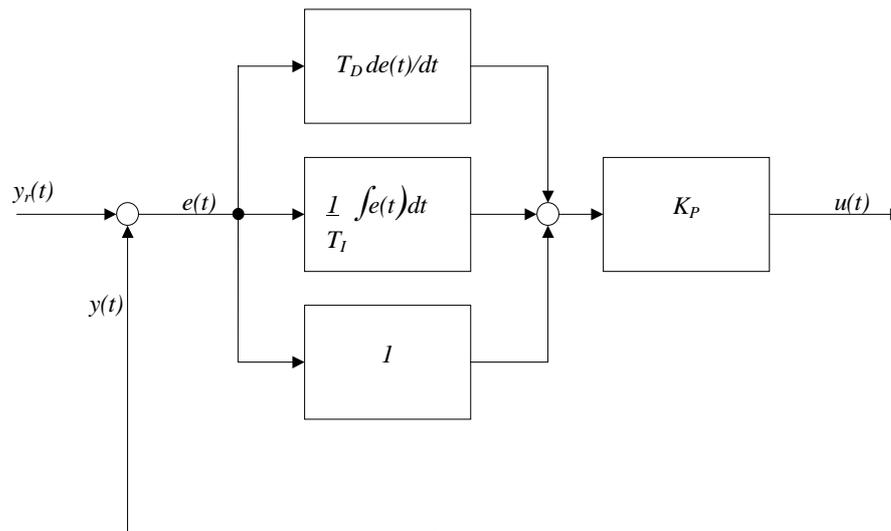
Come detto all'inizio del paragrafo, i regolatori PID calcolano la variabile di controllo  $u(t)$  come somma dei contributi delle azioni proporzionale, integrale e derivativa. La rappresentazione ingresso uscita risultante è allora:

$$u(t) = K_P e(t) + K_I \int_0^t e(\tau) d\tau + K_D \frac{de(t)}{dt}$$

In realtà la rappresentazione dei PID più utilizzata è la seguente:

$$u(t) = K_P \left[ e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (4.13)$$

a cui corrisponde una struttura realizzativa di principio del tipo di quella mostrata in Fig.4.23.



**Figura 4.23** Rappresentazione schematica di un regolatore PID

I parametri  $T_I$  e  $T_D$  sono detti, rispettivamente, *tempo integrale* e *tempo derivativo*.

La struttura realizzativa di cui sopra consente di realizzare varie combinazioni dei tre tipi di azione semplicemente scegliendo in maniera opportuna i parametri  $K_P$ ,  $T_I$  e  $T_D$ . Nelle pratica le combinazioni più utilizzate sono le seguenti:

- a) Regolatore proporzionale
- b) Regolatore proporzionale-integrale
- c) Regolatore proporzionale-integrale-derivativo

Vediamo in quali ciascuno di essi.

### **Regolatore proporzionale (P).**

Tale regolatore consiste semplicemente di un'azione proporzionale. Esso si ottiene dalla rappresentazione (4.13) ponendo  $T_I \rightarrow \infty$  e  $T_D = 0$ . Il comportamento di tale regolatore è già stato ampiamente discusso. Aggiungiamo solo che il suo uso è limitato a sistemi in cui le specifiche a regime non richiedono l'uso di un'azione integrale, e inoltre possono essere soddisfatte senza superare il limite di ampiezza delle oscillazioni fissato dalle specifiche.

### **Regolatore proporzionale-integrale (PI).**

Tale regolatore si ottiene dalla rappresentazione (4.13) ponendo  $T_D = 0$ . Esso viene scelto quando le specifiche sull'errore a regime richiedono l'uso di un'azione integrale. L'abbinamento di tale azione integrale con una proporzionale è finalizzato a ad ottenere una velocità di risposta maggiore di quella che si otterrebbe con una sola azione integrale, senza violare le specifiche di precisione dinamica (ampiezza delle oscillazioni).

### **Regolatore proporzionale-integrale-derivativo (PID).**

In tale regolatore l'utilizzo di un'azione derivativa in aggiunta a quelle già utilizzate nel regolatore PI consente di smorzare ulteriormente l'ampiezza delle oscillazioni, e quindi di ottenere, mediante un ulteriore aumento di  $K_P$ , un ulteriore aumento della velocità di risposta.

### ***IV.5.3 Taratura automatica dei parametri dei regolatori PID***

Quando vengono utilizzati regolatori con azioni combinate, la scelta dei parametri del regolatore (taratura dei parametri) in maniera da soddisfare un set di specifiche assegnate non è semplice. Essa, soprattutto nel caso in cui tali specifiche richiedono prestazioni "spinte" in termini di precisione a regime, precisione dinamica, velocità di risposta e ampiezza massima dei segnali di controllo, richiede l'uso di tecniche di progetto abbastanza sofisticate che, per di più, richiedono la conoscenza di un "buon" modello matematico del sistema da controllare.

Tuttavia, quando ci si contenta di avere prestazioni non spinte, come succede in molte applicazioni industriali, si possono utilizzare procedure di taratura dei parametri che sono basate su semplici prove sperimentali da eseguire sull'impianto da controllare, e sull'utilizzazione di formule semi-empiriche che consentono di fissare i valori dei parametri del controllore in base ad altri parametri ottenuti con le suddette prove sperimentali.

Queste procedure di taratura sperimentale sembrano aggirare sia il problema della determinazione del modello del sistema da controllare, sia quello della conoscenza delle procedure di progetto. In realtà le prove sperimentali sono proprio finalizzate a caratterizzare il comportamento dell'impianto con un numero limitato di parametri, e quindi a determinarne un modello estremamente semplice. Le formule di taratura automatica dei parametri del regolatore sono allora da assumersi come ottenute da una procedura di progetto applicata a tale modello semplificato.

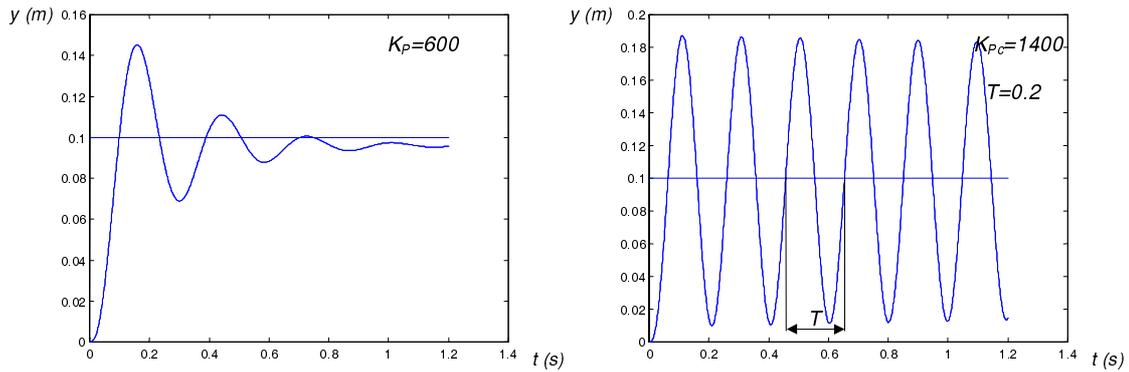
Nel seguito vengono presentate due tecniche di taratura automatica che vanno sotto il nome di "*Metodo di Ziegler e Nichols in anello chiuso*" e "*Metodo di Ziegler e Nichols in anello aperto*".

#### **Metodo di Ziegler e Nichols in anello chiuso.**

Questo metodo è applicabile a sistemi che, chiusi in controreazione con un regolatore di tipo proporzionale, all'aumentare del guadagno proporzionale tendono a portarsi verso l'instabilità.

La prova sperimentale da effettuare consiste nel chiudere il sistema in controreazione e aumentare il guadagno proporzionale  $K_P$  fino a che, in presenza di un riferimento  $y_r(t)$  a gradino, l'uscita presenta oscillazioni permanenti (non smorzate). La Fig.4.24 mostra l'andamento della risposta a ciclo chiuso del sistema considerato nell'Esempio 4.5 per due diversi valori del guadagno proporzionale:  $K_P=600$  e  $K_P=1400$ .

Una volta portato il sistema in oscillazione permanente, indicando con  $K_{Pc}$  il valore del guadagno proporzionale corrispondente, detto *guadagno critico*, e  $T$  il periodo dell'oscillazione, i parametri dei vari tipi di regolatore vengono ricavati con le formule riportate in Tabella IV.1.



**Figura 4.24** Risposta del sistema dell'esempio 4.5 durante le prove del metodo di Ziegler e Nichols in anello chiuso

	$K_P$	$T_I$	$T_D$
P	$0.5K_{Pc}$		
PI	$0.45K_{Pc}$	$0.8T$	
PID	$0.6K_{Pc}$	$0.5T$	$0.125T$

**Tabella IV.1** Regole di taratura di Ziegler e Nichols in anello chiuso

**Esempio 4.7.** Si consideri nuovamente il sistema meccanico dell'esempio 4.4 con gli stessi valori dei parametri. Si vuole comparare il comportamento del sistema a ciclo chiuso utilizzando i tre tipi di regolatori, P, PI e PID, tarati con il metodo di Ziegler e Nichols in anello chiuso.

I valori di  $K_{Pc}$  e  $T$ , come mostrato in Fig.4.24, risultano essere:

$$K_{Pc}=1400; \quad T=0.2.$$

**Controllore proporzionale.** In base alla Tab.IV.1 si ha:  $K_P=0.5K_{Pc}=700$ .

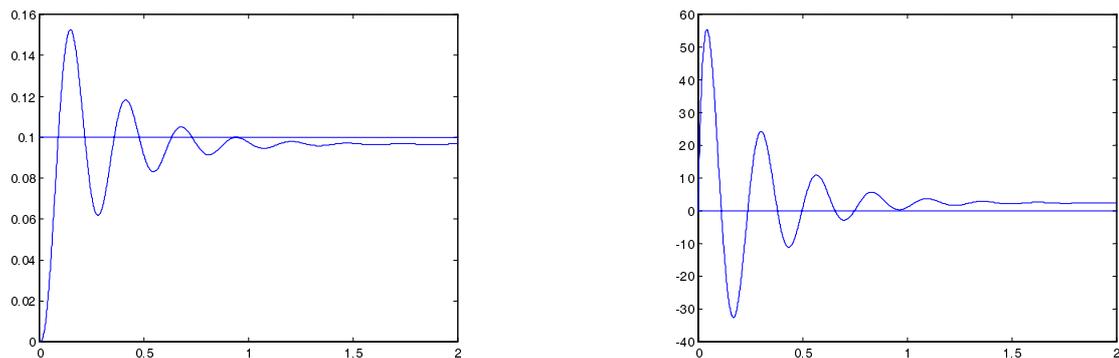
**Controllore proporzionale-integrale.** In base alla Tab.IV.1 si ha:  $K_P=0.45K_{Pc}=630$ ;  $T_I=0.8T=0.16$ .

**Controllore proporzionale-integrale-derivativo.** In base alla Tab.IV.1 si ha:  $K_P=0.6K_{Pc}=840$ ;  $T_I=0.5T=0.1$ ;  $T_D=0.125T=0.25$ .

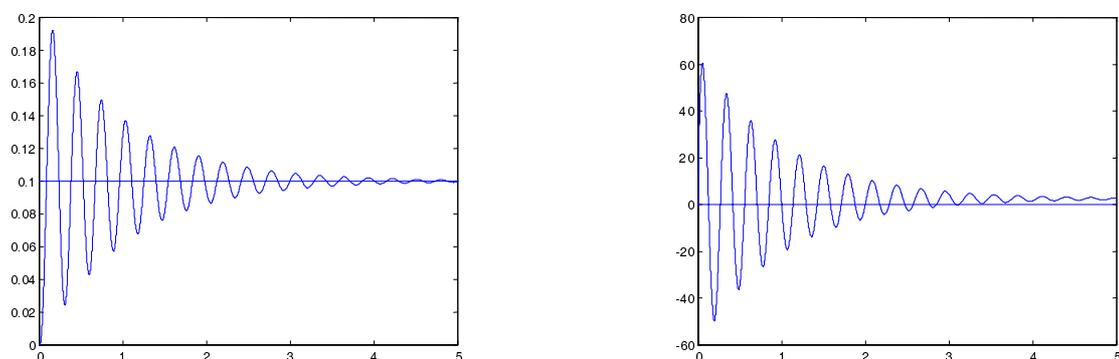
Gli andamenti dell'uscita e della forza esercitata dall'attuatore sul sistema meccanico con i tre diversi controllori sono mostrati in Fig.4.25.

Cominciamo anzitutto con il notare che, in tutti e tre i casi, la forza generata dall'attuatore nei primi istanti risulta molto più elevata del valore necessario a regime per mantenere la massa spiazzata rispetto alla posizione di equilibrio originale. Ciò è ovviamente dovuto all'inerzia del sistema; si capisce pertanto che quanto più pronto vogliamo il sistema, tanto maggiore deve essere l'accelerazione iniziale e, di conseguenza, la forza iniziale.

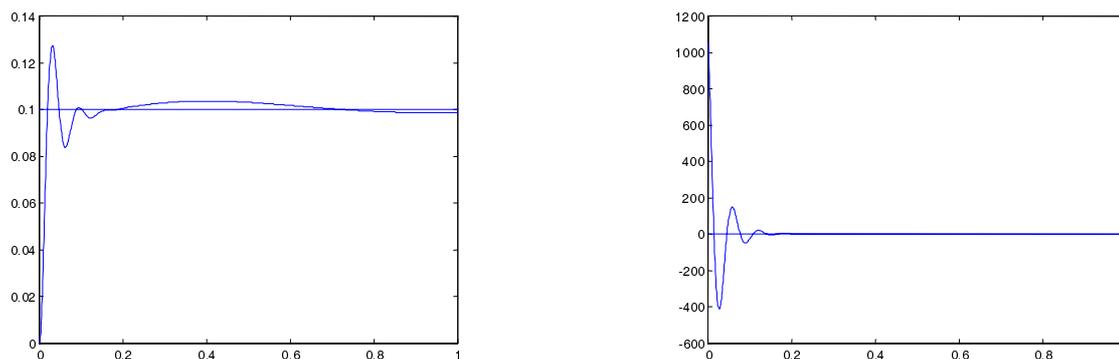
Per quanto riguarda le prestazioni, nel caso di regolatore P l'errore a regime è diverso da zero e le oscillazioni hanno ampiezza abbastanza elevata: ogni tentativo di diminuire la costante di guadagno proporzionale per diminuire l'ampiezza delle oscillazioni porta ad un aumento dell'errore a regime. Anche con il regolatore PI le prestazioni dinamiche non sono soddisfacenti: il sistema esibisce oscillazioni di notevole ampiezza e poco smorzate. Con il regolatore PID, d'altro canto, pur ottenendo un sistema molto più veloce e con oscillazioni più smorzate, l'ampiezza del segnale di controllo durante il transitorio risulta di circa un ordine di grandezza più grande che negli altri due casi.



**Figura 4.25 a.** Andamento dell'uscita controllata e della forza agente sul sistema dell'esempio 4.7 con controllore proporzionale tarato con il metodo di Ziegler e Nichols in anello chiuso



**Figura 4.25 b.** Andamento dell'uscita controllata e della forza agente sul sistema dell'esempio 4.7 con controllore proporzionale-integrale tarato con il metodo di Ziegler e Nichols in anello chiuso

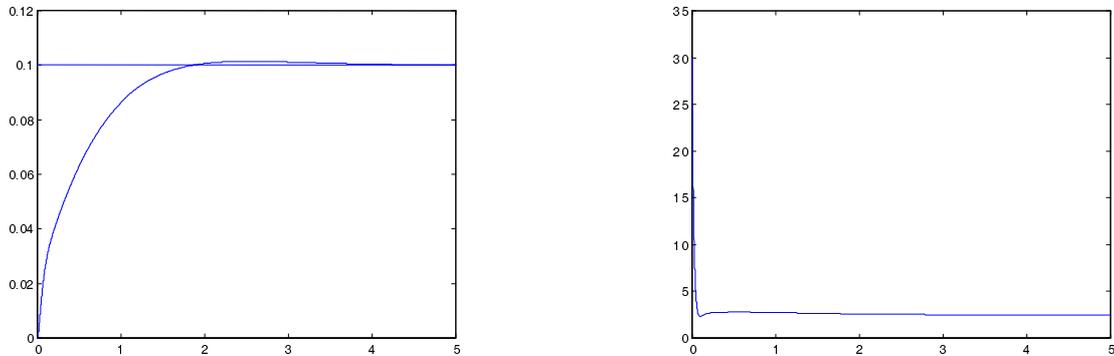


**Figura 4.25 c.** Andamento dell'uscita controllata e della forza agente sul sistema dell'esempio 4.7 con controllore proporzionale-integrale-derivativo tarato con il metodo di Ziegler e Nichols in anello chiuso

In conclusione il metodo di Ziegler e Nichols non può ritenersi del tutto soddisfacente, e richiede comunque un successivo aggiustamento "manuale" dei parametri del controllore, cosa che comunque richiede una certa esperienza. Nel caso in cui sono richieste prestazioni spinte, anche con tale procedura manuale non si riescono a raggiungere i risultati richiesti. In questo caso diventa indispensabile l'uso di procedure di progetto che richiedono una competenza specifica. Così, ad esempio, per il caso in esame, un controllore in grado di soddisfare le seguenti specifiche:

- i) errore a regime nullo per ingresso a gradino,
- ii)  $t_{a_{5\%}} < 2s$ ,
- iii) assenza di sovralongazione,
- iv) segnale di controllo di ampiezza contenuta

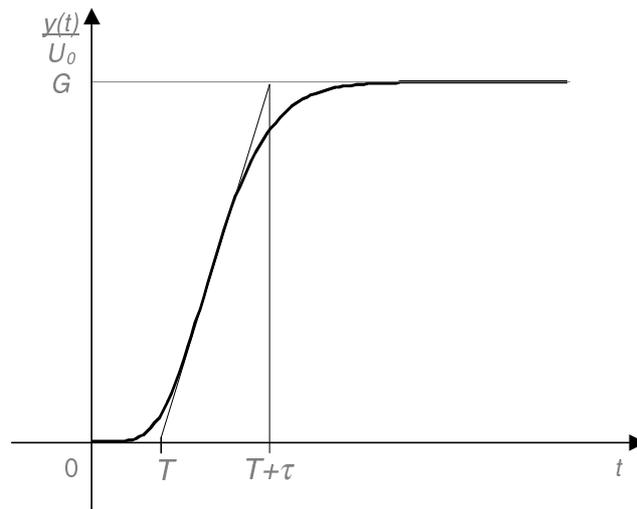
è un controllore di tipo PID con:  $K_p=40$ ;  $T_I=0.7$ ;  $T_D=0.15$ . Le prestazioni ottenute sono mostrate in Fig.4.26.



**Figura 4.26.** Andamento dell'uscita controllata e della forza agente sul sistema dell'esempio 4.7 con controllore proporzionale-integrale-derivativo progettato con tecniche di controllo avanzate.

### Metodo di Ziegler e Nichols in anello aperto.

Questo metodo è applicabile nel caso di impianti per i quali la risposta a gradino (a ciclo aperto) presenti un andamento non oscillatorio. Esso si basa sulla determinazione sperimentale di tale risposta a gradino e sulla sua caratterizzazione attraverso alcuni parametri. Per definire tali parametri facciamo riferimento all'andamento qualitativo della risposta a gradino di un tale sistema mostrata in Fig.4.26. Essa è normalizzata rispetto all'ampiezza  $U_0$  del gradino in ingresso.



**Figura 4.26.** Determinazione dei parametri della risposta a gradino per la taratura dei regolatori standard con il metodo di Ziegler e Nichols in anello aperto

Sul grafico della risposta si supponga di tracciare la tangente geometrica nel punto di massima pendenza della risposta. I parametri con cui si caratterizza la risposta sono allora i seguenti:

- $G =$  costante di guadagno, che è fornita dal valore di regime della risposta a gradino normalizzata;
- $T =$  tempo di ritardo equivalente, misurato dall'intersezione della tangente nel punto di massima pendenza con l'asse delle ascisse;
- $\tau =$  costante di tempo equivalente, misurata dal tempo intercorrente tra le intersezioni della tangente nel punto di massima pendenza con l'asse delle ascisse e con il valore di regime della risposta normalizzata.

Ricavati sperimentalmente tali parametri, i parametri dei vari tipi di regolatore vengono ricavati con le formule riportate in Tabella IV.2.

	$K_P$	$T_I$	$T_D$
P	$\frac{\tau}{TG}$		
PI	$\frac{0.9\tau}{TG}$	$3T$	
PID	$\frac{1.2\tau}{TG}$	$2T$	$0.5T$

**Tabella IV.2** Regole di taratura di Ziegler e Nichols in anello aperto

Per quanto riguarda le prestazioni dei sistemi a ciclo chiuso utilizzando regolatori tarati con tale metodo, valgono considerazioni analoghe a quelle fatte per il metodo di Ziegler e Nichols in anello chiuso.